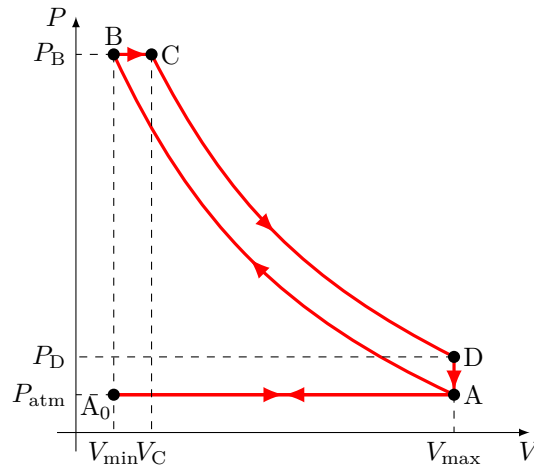


I La motorisation des trains

I.1 Le moteur Diesel

Q1. Représentation du cycle dans le diagramme (P, V) .



Q2. La transformation A – B est une compression adiabatique et réversible d'un gaz parfait donc, d'après les lois de Laplace :

$$P_{\text{atm}} V_{\text{max}}^\gamma = P_B V_{\text{min}}^\gamma$$

avec $\gamma = 1,4$ pour un gaz diatomique (d'après l'énoncé). Soit :

$$P_B = P_{\text{atm}} \left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} \right)^\gamma \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_B = P_{\text{atm}} x^\gamma}$$

La transformation C – D est une détente adiabatique et réversible d'un gaz parfait donc, de même :

$$P_B V_C^\gamma = P_D V_{\text{max}}^\gamma$$

soit :

$$P_D = P_B \left(\frac{V_C}{V_{\text{max}}} \right)^\gamma \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_D = P_B y^{-\gamma} = P_{\text{atm}} \left(\frac{x}{y} \right)^\gamma}$$

Q3. Le rendement thermodynamique est le rapport de la grandeur utile, soit le travail fourni par le fluide à l'extérieur : $-W$ et de la grandeur coûteuse, à savoir le transfert thermique reçu par le fluide pendant la phase d'injection/combustion B – C. Or, d'après le premier principe sur le cycle :

$$W + Q_{A_0A} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} + Q_{AA_0} = 0$$

Les phases d'admission A_0A et d'éjection AA_0 sont en aller-retour donc $Q_{A_0A} + Q_{AA_0} = 0$. Par ailleurs, AB et CD sont adiabatiques donc :

$$-W = Q_{BC} + Q_{DA}$$

D'où :

$$\eta_C = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

Or BC est isobare donc :

$$Q_{BC} = nC_{Pm} (T_C - T_B)$$

et DA est isochore :

$$Q_{DA} = nC_{Vm} (T_{\text{atm}} - T_D)$$

Donc, comme $C_{Pm}/C_{Vm} = \gamma$:

$$\boxed{\eta_C = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{\text{atm}} - T_D}{T_C - T_B}}$$

Q4. On utilise les lois de Laplace pour écrire :

$$T_{\text{atm}} V_{\text{max}}^{\gamma-1} = T_{\text{B}} V_{\text{min}}^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad T_{\text{B}} = T_{\text{atm}} x^{\gamma-1}$$

Puis, comme BC est isobare :

$$\frac{nRT_{\text{C}}}{V_{\text{C}}} = \frac{nRT_{\text{B}}}{V_{\text{min}}} \quad \text{soit} \quad T_{\text{C}} = T_{\text{B}} \frac{V_{\text{C}}}{V_{\text{min}}} = T_{\text{B}} \frac{x}{y} = T_{\text{atm}} \frac{x^{\gamma}}{y}$$

Puis la loi de Laplace permet d'écrire :

$$T_{\text{C}} V_{\text{C}}^{\gamma-1} = T_{\text{D}} V_{\text{max}}^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad T_{\text{D}} = T_{\text{C}} y^{1-\gamma} = T_{\text{atm}} \frac{x^{\gamma}}{y^{\gamma}}$$

En injectant tout cela dans la formule **Q3** :

$$\eta_{\text{C}} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{\text{atm}} - T_{\text{atm}} \frac{x^{\gamma}}{y}}{T_{\text{atm}} \frac{x^{\gamma}}{y} - T_{\text{atm}} x^{\gamma-1}}$$

En divisant par x^{γ} au numérateur et au dénominateur :

$$\eta_{\text{C}} = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma} - y^{-\gamma}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \right) = 61 \%$$

Le rendement est inférieur à celui prévu. On peut proposer comme explications :

- l'admission et l'éjection correspondent à $W > 0$ à cause des frottements, ils causent donc une diminution du rendement, de façon générale des frottements des pistons diminuent la valeur de $-W$;
- la transformation CD n'est pas réversible : le fait que $\Delta S > 0$ pour cette transformation implique la température T_{D} est donc plus importante (à Q_{c} donné) que dans le cas réversible, donc le transfert thermique vers la source froide plus important ;
- une partie de la chaleur de combustion peut être évacuée par conduction, convection ou rayonnement vers l'extérieur directement.

Q5. Le travail fourni est $-W = \eta Q_{\text{BC}}$ avec :

$$Q_{\text{BC}} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_{\text{C}} - T_{\text{B}})$$

avec $T_{\text{B}} = T_{\text{atm}} x^{\gamma-1}$, $T_{\text{C}} = T_{\text{atm}} x^{\gamma}/y$ et

$$nR = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{T_{\text{atm}}}$$

ainsi :

$$Q_{\text{BC}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{T_{\text{atm}}} \left(T_{\text{atm}} \frac{x^{\gamma}}{y} - T_{\text{atm}} x^{\gamma-1} \right)$$

$$Q_{\text{BC}} = \frac{\gamma P_{\text{atm}} V_{\text{max}} x^{\gamma}}{\gamma-1} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 1,23 \times 10^5 \text{ J}$$

Soit $-W = 5,23 \times 10^4 \text{ J}$. Le nombre de cycles réalisés par unité des temps est :

$$\omega = 2000 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1} = 2000 \text{ cycles} \cdot \text{min}^{-1} = 33,3 \text{ cycles} \cdot \text{s}^{-1}$$

La puissance de la locomotive est :

$$\mathcal{P} = -W \times \omega = 1,86 \text{ MW}$$

Il faut $t = d/v$ pour parcourir $d = 100 \text{ km}$. Pendant ce temps, le nombre de cycle est $\omega t = \omega d/v$. Ainsi, le transfert thermique total reçu pendant ces cycles est :

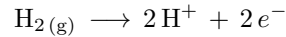
$$Q_{\text{tot}} = \frac{\omega d}{v} Q_{\text{BC}}$$

soit une masse de carburant brûlée :

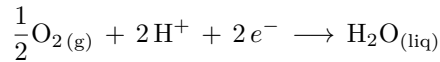
$$m = \frac{Q_{\text{tot}}}{\Delta_{\text{comb}} h} = 226 \text{ kg}/100 \text{ km}$$

I.2 La pile à hydrogène PEMFC (*Polymer Exchange Membrane Fuel Cell*)

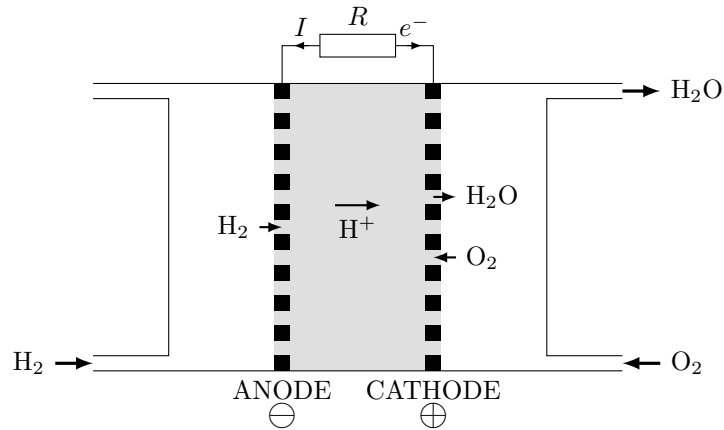
Q6. L'**anode** est le lieu où se passe l'**oxydation** ; la **cathode** est le lieu où se passe la **réduction**. À l'anode, le dihydrogène est oxydé en eau :



À la cathode, le dioxygène est réduit en eau :



Q7. Les électrons sont produits du côté du dihydrogène, et vont donc vers l'électrode de droite. Le courant est en sens inverse. Les ions H^+ vont de l'anode à la cathode. D'après le sens des électrons, la borne \oplus est la cathode, la borne \ominus l'anode.



Q8. D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ (\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) - \Delta_f H^\circ (\text{H}_{2(\text{g})}) - \frac{1}{2}\Delta_f H^\circ (\text{O}_{2(\text{g})}) = -286 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

De même :

$$\Delta_r S^\circ = S_m^\circ (\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) - S_m^\circ (\text{H}_{2(\text{g})}) - \frac{1}{2}S_m^\circ (\text{O}_{2(\text{g})}) = -0,163 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

d'où :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -237 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Or $\Delta_r G^\circ = -n\mathcal{F}e^\circ$, où $n = 2$ est le nombre d'électrons échangés pour un avancement de 1 soit :

$$e^\circ = \frac{-\Delta_r G^\circ}{2\mathcal{F}} = 1,23 \text{ V}$$

Ce qui est conforme au résultat habituel.

Q9. On peut interpréter la grandeur coûteuse comme le « stock d'enthalpie ». Ce qui a été dépensé est donc $H_i - H_f = -\Delta H$.

Q10. Ici :

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = -W_e + Q - TS_e - TS_c = -W_e - TS_c$$

$S_c \geq 0$ donc :

$$\Delta G \leq -W_e$$

Q11. On a, en fonctionnement réversible :

$$\eta = -\frac{-n\Delta_r G^\circ}{n\Delta_r H^\circ} = \frac{\Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}$$

On a établi que :

$$\eta = 1 - T \frac{\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}$$

Q12. À 60°C , on trouve :

$$\eta = 0,81$$

Q13. Il faut brancher $U/U_n = 429$ cellules en série. La surface des électrodes doit être :

$$S = \frac{I}{j} = \frac{\mathcal{P}}{Uj} = 1,5 \times 10^3 \text{ cm}^2 = 0,15 \text{ m}^2 \text{ par cellule}$$

soit une surface de 63 m^2 au total pour l'ensemble de la pile à combustible.

Q14. Pour un atome d'hydrogène, on fournit deux électrons. Or le débit d'électrons est I/\mathcal{F} . Donc le débit de dihydrogène pour une cellule est :

$$\frac{I}{2\mathcal{F}} = 3,45 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

Soit au total :

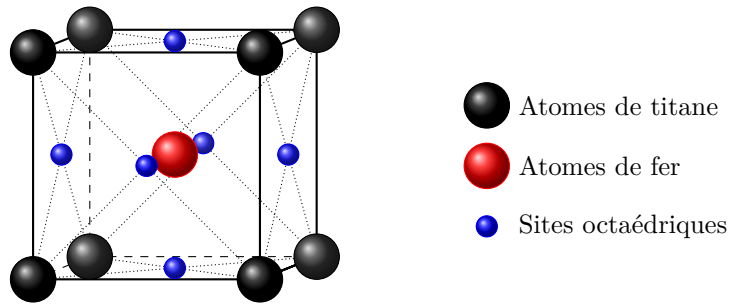
$$\frac{U}{U_n} \frac{\mathcal{P}}{2U\mathcal{F}}$$

Le débit molaire d'hydrogène pour l'ensemble de la pile est :

$$\frac{\mathcal{P}}{2U_n\mathcal{F}} = 1,48 \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour effectuer 1000 km, il faut 10 h soit une quantité de matière de dihydrogène égale à $53,3 \times 10^3 \text{ mol}$ soit une masse de dihydrogène égale à 107 kg .

Q15. Schéma de la maille : les atomes de titane sont situés sur les sommets, l'atome de fer au centre d'un cube de côté a .



Il y a deux méthodes :

— On utilise les rayons métalliques. Si les atomes de fer sont jointifs alors $a = 2R_{\text{Fe}} = 264 \text{ pm}$, si les atomes de titane sont jointifs alors $a = 2R_{\text{Ti}} = 252 \text{ pm}$, si le contact se fait sur la diagonale du cube entre fer et titane alors :

$$a\sqrt{3} = R_{\text{Ti}} + 2R_{\text{Fe}} + R_{\text{Ti}} \quad \text{soit} \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} (R_{\text{Ti}} + R_{\text{Fe}}) = 298 \text{ pm}$$

On retient cette valeur car c'est la plus grande (la seule qui permet la non-pénétration des nuages électroniques).

— On utilise la donnée de la masse volumique. La maille est composée d'un atome de fer et de $8 \times \frac{1}{8} = 1$ atome de titane donc :

$$\rho = \frac{M(\text{Ti}) + M(\text{Fe})}{\mathcal{N}_A a^3} \quad \text{soit} \quad a = \left(\frac{M(\text{Ti}) + M(\text{Fe})}{\rho \mathcal{N}_A} \right)^{1/3} = 3,00 \times 10^{-10} \text{ m} = 300 \text{ pm}$$

Les résultats coïncident.

Q16. Les sites octaédriques sont situés au centre de chacune des faces (l'octaèdre est défini par les quatre atomes de titane d'une face, l'atome de fer central et l'atome de fer de la maille adjacente). Il y a $6 \times \frac{1}{2} = 3$ sites interstitiels par maille. Il y a également un atome de fer et de un atome de titane donc la formule stoechiométrique de l'hydruure contenant le maximum d'hydrogène est :



Q17. On peut donc absorber 1,9 atomes d'hydrogène par maille. La masse d'un atome d'hydrogène est $M(\text{H})/\mathcal{N}_A$ donc la capacité d'absorption volumique est donc :

$$\frac{1,9M(\text{H})}{\mathcal{N}_A a^3} = 119 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Q18. Il faut alors $108/119 = 0,9 \text{ m}^3$ pour stocker l'hydrogène. Sous forme comprimée, en supposant le gaz parfait, il faut :

$$V_{\text{gaz comprimé}} = \frac{mRT}{M(\text{H}_2)P} = 1,9 \text{ m}^3$$

Sous forme liquide, il faut :

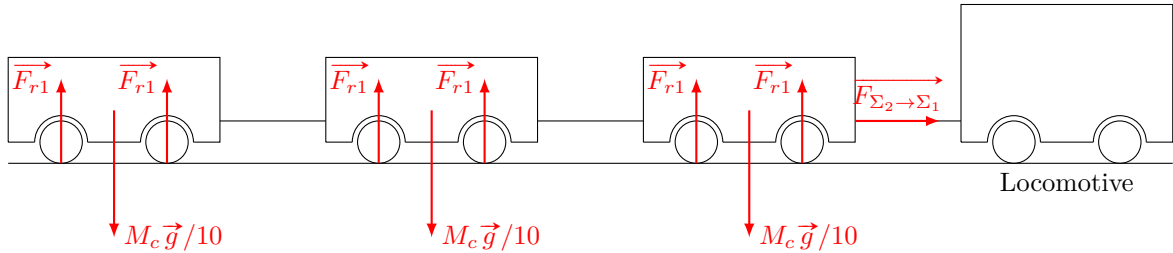
$$V_{\text{liquide}} = \frac{m}{\rho_{\text{H}_2, \ell}} = 1,5 \text{ m}^3$$

Le stockage par adsorption est le plus compact.

II Mécanique du transport ferroviaire

II.1 Démarrage du train de Trevithick

Q19. On réalise un schéma avec trois wagons :



L'application du principe fondamental de la dynamique sur le système Σ_1 , dans le référentiel de la voie ferrée galiléen donne :

$$M_c \vec{g} + 40\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = M_c \vec{a}_0$$

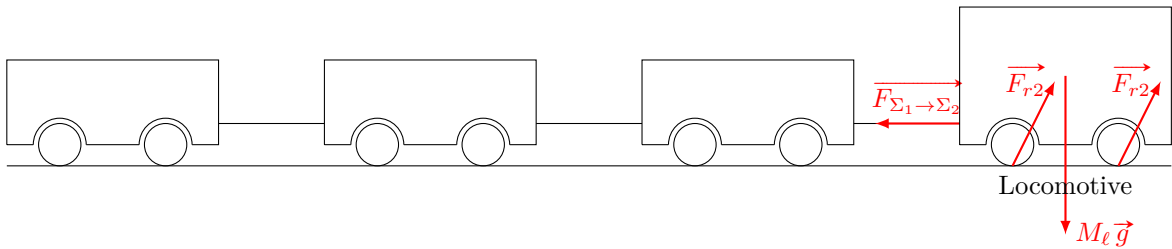
On projette cette équation sur les directions horizontale et verticale :

$$\begin{cases} M_c \vec{g} = 40 \|\vec{F}_{r1}\| \\ \|\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\| = M_c a_0 \end{cases}$$

Soit simplement :

$$\boxed{\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = M_c \vec{a}_0}$$

Q20. Schéma :



Q21. On applique le PFD sur le système Σ_2 (locomotive) dans le référentiel terrestre :

$$\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} + M_\ell \vec{g} + 4\vec{N}_{r2} + 4\vec{T}_{r2} = M_\ell \vec{a}_0$$

L'équation projetée sur l'axe vertical est $M_\ell g = 4 \|\vec{N}_{r2}\|$. Ainsi, horizontalement il reste :

$$4\vec{T}_{r2} = M_\ell \vec{a}_0 - \vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$$

$M_\ell \vec{a}_0$ comme $-\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$ sont nécessairement dirigés vers l'avant, donc \vec{T}_{r2} est vers l'avant. En utilisant la troisième loi de Newton : $\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = -\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$ et en reportant le résultat de la question **Q19** :

$$\boxed{\vec{T}_{r2} = \frac{M_c + M_\ell}{4} \vec{a}_0}$$

Q22. De l'égalité donnée dans l'énoncé, on en déduit :

$$\frac{M_c + M_\ell}{4} \vec{a}_0 = 0,1 f_a \frac{M_\ell g}{4} \vec{u}_x$$

où \vec{u}_x est l'axe du mouvement. Ainsi :

$$\ddot{x} = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g$$

On intègre :

$$\dot{x} = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t + K$$

Soit $\dot{x}(0) = K$. Or $\dot{x}(0) = 0$ donc $K = 0$. La vitesse du convoi est donc :

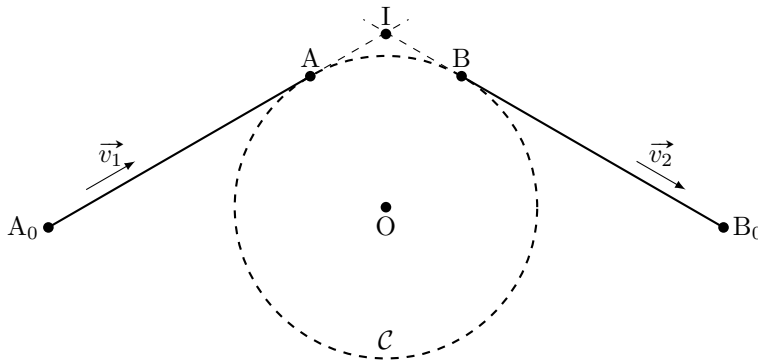
$$v_x(t) = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t$$

La vitesse de croisière est atteinte au bout de :

$$t_0 = \frac{v_0 (M_c + M_\ell)}{0,1 f_a M_\ell g} = 208 \text{ s} = 3 \text{ min } 28 \text{ s}$$

II.2 Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

Q23. On note I l'intersection des droites (A_0A) et (BB_0) et O le centre du cercle :



D'après l'énoncé, $\widehat{AIB} = 120^\circ$. Ainsi $\widehat{AIO} = \widehat{AIB}/2 = 60^\circ$. Puis :

$$\widehat{IOA} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{AIO} = 90^\circ - \widehat{AIO}$$

Dans le triangle rectangle AOH, H étant le projeté orthogonal de A sur (IO) :

$$\frac{d_{AB}/2}{R_c} = \sin(\widehat{IOA}) = \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right)$$

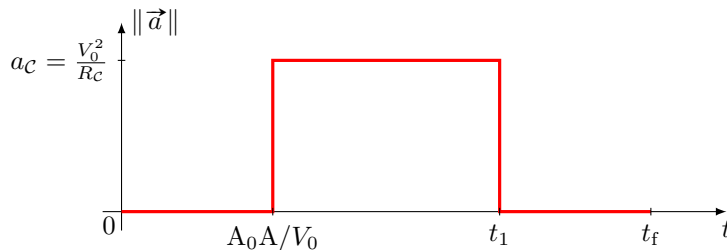
Soit

$$R_c = \frac{d_{AB}}{2 \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right)}$$

Q24. Sur la ligne droite, entre A_0 et A, le mouvement étant rectiligne et uniforme, l'accélération est donc nulle. De même, entre B_0 et B, on a également $\vec{a} = \vec{0}$. Entre A et B, le mouvement est circulaire uniforme donc dans la base polaire correspondante :

$$\vec{a} = -\frac{V_0^2}{R_c} \vec{u}_r$$

Le temps nécessaire pour parcourir le segment $[A_0A]$ est A_0A/V_0 , celui pour parcourir l'arc de cercle AB est $R_c \widehat{AOB}/V_0$ avec $\widehat{AOB} = \pi/3$ rad. Enfin, le temps nécessaire pour parcourir le segment $[BB_0]$ est BB_0/V_0 . D'où le graphique :



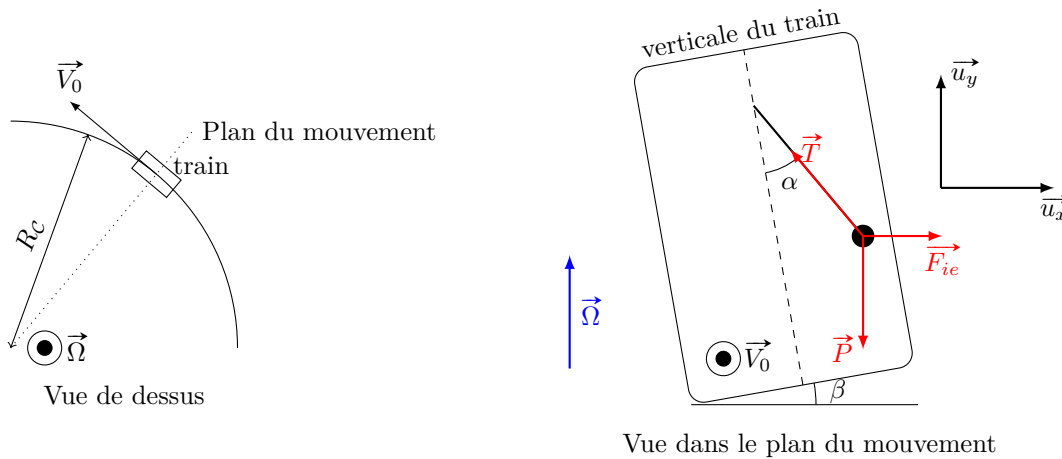
$$t_f = \frac{A_0A + R_c \widehat{AOB} + BB_0}{V_0}$$

$$t_1 = \frac{A_0A + R_c \widehat{AOB}}{V_0}$$

Q25. Application numérique :

$$a_c = \frac{V_0^2}{R_c} = \frac{V_0^2}{d_{AB}} 2 \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right) = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q26. On étudie le mouvement du pendule statique dans le référentiel non-galiléen du train, ce dernier étant en mouvement circulaire uniforme autour d'un axe fixe vertical. Faisons deux schémas de la situation :



Comme indiqué sur le schéma ci-dessus, on considère un dévers vers l'intérieur : si le rail extérieur est surélevé, $\beta > 0$, sinon $\beta < 0$. L'angle entre la verticale du train et le pendule est mesuré sur la figure 5 :

$$\tan \alpha = \frac{0,2 \text{ cm}}{4,9 \text{ cm}} \quad \text{soit} \quad \alpha = 0,041 \text{ rad}$$

On étudie le problème dans la base cartésienne horizontale $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de sorte que :

$$\vec{g} = -g\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{V}_0 = V_0\vec{u}_z$$

Sur la masse s'exercent :

— le poids :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_y$$

— le poids :

$$\vec{T} = T \cos(\alpha + \beta) \vec{u}_y - T \sin(\alpha + \beta) \vec{u}_x$$

— on prend en compte le caractère non-galiléen du référentiel du train par la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\Omega^2 R_C \vec{u}_x = -m \frac{V_0^2}{R_C} \vec{u}_x$$

— et la force d'inertie de Coriolis, nulle car le pendule est fixe dans le référentiel du train.

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

On projette sur les deux coordonnées :

$$\begin{cases} m \frac{V_0^2}{R_C} = T \sin(\alpha + \beta) \\ mg = T \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Ainsi, en divisant la première équation par la seconde :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{V_0^2}{gR_C}$$

Soit :

$$\beta = \arctan\left(\frac{V_0^2}{gR_C}\right) - \alpha = 0,272 \text{ rad} = 15,6^\circ$$

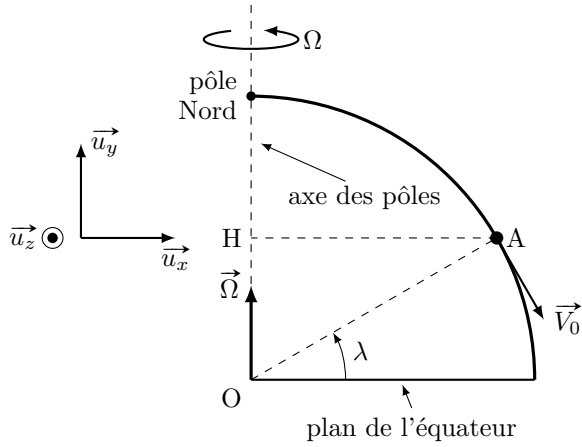
Le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur de $15,6^\circ$ soit une surélévation de 39 cm (écartement de 140 cm).

Q27. Le référentiel terrestre a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{23 \text{ h } 56 \text{ min}}$$

autour de l'axe des pôles.

Q28. Faisons un schéma de la situation : \vec{V}_0 est dirigé vers le Nord le long de la surface de la Terre et Ω est dirigé selon l'axe des pôles :



On exprime la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

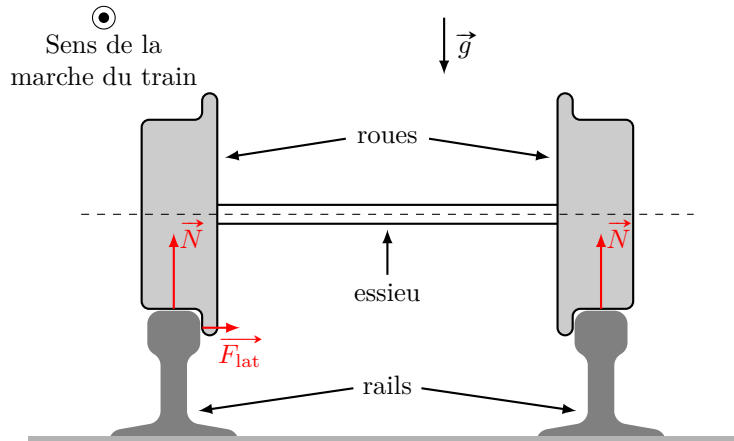
avec :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v} = -V_0 \cos \lambda \vec{u}_y + V \sin \lambda \vec{u}_x$$

Soit :

$$\vec{F}_{ic} = 2m\Omega V_0 \sin \lambda \vec{u}_z$$

La force est dirigée vers l'Ouest. Ainsi, pour maintenir l'équilibre des forces dans la direction Est-Ouest, une force est exercée par le rail à l'Ouest vers l'Est :



Q29. H intervient au dénominateur : plus le matériau utilisé est dur, moins le volume abrasé est grand. F_n intervient au numérateur, plus le matériau utilisé est dur, plus le volume abrasé est grand et ce de façon proportionnelle. Le volume abrasé est enfin logiquement proportionnel à la longueur du rail.

Q30. On a :

$$[k] = \frac{[V][H]}{[F_n][d]} = \frac{L^3 \cdot M \cdot L^{-2}}{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L} = L^{-1} \cdot T^2$$

La dimension de k est $L^{-1} \cdot T^2$

Q31. Le volume d'acier abrasé sur la face supérieure d'un rail, sur une longueur $d = 500$ km de rail est :

$$V_{\text{sup}} = N \times k \frac{mg}{2NH} d = k \frac{mg}{2H} d$$

N désigne le nombre d'essieu et m la masse du train. Ainsi, chaque roue supporte $1/(2N)$ fois le poids du train. Latéralement, la force exercée sur le rail à l'Est est $F = 2m\Omega V \sin \lambda$, ce qui correspond à un volume arraché :

$$V_{\text{lat}} = k \frac{2m\Omega V_0 \sin \lambda}{H} d$$

Ainsi :

$$\frac{V_{\text{sup}}}{V_{\text{lat}}} = \frac{mg}{4\Omega V_0 \sin \lambda}$$

ce rapport vaut 563 à la latitude de Lyon et 536 à la latitude de Paris.

III Connexion à Internet par LiFi

III.1 Émission du signal lumineux

Q32. La condition d'émission est $i_1 > 0$. Or $u_1 + r_e i_1 = u_e$ et $u_1 = V_{sb}$ si et seulement si $i_1 \geq 0$. Ainsi, la condition d'émission devient :

$$u_e > V_{sb}$$

La valeur constante U_{\min} qui permet d'obtenir une émission lumineuse est :

$$U_{\min} = V_{sb}$$

Q33. Si $i_1 = i_0 = 0,73$ A, alors $u_1 = V_{sb}$ d'où :

$$U_0 = V_{sb} + r_e i_0 = 10,2 \text{ V}$$

$$\Phi_{e0} = \eta_{\text{led}} V_{sb} i_0 = 0,70 \text{ W}$$

Q34. De $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ et $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$ (phase à l'origine choisie nulle comme dans la suite de l'énoncé), on en déduit :

$$m_1(t) = kp_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

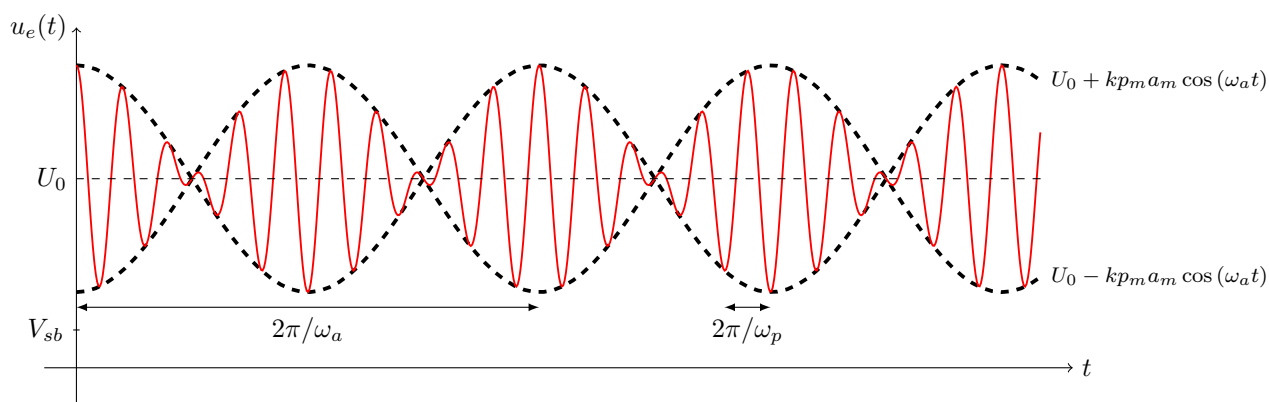
D'où :

$$u_e(t) = U_0 + kp_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

La valeur minimale du produit de cosinus est -1 , donc la valeur minimale de $u_e(t)$ est $U_0 - kp_m a_m$. Cette valeur doit être supérieure à V_{sb} d'où la condition sur $kp_m a_m$:

$$kp_m a_m < U_0 - V_{sb} = r_e i_0 = 7,3 \text{ V}$$

Q35. u_e est un signal de moyenne U_0 . La partie variable est une oscillation à $f_p = 10f_a$, modulée par f_a :



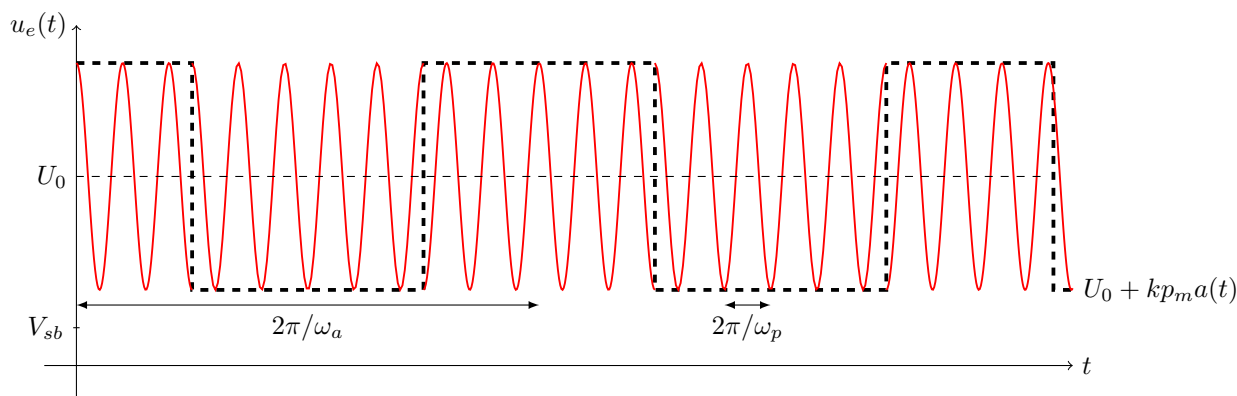
Pour obtenir le spectre, on linéarise l'expression en utilisant $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$:

$$u_e(t) = U_0 + \frac{kp_m a_m}{2} \cos((\omega_p + \omega_a)t + \alpha_p) + \frac{kp_m a_m}{2} \cos((\omega_p - \omega_a)t + \alpha_p)$$

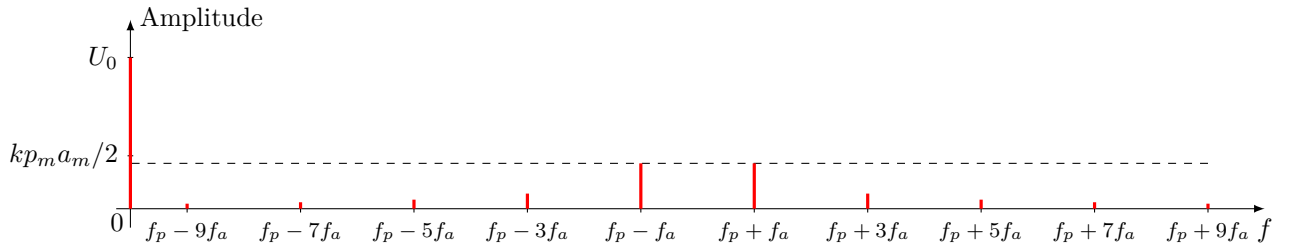
Il y a trois fréquences : nulle, $f_p + f_a$ et $f_p - f_a$:



Q36. Graphique, le signal modulant est un carré au lieu d'une sinusoïde :



Spectre : le spectre est déplié autour de f_p :



III.2 Réception du signal lumineux et extraction de l'information

Q37. L'émission se fait de façon homogène sur une semi-sphère. À distance d de la diode émettrice, le flux lumineux par unité de surface est :

$$\frac{\Phi_e}{2\pi d^2} = \frac{K_e (u_e(t) - V_{sb})}{2\pi r_e d^2}$$

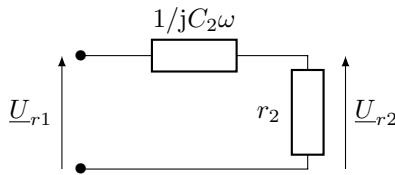
Ainsi, le flux reçu est :

$$\Phi_r = s_r K_e \frac{u_e(t) - V_{sb}}{2\pi r_e d^2}$$

Enfin, $u_r = r i_2 = r K_r \Phi_r$ d'où :

$$u_r(t) = r s_r K_e K_r \frac{u_e(t) - V_{sb}}{2\pi r_e d^2}$$

Q38. Le filtre F est un filtre passe-haut d'ordre 1. Il permet d'éliminer la composante continue. On étudie le circuit en régime sinusoïdal forcé : les tensions sont remplacées par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_{r2} = \frac{r_2}{r_2 + \frac{1}{jC_2\omega}} \underline{U}_{r1} = \frac{j r_2 C_2 \omega}{1 + j r_2 C_2 \omega} \underline{U}_{r1}$$

On identifie $\omega_c = 1/r_2 C_2$:

$$\underline{H} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Q39. On a :

$$u_r(t) = \frac{r s_r K_e K_r}{2\pi r_e d^2} (U_0 - V_{sb} + k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t))$$

Ainsi, comme $u_{r1} = K u_r$ et u_{r2} représente u_{r1} débarrassé de sa composante continue (puisque $\omega_c \ll \omega_a, \omega_p$) :

$$u_{r2}(t) = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

D'où :

$$u_{r3}(t) = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k^2 p_m^2 a_m \cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

On identifie :

$$U_{3m} = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k^2 p_m^2 a_m$$

Q40. On a :

$$\cos^2(\omega_p t + \alpha_p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_p t + 2\alpha_p)$$

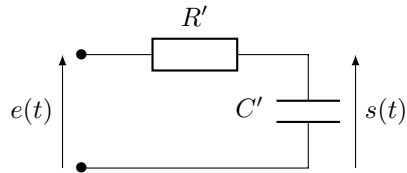
Ainsi :

$$\cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_a t) + \frac{1}{4} \cos((2\omega_p + \omega_a)t + 2\alpha_p) + \frac{1}{4} \cos((2\omega_p - \omega_a)t + 2\alpha_p)$$

En choisissant un filtre passe-bas de coupure $\omega'_c \ll \omega_p$ et $\omega'_c \gg \omega_a$, on élimine les deux derniers termes, il reste :

$$u_{r4} = \frac{U_{3m}}{2} \cos(\omega_a t)$$

On peut proposer un filtre passe-bas RC du premier ordre :



La pulsation de coupure est $\omega'_c = 1/(R'C')$.

III.3 Débit binaire du LiFi

Q41. On a :

$$f_{ck} = 10 \times 10^6 \text{ Hz} = 10^7 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_p = \text{qq} \cdot 10^9 \text{ Hz} > 100 \times 10^7 \text{ Hz}$$

La condition est vérifiée.

Q42. La fréquence de la porteuse est :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{4,70 \times 10^{-7}} = 6,4 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

La fréquence de la sous-porteuse est $f_{ck} < 6 \times 10^{12} \text{ Hz}$: soit un débit descendant pouvant aller jusqu'à $5 \times 10^{12} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$. Néanmoins, des éléments autres dans le circuit (comme la photodiode et son temps de réponse) jouent sans doute fortement sur le débit possible.