

Correction - DS n°3 - CCINP-e3a

1 Étude d'un cyclotron

1. On applique le principe fondamental de la
a) dynamique au proton, soumis à la seule force
électrique :

$$m \vec{a} = e \vec{E} = + e \frac{U_0}{d} \vec{a}_y \Rightarrow \ddot{y} = \frac{e U_0}{m d}$$

qui s'intègre en :

$$\dot{y} = \frac{e U_0}{m d} t \text{ et } y(t) = \frac{e U_0}{2 m d} t^2 - \frac{d}{2}$$

Rq : On peut aussi
appliquer un TEM
(plus rapide)

$$\bar{A} \text{ à } t_1 : y(t_1) = \frac{d}{2} \Rightarrow d = \frac{e U_0}{2 m d} t_1^2 \text{ et donc}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 m}{e U_0}} d \text{ et } v_1 = \dot{y}(t_1) = \sqrt{\frac{2 e U_0}{m}}$$

1.b) Il est nécessaire que $t_1 < T/2$ ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{2 m}{e U_0}} < \frac{T}{2 d} \Leftrightarrow \frac{8 m d^2}{e T^2} < U_0$$

$$\text{et donc } U_{\text{min}} = \frac{8 m d^2}{e T^2}$$

2. a) Seule la force magnétique $\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B}$
agit sur le proton. Comme $\vec{F} \perp \vec{v}$, le travail
de cette force est nul et, par le théorème de
l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_m) = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \text{cte}$$

2. b) On applique le principe fondamental de la
dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{F}_m = e (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) \wedge B \vec{e}_z \\ &= e B (-\dot{x} \vec{e}_y + \dot{y} \vec{e}_x) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{eB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{eB}{m} y - \frac{eB}{m} \frac{d}{2} \\ \dot{y} = -\frac{eB}{m} x + v_1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

En substituant \dot{y} , on obtient :

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = \frac{eB}{m} v_1 \quad \text{on peut poser } \omega = \frac{eB}{m} \quad (\text{pulsation cyclotron})$$

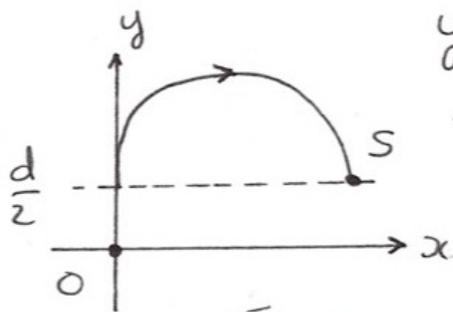
Solution : $x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + \frac{v_1}{\omega}$

CI $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -v_1/\omega \\ \omega\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \end{cases}$

d'où $x(t) = \frac{v_1}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$

puis : $y(t) = \frac{\dot{x}}{\omega} + \frac{d}{2} = \frac{v_1}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{d}{2}$

2.c) la trajectoire du proton est alors en arc de cercle.



$$y_S = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{v_1}{\omega} \sin(\omega t_S) = 0$$

et donc $\omega t_S = \pi$ d'où

$$t_S = \frac{m\pi}{eB}$$

rayon
↓

On en déduit que $x_S = x(t_S) = \frac{2v_1}{\omega} = 2R$

3.a) De façon générale, le rayon de la trajectoire est donné par :

$$\underline{R\omega = v} \quad \text{avec } \omega = \frac{eB}{m}$$

3.b) Le proton parcourt un demi-cercle à vitesse constante en norme (égale à v). On a donc :

$$v \Delta t = \pi R \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{m\pi}{eB}$$

Cette durée est constante indépendante du rayon de la trajectoire. Pour que Δt soit parfaitement synchronisée avec la période du champ électrique il faut que :

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad (\text{puisque l'on néglige la durée des phases d'accélération})$$

3.c. A chaque accélération, le champ électrique effectue un travail moteur :

$$\frac{1}{2} m v_{n+1}^2 - \frac{1}{2} m v_n^2 = \underbrace{e E x d}_{\text{travail d'une force constante}} = e U_0$$

d'où

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2eU_0}{m}$$

Vérifions le résultat demandé par l'énoncé au moyen d'une démonstration par récurrence

- $v_1 = \sqrt{1} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ est vraie car c'est le résultat de la question 1.

- Supposons que $v_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ soit vraie. Alors

$$v_{n+1}^2 = n \frac{2eU_0}{m} + \frac{2eU_0}{m} = (n+1) \frac{2eU_0}{m}$$

et donc $v_{n+1} = \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ ce qui montre que l'expression est vraie à l'ordre $n+1$.

En conclusion : $v_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ est vraie pour tout $n \geq 1$ (et même $n \geq 0$)

4. Après N accélérations, la vitesse est v_N et le rayon de la trajectoire est :

$$R_N = \frac{qv_N}{\omega} = \frac{m}{eB} \sqrt{N} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

or Pour $R_N = R_{\max}$, $v_N = v_{ej} = \omega R_{\max}$
donc

$$v_{ej} = \frac{eB}{m} R_{\max} \stackrel{AN}{=} 40 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

) On a aussi :

$$R_{\max} = \frac{m}{eB} \sqrt{N} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{\sqrt{N}}{B} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}}$$

donc

$$N = \frac{R_{\max}^2 B^2 e}{2mU_0} \stackrel{AN}{=} 8290$$

Il y a donc 8290 accélérations, donc 8290 $\frac{1}{2}$ tours ou encore 4145 tours complets.

Rem v_{ej} proche de $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$: l'utilisation de la mécanique relativiste peut être nécessaire

Calculons le temps mis pour arriver à cette vitesse :

$$\tau = N \Delta t = \frac{R_{\max}^2 B^2 e}{2mU_0} \times \frac{\pi R_{\max}}{eB} = \frac{\pi R_{\max}^2 B}{2U_0}$$

$$\stackrel{AN}{=} 52 \cdot 10^{-4} \text{ s. !!}$$

2 La structure interne de Jupiter (d'après e3a-MP-2020)

Électrostatique et gravitation universelle

16. La force d'interaction gravitationnelle exercée par une distribution de masse Σ sur un point matériel P de

masse m : $\boxed{\vec{F}_{\Sigma \rightarrow P} = m \vec{G}(P)}$.

17. On donne :

- Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$.

Les masses sont des **grandeurs positives** donc la force d'interaction gravitationnelle est **toujours attractive** contrairement aux charges électriques pouvant être de même signe ou de signes contraires entraînant que la force d'interaction électrique peut être **répulsive** ou **attractive**.

18. L'équation $\text{rot } \vec{G} = \vec{0}$ assure que \vec{G} **dérive d'un potentiel gravitationnel** Φ .

Dans ce cas de figure : $\boxed{\vec{G} = -\text{grad } \Phi}$.

Sachant que $\Delta \Phi = \text{div}(\text{grad } \Phi)$ soit $\Delta \Phi = -\text{div } \vec{G}$ donc $\boxed{\Delta \Phi = 4\pi \mathcal{G} \rho}$.

19. Énoncé du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée et orientée (Σ_G) est égale au rapport de la charge électrique intérieure à cette surface et de la permittivité du vide ϵ_0 soit

$$\boxed{\oiint_{M \in \Sigma_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}_M = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} .$$

Sachant que l'analogie de $\frac{1}{\epsilon_0}$ est $-4\pi \mathcal{G}$ et l'analogie de la charge électrique est la masse, le théorème de

Gauss pour la gravitation stipule $\boxed{\oiint_{M \in \Sigma_G} \vec{G}(M) \cdot \vec{dS}_M = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}}$.

Distribution sphérique de masse non homogène

20. La distribution des masses étant **invariante par toute rotation d'axe passant par O**, \vec{G} ne dépend que de r .

Tout plan contenant la droite (M) est **plan de symétrie** de la distribution des masses donc \vec{G} est radial.

En conclusion : $\vec{G}(M) = -G(r)\vec{u}_r$ où $G(r) > 0$.

21. La masse δm d'une coquille sphérique de rayon compris entre r et $r + dr$ étant : $\delta m = \rho(r) \times 4\pi r^2 dr$

alors $M(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r') r'^2 dr'$ sous réserve d'une distribution de masse à **répartition sphérique** de masse.

22. La surface de Gauss étant une sphère de centre O et de rayon $r > R$: $M_{\text{int}} = M_J = \int_0^{R_J} 4\pi \rho(r) r^2 dr$: masse de Jupiter.

On en déduit l'expression du champ gravitationnel à l'extérieur de la planète : $G(r)4\pi r^2 = 4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$ donc

$$G(r) = \mathcal{G} \frac{M_J}{r^2}.$$

Le graphe de $r \mapsto G(r)$ pour $r \geq R_J$:

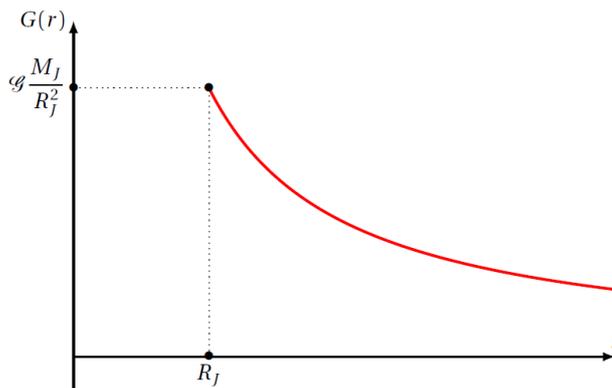


FIGURE 2 – Tracé du graphe $r \mapsto G(r)$ pour $r \geq R_J$

Sachant que $\vec{G} = -\text{grad}\Phi$ alors $G(r) = \frac{d\Phi}{dr}$ donc pour $r \geq R_J$: $\Phi(r) = -\mathcal{G} \frac{M_J}{r}$ avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = 0$.

23. Chaque particule de fluide possédant dans le référentiel jupiterocentrique un mouvement circulaire uniforme de rayon $r' = r \sin \theta$ alors l'accélération du centre d'inertie de cette particule de fluide est **centripète**

et a pour expression $\vec{a}_{P/\mathcal{R}} = -\omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta \vec{u}_{r'}$ où $\vec{u}_{r'}$ est le vecteur radial des coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) .

24. Le référentiel lié à Jupiter n'est pas galiléen car en mouvement de rotation d'axe (O, \vec{u}_z) par rapport au référentiel jupiterocentrique galiléen.

Chaque particule de fluide est donc soumise en particulier à la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{\delta F_{ie}} = -\delta m \overrightarrow{a_{P|\mathcal{R}}}$ soit $\overrightarrow{\delta F_{ie}} = +\rho \omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta d\tau \overrightarrow{u_{r'}}$.

Cette force étant **axifuge** et de norme d'autant plus importante que la particule de fluide est éloignée de l'axe de rotation, l'effet de cette force sera davantage ressenti par les particules de fluide situées au niveau de l'équateur et cet effet sera nul pour les particules de fluides situées aux pôles.

En adoptant un modèle élastique de la planète Jupiter, cette force est responsable d'un écrasement de la planète aux pôles et d'un allongement de celle-ci au niveau de l'équateur. D'où la forme ellipsoïdale de la planète.

25. Si Jupiter était assimilable en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme, alors $I = \frac{8\pi}{15} \times \frac{3}{4\pi} \frac{M_J}{R_J^3} \times R_J^5 = \frac{2}{5} M_J R_J^2$ et donc $K = \frac{2}{5}$.

26. La connaissance de K permettra d'obtenir une première indication sur la répartition des masses à l'intérieur de Jupiter. Par exemple, si $K < \frac{2}{5}$, la matière est davantage concentrée au centre de la planète.

27. On pose $g(x) = x^2 \exp\left(-\frac{mx^2}{2k_B T}\right)$ alors $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{mx^3}{k_B T} = 0$ donc $x = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

La vitesse la plus probable d'agitation thermique est donc $v_c = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

28. La vitesse de libération à la surface de Jupiter est estimée selon $v_{\ell,J} = \sqrt{\frac{2GM_J}{R_J}}$.

Application numérique : Estimation des vitesses les plus probables :

- On prendra pour la température à la surface de la Terre : $T_{T,\text{surf}} = 293$ K ;
- On prendra pour la température à la surface de Jupiter : $T_{J,\text{surf}} = 170$ K (cf. **figure 6**).

	v_c (en m·s ⁻¹)	v_{ℓ} (en m·s ⁻¹)
Terre	Hydrogène : $v_{c,H} = 2,2 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,He} = 1,1 \cdot 10^3$	$v_{\ell,T} = 1,1 \cdot 10^4$
Jupiter	Hydrogène : $v_{c,H} = 1,7 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,He} = 8,4 \cdot 10^2$	$v_{\ell,J} = 6,0 \cdot 10^4$

On constate que l'**écart entre la vitesse la plus probable et la vitesse de libération** est plus important dans le cas de Jupiter que dans le cas de la Terre.

Cela signifie que la distribution des vitesses est davantage écartée du côté des valeurs élevées des vitesses dans le cas de la Terre et donc l'atmosphère de la Terre est moins riche en dihydrogène et en hélium gazeux que celle de Jupiter.

3 Champ créé par deux fils parallèles de charges opposées

1. On calcule tout d'abord le champ créé par un fil infini avec le théorème de Gauss, puis le potentiel créé par une telle distribution, comme dans le cours. On obtient :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C$$

2. On utilise le théorème de superposition sachant que l'origine des potentiels est prise en O , c'est à dire en $r_{1,2} = a$:

$$V(M) = V_+(M) + V_-(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) + C_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + C_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

La constante $C_1 + C_2$ est nulle car l'origine des potentiels est choisie en O , c'est à dire pour $r_1 = r_2 = a$

3. (a) $r_2 = kr_1$.

- (b) $V_0 = 0$ correspond à $k = 1$, soit $r_1 = r_2$; cette surface équipotentielle correspond donc au plan médiateur xOz des deux fils.
- (c) $r_2^2 = k^2 r_1^2$, donc $(x+a)^2 + y^2 = k^2 [(x-a)^2 + y^2]$. Après calcul (voir page suivante), on obtient l'équation cartésienne suivante $\left[x + a \frac{(1+k^2)}{(1-k^2)}\right]^2 + y^2 = \frac{4a^2 k^2}{(1-k^2)^2}$. Cela correspond à l'équation d'un cercle dont le centre C_k a les coordonnées $(a \frac{(1+k^2)}{(1-k^2)}, 0)$, et dont le rayon vaut $R_k = \frac{2ka}{|1-k^2|}$.

Pour $V_0 > 0$, $k > 1$ (le point M décrivant le cercle est donc plus près fil situé en $x = +a$) et $x_{C_k} = -a \frac{(1+k^2)}{(1-k^2)} > 0$, ce qui est en accord avec le fait que le cercle soit plus proche du fil en $x = +a$, chargé positivement. C'est l'inverse si $V_0 < 0$.

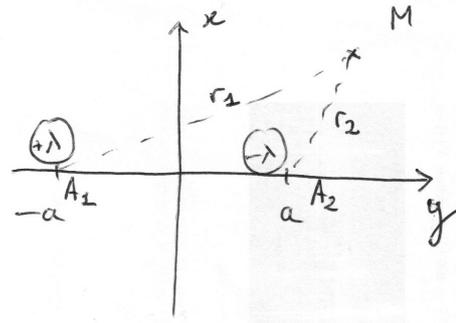
$$r_2 = k r_1 \quad (*)$$

or

$$r_2^2 = (x_M - x_{A_2})^2 + (y_M - y_{A_2})^2 + 0$$

$$= (x - a)^2 + y^2$$

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2$$



donc (*) $\Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = k^2 [(x + a)^2 + y^2]$

soit $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = k^2 [x^2 + 2ax + a^2 + y^2]$

$$\Rightarrow x^2(1 - k^2) + y^2(1 - k^2) - 2ax(1 + k^2) = a^2(k^2 - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2a \frac{(1 + k^2)}{(1 - k^2)} x + y^2 = a^2 \frac{(k^2 - 1)}{1 - k^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - a \frac{(1 + k^2)}{1 - k^2} \right)^2 - a^2 \frac{(1 + k^2)^2}{(1 - k^2)^2} + y^2 = -a^2$$

$$\Rightarrow \left[x - a \frac{(1 + k^2)}{1 - k^2} \right]^2 + y^2 = a^2 \left[\frac{(1 + k^2)^2 - 1}{(1 - k^2)^2} \right]$$

$$\frac{1 + 2k^2 + k^4 - (1 - 2k^2 + k^4)}{(1 - k^2)^2} = \frac{4k^2}{(1 - k^2)^2}$$

$$\Rightarrow (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

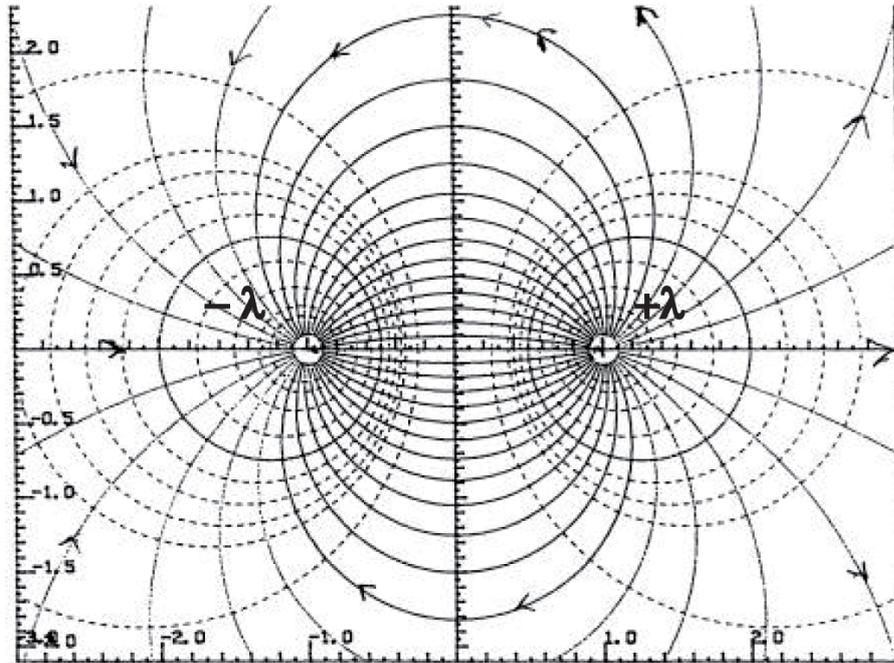
Equation d'un cercle de centre $C \left(a \frac{(1 + k^2)}{(1 - k^2)}, 0 \right)$ et de rayon

$$R = \frac{4|k|}{|1 - k^2|} = \frac{4k}{|1 - k^2|} \quad \text{car } k > 0$$

(d) Cette figure ressemble à la carte de champ d'un dipôle. On a utilisé les propriétés suivantes pour le tracé :

- les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles ;
- localement les lignes de champ divergent des charges positives et convergent vers les charges négatives ;

- le plan médiateur aux deux fils est un plan d'antisymétrie et les lignes de champ sont orthogonales à ce plan en chacun de ses points.
- le plan perpendiculaire aux fils est un plan de symétrie et le champ électrique est donc contenu dans ce plan en chacun de ces points (aucune ligne de champ ne vient traverser la figure) ;
- le plan contenant les deux fils est également un plan de symétrie, et les lignes de champ sont donc symétriques à ce plan en tout point de l'espace.



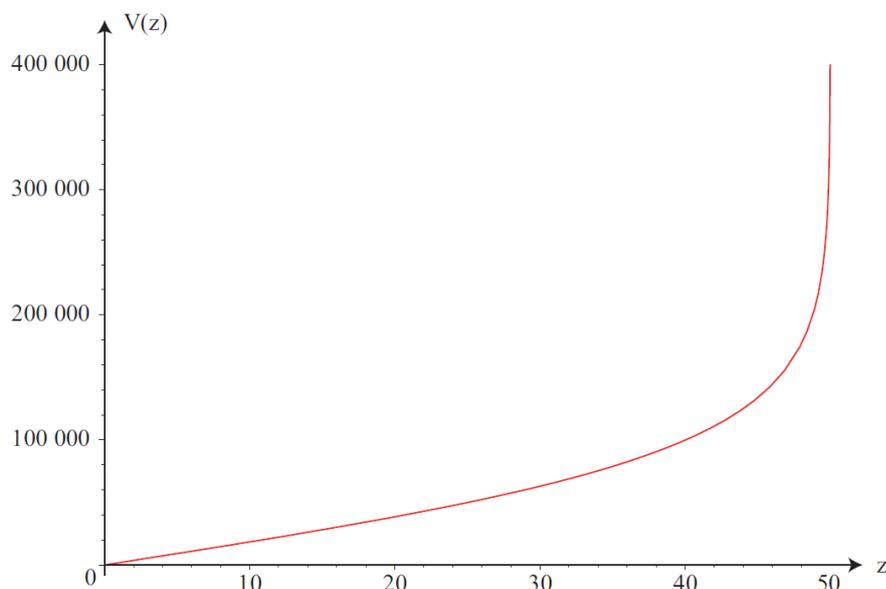
4. (a) En se limitant au plan contenant les deux fils, on se ramène au cas précédent en prenant $r_1 = h + z$ (écart par rapport au fil chargé $+\lambda$) et $r_2 = h - z$, donc :

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{h+z}{h-z} \right)$$

- (b) On peut donc écrire $V(z = h - r_1) = V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2h-r_1}{r_1} \right)$, donc finalement :

$$V(z) = V_1 \frac{\ln \left(\frac{h+z}{h-z} \right)}{\ln \left(\frac{2h-r_1}{r_1} \right)}$$

- (c) On en déduit le tracé du potentiel :



- (d) A deux mètres du sol, le potentiel vaut déjà $3.6kV$, ce qui est amplement suffisant pour allumer un tube fluorescent !

Remarque : On notera qu'un rapide calcul montre que cette tension est perceptible mais n'a pas de risque particulier pour le corps humain, dont la résistance (peau sèche) est de l'ordre de $1M\Omega$ et dont le seuil de danger est de l'ordre de $10mA$ puisqu'ici $i = \frac{U}{R} = 3,6mA$. Il ne faudrait cependant pas se trouver proche du câble, même sans le toucher, car la pente de la courbe est plus grande au voisinage de celui-ci. On peut par exemple penser qu'un grand oiseau pourrait s'électrocuter en passant très près d'une ligne à très haute tension, même sans toucher cette dernière. En revanche, ce phénomène est moins important pour un petit oiseau car la différence de potentiel est plus faible entre ses deux extrémités (on ne voit cependant jamais d'oiseaux posés sur les lignes très hautes tensions, et seulement sur les lignes à 20 kV...).