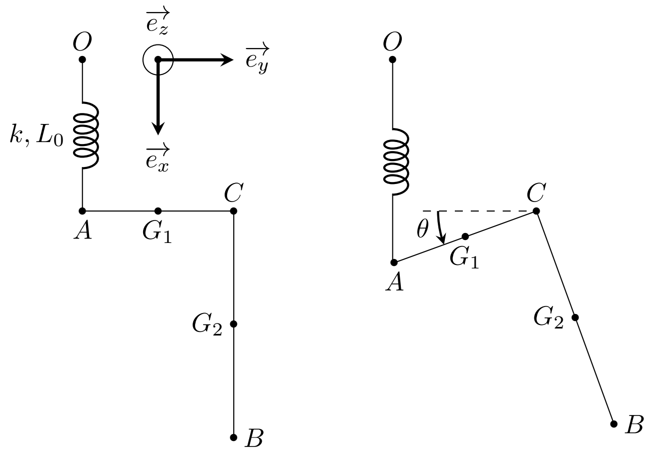
2 Système tiges - ressort

Deux tiges CA et CB de masses m et $2m$, de longueurs L et $2L$, sont solidaires et perpendiculaires entre elles. Elles sont assujetties par une liaison parfaite à tourner dans le plan vertical (Cxy) autour de l'axe fixe Cz. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz du solide $\{ACB\}$ est :

$$J = 3mL^2$$

En A est fixé un ressort de raideur k et dont la longueur à vide est L_0 : la position de son autre extrémité O (fixe dans le référentiel terrestre) est choisie de sorte que CA soit horizontal lorsque le système est en équilibre.



On étudie les petits mouvements de rotation de ce solide, repérés par l'angle θ, en supposant que θ est suffisamment petit pour considérer que le ressort reste toujours vertical.

1) *Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.*

Appliquons le théorème du moment cinétique (TMC) au système des deux tiges, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Faisons un bilan des moments des forces appliquées :

- Pivot : $\overrightarrow{M_C}(\text{pivot}) \perp \overrightarrow{e_z}$ puisque la liaison est parfaite.
- Poids de CA :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_C}(m\vec{g}) &= \overrightarrow{CG_1} \wedge m\vec{g} = \frac{L}{2}\,(-\cos\theta\,\overrightarrow{e_y} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_x}) \wedge mg\,\overrightarrow{e_x} \\ &= \frac{mgL}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

- Poids de CB :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_C}(2m\vec{g}) &= \overrightarrow{CG_2} \wedge 2m\vec{g} = L\,(\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}) \wedge 2mg\,\overrightarrow{e_x} \\ &= -\,2mgL\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

- Force exercée par le ressort :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{F_r}) &= \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{F_r} = L\,(-\cos\theta\,\overrightarrow{e_y} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_x}) \wedge -k\,(OA - L_0)\,\overrightarrow{e_x} \\ &= -\,k\,(OA - L_0)L\cos\theta\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

avec $OA = L_{\text{éq}} + L\sin\theta$.

Le TMC projeté sur $\overrightarrow{e_z}$, vecteur unitaire de l'axe de rotation conduit à :

$$3mL^2\,\ddot{\theta} = \frac{mgL}{2}\cos\theta - 2mgL\sin\theta - k\,(L_{\text{éq}} - L_0 + L\sin\theta)L\cos\theta$$

Déterminons maintenant $L_{\text{éq}}$. À l'équilibre, nous avons : $\forall\, t,\ \theta = 0$ donc $\ddot{\theta} = 0$. L'équation précédente devient :

$$0 = \frac{mgL}{2} - k\,(L_{\text{éq}} - L_0)L \quad \text{d'où} \quad \boxed{L_{\text{éq}} = \frac{mg}{2k} + L_0 > L_0}$$

On remarque qu'à l'équilibre le ressort est étiré et donc que la force élastique est dirigée vers le haut.

En reportant dans l'équation du TMC on obtient :

$$3mL^2\,\ddot{\theta} = \frac{mgL}{2}\cos\theta - 2mgL\sin\theta - k\left(\frac{mg}{2k} + L\sin\theta\right)L\cos\theta$$

d'où, en simplifiant : .

$$\boxed{3mL^2\,\ddot{\theta} = -\,2mgL\sin\theta - \,kL^2\,\sin\theta\cos\theta}$$

2) *En déduire la période des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre.*

Pour des mouvements de faible amplitude autour de la position d'équilibre stable $\theta_{\text{éq}} = 0$ on peut écrire :

$$\cos\theta \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin\theta \approx \theta$$

Il vient :

$$3mL^2\,\ddot{\theta} = -\,2mgL\theta - \,kL^2\,\theta$$

d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{2g}{3L} + \frac{k}{3m}\right)\,\theta = 0}$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique (OH) de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3L} + \frac{k}{3m}}$$

et donc de période propre :

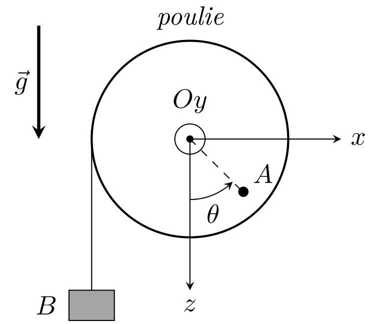
$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{3L} + \frac{k}{3m}}}}$$

3 Oscillations d'une poulie

Le système étudié est constitué d'une poulie, assimilée à un disque de masse m, de rayon R et de centre O, sur laquelle on a soudé en un point A une masse ponctuelle m_A. On note $OA = a$ ($a < R$) la distance entre O et A. La poulie peut tourner sans frottement autour de l'axe Oy grâce à une liaison pivot parfaite et son moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est noté J.

Un fil, sans masse et inextensible, est enroulé dans la gorge de la poulie. Son mouvement se fait sans aucun glissement par rapport à celle-ci. À l'autre extrémité de ce fil est attaché un objet B de masse m_B.

La rotation du solide { Poulie + A } est repérée par l'angle θ. À $t = 0$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale, avec un angle θ_0.



1) *Quelle est l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du solide { Poulie + A }, en fonction de J, m_A, a et de $\dot{\theta}$?*

Il s'agit de la somme des moments cinétiques de la poulie seule et de la masse ponctuelle en A. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O} &= J\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{L_{O\perp}}(\text{poulie}) + \overrightarrow{OA} \wedge m_A\overrightarrow{v_A} \\ &= J\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{L_{O\perp}}(\text{poulie}) + m_A a^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y}\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{L_{O\perp}}(\text{poulie})$ est la composante du moment cinétique de la poulie orthogonale à $\overrightarrow{e_y}$.

2) *À l'aide du théorème du moment cinétique, établir une équation reliant $\ddot{\theta}$, m_A, g, a et la norme T de la tension exercée par le fil sur la poulie (Relation 1).*

Appliquons le théorème du moment cinétique au système {poulie + A} en projection sur $\overrightarrow{e_y}$, vecteur unitaire de l'axe de rotation. Faisons d'abord un bilan des actions :

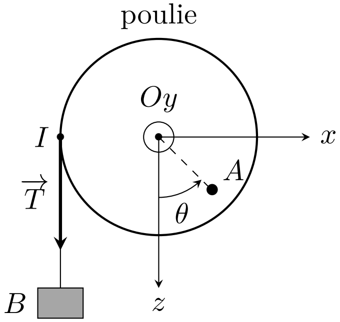
- La liaison pivot exerce un moment $\overrightarrow{M_O}(\text{pivot})$ orthogonal à $\overrightarrow{e_y}$ en l'absence de frottements (pivot parfaite).
- Le poids de la poulie s'applique en O et son moment est donc nul. Le moment du poids de A est :

$$\overrightarrow{M_O}(m_a\vec{g}) = \overrightarrow{OA} \wedge m_A\vec{g} = a\,\overrightarrow{e_r} \wedge m_A g\,(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$$

donc :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O}(m_a\vec{g}) = -\,m_A a g \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}}$$

- La tension $\overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{e_z}$ ($T > 0$) exercée par le fil qui s'applique en I.



$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{T} = -R\,\overrightarrow{e_x} \wedge T\,\overrightarrow{e_z} = RT\,\overrightarrow{e_y}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\left(J + m_A a^2\right)\ddot{\theta} = -\,m_A a g \sin\theta + RT} \quad (1)$$

3) *Le fil ne glissant pas sur la poulie et étant inextensible, exprimer la vitesse $\overrightarrow{v_B}$ de l'objet B en fonction de R et de $\dot\theta$ (Relation 2).*

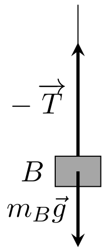
Le fil ne glissant pas, à chaque instant, la vitesse d'un point de la périphérie de la poulie est égale à celle du fil en contact avec ce point. En se plaçant au point I on obtient donc :

$$\vec{v}(I \in \text{poulie}) = \vec{v}(I \in \text{fil}) = \overrightarrow{v_B}$$

et donc :

$$\boxed{\overrightarrow{v_B} = R\dot\theta\,\overrightarrow{e_z}} \quad (2)$$

4) *Appliquer le PFD à l'objet B (Relation 3).*



L'objet B est soumie à son poids $m_B\vec{g}$ et à la tension du fil, qui d'après le principe de l'action et de la réaction vaut $-\overrightarrow{T}$. On a donc :

$$m_B\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_B}}{\mathrm{d}t} = m_B\vec{g} - \overrightarrow{T}$$

d'où, grâce à (2) :

$$\boxed{m_B R\ddot\theta = m_B g - T} \quad (3)$$

5) *Déduire des 3 relations trouvées aux questions précédentes l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.*

(3) permet d'exprimer $T = m_B g - m_B R\ddot\theta$, que l'on substitue dans (1) pour trouver :

$$\left(J + m_A a^2\right)\ddot\theta = -\,m_A a g\sin\theta + m_B R g - m_B R^2\ddot\theta$$

et donc :

$$\boxed{\left(J + m_A a^2 + m_B R^2\right)\ddot\theta = -\,m_A a g\sin\theta + m_B R g}$$

6) a) *Quelle sont les valeurs $\theta_{\text{éq}}$ de θ lorsque le système est en équilibre ? À quelle condition cet équilibre peut-il être réalisé ?*

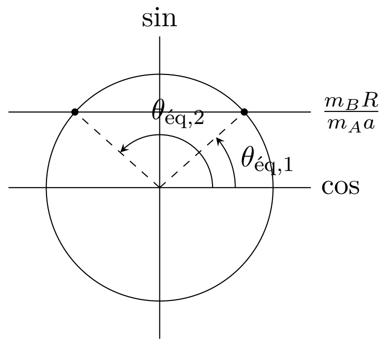
Dans la position d'équilibre on a $\forall\, t,\ \theta = \theta_{\text{éq}}$ et donc $\ddot\theta = 0$, ce qui entraîne :

$$-\,m_A a g\sin\theta_{\text{éq}} + m_B R g = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{m_B R}{m_A a}}$$

Cette équation ne donne une position d'équilibre que si : $m_B R \leqslant m_A a$.

b) *Dans le cas où l'équilibre est possible, en déduire la période T_0 des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.*

L'équation précédente donne en fait deux positions d'équilibre : $\theta_{\text{éq},1} \in [0, \pi/2]$ et $\theta_{\text{éq},2} \in [\pi/2, \pi]$ comme le montre le tracé du cercle trigonométrique ci-dessous :



Au voisinage d'une de ces deux positions d'équilibre on peut écrire :

$$\theta = \theta_{\text{éq}} + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1$$

.

Il vient :

$$\begin{aligned}\left(J + m_A a^2 + m_B R^2\right) \ddot{\varepsilon} &= - m_A a g \sin(\theta_{\text{éq}} + \varepsilon) + m_B R g \\ &= - m_A a g \left[\sin(\theta_{\text{éq}}) \cos(\varepsilon) + \cos(\theta_{\text{éq}}) \sin(\varepsilon)\right] + m_B R g\end{aligned}$$

Or $\cos(\varepsilon) \approx 1$ et $\sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$, ce qui, compte tenu du fait que $m_A a g$ $(\sin(\theta_{\text{éq}}) = m_B R g$ s'écrit :

$$\left(J + m_A a^2 + m_B R^2\right) \ddot{\varepsilon} = -m_A a g \cos(\theta_{\text{éq}})\, \varepsilon$$

et donc :

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{m_A a g \cos(\theta_{\text{éq}})}{J + m_A a^2 + m_B R^2}\, \varepsilon = 0}$$

Cette équation ne peut être celle d'un oscillateur harmonique (OH) que si $\cos(\theta_{\text{éq}}) > 0$, ce qui n'est vérifié que pour $\theta_{\text{éq},1}$ (qui est donc **la seule position d'équilibre stable**). On aura donc au voisinage de $\theta_{\text{éq},1}$:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\, \varepsilon = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m_A a g \cos(\theta_{\text{éq},1})}{J + m_A a^2 + m_B R^2}}$$

et la période des petites oscillations est donc :

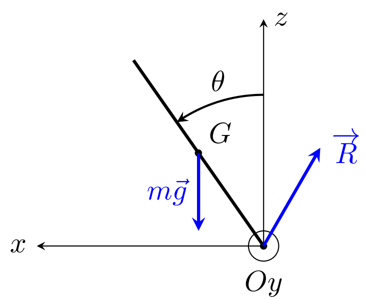
$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

4 Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et il est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = mL^2/3$.

1. *Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.*



L'arbre est un solide en rotation autour de l'axe fixe Oy, avec un vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e_y}$. Il est soumis à deux forces :

- Son poids $m\vec{g}$ appliqué en G (centre d'inertie). Son moment en O est donnée par :

$$\overrightarrow{M_O}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{L}{2}\,(\cos(\theta)\,\vec{e_z} + \sin(\theta)\,\vec{e_x}) \wedge (-mg)\,\vec{e_z}$$
$$= \frac{mgL}{2}\sin(\theta)\,\vec{e_y}$$

- La réaction du sol $\vec{R}$ appliquée en O. Son moment par rapport à O est donc nul.

Appliquons le théorème du moment cinétique (TMC) à l'arbre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En projection sur $\vec{e_y}$, il vient :

$$J\ddot{\theta} = \frac{mgL}{2}\sin(\theta) \iff \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin(\theta)}$$

2. *Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :*

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\,(\cos(\theta_0 - \cos(\theta))}$$

Multiplions l'équation précédente par $\dot{\theta}$ et intégrons :

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin(\theta)\,\dot{\theta} \implies \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = -\frac{3g}{2L}\frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}$$

ce qui entraîne :

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{L}\cos(\theta) + C$$

Les conditions initiales imposent $\dot{\theta} = 0$ lorsque $\theta = \theta_0$, ce qui permet de déterminer la constante C. Il vient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}\,(\,\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\,)$$

Comme $\dot{\theta} > 0$ pour ce mouvement, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\,(\,\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\,)}}$$

3. *Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra g = 10 m.s^{-2}. On donne, pour $\theta_0 = 5°$:*

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = 5{,}1$$

L'équation précédente est une **équation à variables séparables** (on rencontre ce type d'équation en cinétique chimique par exemple). Elle se met sous la forme :

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \int_0^{\tau} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3g}{L}}\,\tau$$

où τ est le temps de chute. On a donc :

$$\boxed{\tau = 5{,}1 \times \sqrt{\frac{L}{3g}} = 5{,}1 \text{ s}}$$