Corrigé proposé par :
A.HMAIRROU (CPGE Med V)
Casablanca

DES OBJETS ASTRONOMIQUES, DE MARS À SIRIUS

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

I.A Mouvement d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

❒ **1—** La condition forte permettant de considérer A fixe est

$$\boxed{m_A \gg m_P} \tag{1}$$

Si les deux astres sont assimilés à deux points matériels, alors la force qu'applique A sur P est

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r} \tag{2}$$

❒ **2—** Si l'astre A possède une répartition de masse à symétrie sphérique, le champ gravitationnel créé par cette répartition en un point P tel que $(AP = r > R_A)$ est celui que créerait un point matériel, de masse m_A placé au centre de la sphère, ainsi, l'expression de la force reste inchangée :

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r} \tag{3}$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le théorème de Gauss de la gravitation

$$\oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}} \tag{4}$$

Le centre A de la sphère est considéré comme origine du repère. Ainsi, par des considérations de symétrie et d'invariances, on montre que $\vec{G}(P) = \vec{G}(r)\vec{u}_r$; le point P est repèré par ses coordonnées (r, θ, φ). Le flux de $\vec{G}$ à travres la surface de Gauss est

$$\oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 G(r) \tag{5}$$

La masse intérieure à la surface de Gauss est $M_{\text{int}} = m_A$. Ce qui donne $4\pi r^2 G(r) = -4\pi\mathcal{G}m_A$. Soit

$$\vec{G}(r > R_A) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\vec{u}_r \tag{6}$$

d'où

$$\vec{F} = m_p\vec{G}(P) = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r \tag{7}$$

❒ **3—** Oui, l'expression de cette force reste valable si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{A}$ sont à symétrie sphérique, puisque si l'on cherche la force appliquée par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{P}$, on procède de la même façon que la question précédente et d'après le principe de l'action et de la réaction, nous avons $\vec{F}_{\mathscr{P}/\mathscr{A}} = -\vec{F}_{\mathscr{P}/\mathscr{A}}$.

❒ **4—** Appliquons le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}/_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AP} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0} \tag{8}$$

Le moment cinétique est donc une constante du mouvement $\vec{L}_A = m_P\vec{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{\text{Cte}}$
Le vecteur position $\vec{AP}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R}_0)$ sont contenus dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_A$; ce dernier est fixé par les conditions initiales : le mouvement est donc plan.
La constante des aire est apparait dans l'expression du moment cinétique

$$\|\vec{L}_A\| = m_P|C| \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\|\vec{L}_A\|}{m_P} \tag{9}$$

En associant au mouvement plan un système de coordonnées polaires (r, θ), le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_A = m_PC\vec{u}_z = r\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = m_Pr^2\dot{\theta}u_z \tag{10}$$

Soit

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}} \tag{11}$$

❒ **5—** On a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\vec{a}}{\dot{\theta}}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à P, donne

$$\vec{a} = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2}\vec{u}_r$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2\dot{\theta}}\vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}m_A}{C}\vec{u}_r} \tag{12}$$

On intègre $\mathrm{d}\vec{v} = -\frac{\mathcal{G}m_A}{C}\vec{u}_r\mathrm{d}\theta = \frac{\mathcal{G}m_A}{C}\,\mathrm{d}(\vec{u}_\theta)$, on obtient

$$\boxed{\vec{v}(\theta) = \frac{Gm_A}{C}\left(\vec{u}_\theta + \vec{e}\right) = \frac{C}{p}\left(\vec{u}_\theta + \vec{e}\right) \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{Gm_A}} \tag{13}$$

Le vecteur $\vec{e}$ a la même dimension que $\vec{u}_\theta$ à partir de l'expression précédente, et comme $\vec{u}_\theta$ est sans dimension $\vec{e}$ est sans dimension. Les deux vecteurs $\vec{v}(\theta)$ et $\vec{u}_\theta$ sont dans le plan (Axy) et puisque $\vec{e} = \frac{p}{C}\vec{v} - \vec{u}_\theta$, $\vec{e}$ est donc dans le plan (Axy).

❒ **6—** Le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

De la question précédente, nous avons

$$\vec{v}(\theta) = \frac{C}{p}\vec{u}_\theta + \frac{C}{p}\vec{e}$$

Comme $\vec{e} = e\vec{u}_y = e\left(\cos\theta\vec{u}_\theta + \sin\theta\vec{u}_r\right)$, il vient

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \frac{C}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \frac{C}{p}e\sin\theta\vec{u}_r \tag{14}$$

Soit par identification

$$\boxed{\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{Ce}{p} \sin\theta \\ r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}(1 + e\cos\theta) \end{cases}} \tag{15}$$

On remplace $\dot{\theta}$ par $\dfrac{C}{r^2}$ dans $r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}(1 + e\cos\theta)$, on tire l'expression de $r(\theta)$, soit

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}} \tag{16}$$

Pour un mouvement borné, nous avons $\dfrac{p}{1+e} \leq r \leq \dfrac{p}{1-e}$, soit $\dfrac{1-e}{p} \leq \dfrac{1}{r} \leq \dfrac{1+e}{p}$ et puisque r est toujours positif, il vient donc que

$$1 - e > 0 \implies e < 1 \text{ puisque } p > 0 \tag{17}$$

Dans cette situation, la trajectoire est elliptique.

I.B Période du mouvement

❒ **7—** On a $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2} = \dfrac{C}{p^2}(1 + e\cos\theta)^2$, soit

$$\mathrm{d}t = \frac{p^2}{C}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

Le période est obtenue en intégrant θ entre 0 et 2π, soit

$$T = \frac{p^2}{C}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{p^2}{C}\mathcal{I} \text{ avec } \mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \tag{18}$$

et puisque $p = \dfrac{C^2}{Gm_A}$, il vient finalement

$$\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}\mathcal{I}} \tag{19}$$

❒ **8—** Dans le cas où $e = 0$, la trajectoire est circulaire et $p = r$, r étant le rayon de la trajectoire circulaire. On a :

$$\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}2\pi} \tag{20}$$

On en déduit la troisième loi de Kepler

$$\boxed{\frac{T^2}{p^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_A}} \tag{21}$$

Énoncé

Le carré de la période de révolution T d'une planète sur son orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse. Dans le cas d'une trajectoire circulaire $T^2 \propto r^3$

❒ **9—** Le code du tracé est le suivant

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
# Définition de la fonction à intégrer
def f(theta, e):
return 1 / (1 + e * np.cos(theta))**2
# Définition des bornes d'intégration
a = 0
b = 2 * np.pi
# Valeurs de e pour lesquelles on veut tracer l'intégrale
e_valeurs = np.linspace(0, .5, 10)
# Calcul de l'intégrale pour chaque valeur de e
integral_values = []
for e in e_valeurs:
resultat, _ = quad(f, a, b, args=(e,))
integral_values.append(resultat)
# Tracer l'intégrale en fonction de e
figure=plt.figure(figsize=(8,8))
plt.plot(e_valeurs, integral_values,'o-')
plt.ylabel('Intégrale $\mathcal{I}$')
plt.xlabel('Paramètre $e$')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Le résultat de l'exécution du code est donné par la figure suivante

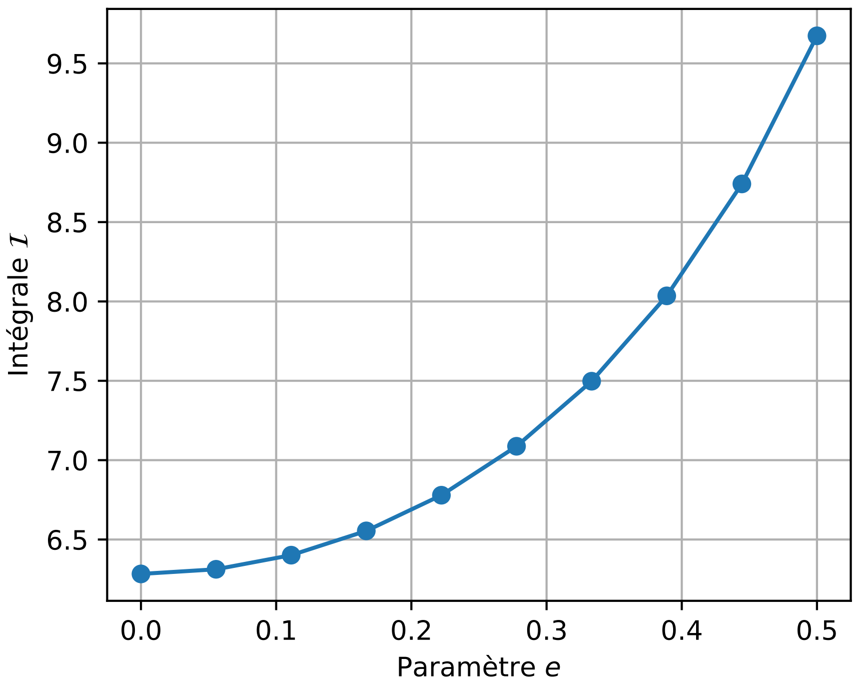

FIGURE 1

I.C Mesure de l'unité astronomique

❒ **10—**

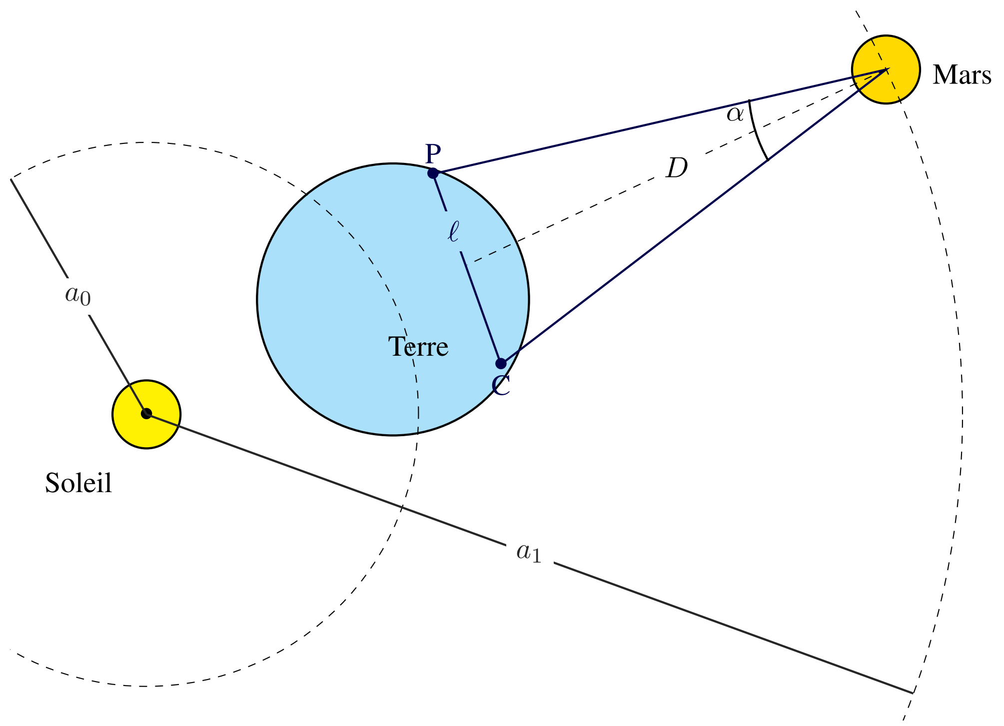

FIGURE 2 – Présentation des différentes paramètres a_0, a_1, ℓ et α. L'échelle n'est pas respecté.

❒ **11—** D'après la figure 2 de la question ❒ **10—**, nous avons $\tan\alpha = \alpha \backsimeq \dfrac{\ell}{d} \backsimeq \dfrac{\ell}{a_1 - a_0}$, soit

$$a_1 = a_0 + \frac{\ell}{\alpha}$$

D'après la troisième loi de Kepler, nous avons $\dfrac{a_1^3}{a_0^3} = \dfrac{T_1^2}{T_0^2}$, soit

$$a_0 = a_1 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}$$

On en déduit donc l'expression de a_0

$$\boxed{a_0 = \frac{\ell}{\alpha\left[\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right]}} \tag{22}$$

❒ **12— Application numérique**

$$a_0 = \frac{7070 \times 10^3}{14 \times 4,85 \left[\left(\dfrac{687}{365}\right) 2/3 - 1\right] \times 10^{-6}} \backsimeq \frac{7,1 \times 10^{12}}{19,4\,[1,6 - 1]} \backsimeq 1,7 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$$

La valeur est compatible avec la formule de l'équation 22, même que l'écart relatif entre la valeur tabulée et la valeur trouvée est de 13%.

II Structure et énergie des étoiles

II.A L'énergie gravitationnelle

❒ **13—** W_g est négatif, puisqu'il correspond à une interaction attractive (énergie potentielle négative). L'énergie de liaison, correspond à l'énergie qu'elle faut fournir à un système pour le dissocier. D'où on nomme parfois $E_\ell = -W_g$.