Plans de symétrie et plans d'antisymétrie d'une distribution de courants

1 Plan de symétrie d'une distribution de courants

Soit $R = (Oxyz)$ un repère d'espace tel que le plan (Oxy) soit plan de symétrie Π_{sym} d'une distribution de courants $\mathscr{D}_{\text{courants}}$.

En un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans R, plaçons une charge ponctuelle test q_T avec une vitesse :

$$\vec{v} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y} + v_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Soit :

$$\overrightarrow{B} = B_x(x,y,z)\,\overrightarrow{e_x} + B_y(x,y,z)\,\overrightarrow{e_y} + B_z(x,y,z)\,\overrightarrow{e_z} \overset{\text{noté}}{=} B_x\,\overrightarrow{e_x} + B_y\,\overrightarrow{e_y} + B_z\,\overrightarrow{e_z}$$

le champ magnétostatique créé par $\mathscr{D}_{\text{courants}}$ en ce point M. La force magnétique exercée sur la charge ponctuelle test a pour expression :

$$\overrightarrow{F_m} = q_T\,\vec{v} \wedge \overrightarrow{B} = q_T \begin{pmatrix} v_yB_z - v_zB_y \\ v_zB_x - v_xB_z \\ v_xB_y - v_yB_x \end{pmatrix} \tag{1}$$

Soit M' le point symétrique de M par rapport au plan de symétrie (Oxy) ; les coordonnées cartésiennes de M' dans R sont donc $(x, y, -z)$. Plaçons en M' la même charge ponctuelle test q_T avec une vitesse $\vec{v'} = \text{sym}/(Oxy)\,\vec{v}$, c'est à dire :

$$\overrightarrow{v'} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y} - v_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Le champ magnétostatique créé par $\mathscr{D}_{\text{courants}}$ en M' est :

$$\overrightarrow{B'} = B_x(x,y,-z)\,\overrightarrow{e_x} + B_y(x,y,-z)\,\overrightarrow{e_y} + B_z(x,y,-z)\,\overrightarrow{e_z} \overset{\text{noté}}{=} B'_x\,\overrightarrow{e_x} + B'_y\,\overrightarrow{e_y} + B'_z\,\overrightarrow{e_z}$$

où B'_x, B'_y et B'_z sont trois inconnues dont on cherche à déterminer l'expression en fonction des trois composantes B_x, B_y et B_z.

La force magnétique exercée sur la charge ponctuelle test sera donnée par :

$$\overrightarrow{F'_m} = q_T\,\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{B'} = q_T \begin{pmatrix} v_yB'_z + v_zB'_y \\ -v_zB'_x - v_xB'_z \\ v_xB'_y - v_yB'_x \end{pmatrix} \tag{2}$$

Or, selon le principe de Curie, le vecteur force magnétique $\overrightarrow{F'_m}$ doit être le vecteur symétrique du vecteur $\overrightarrow{F_m}$ par rapport au plan (Oxy) : $\overrightarrow{F'_m} = \text{sym}/(Oxy)\,\overrightarrow{F_m}$. Compte-tenu de l'équation (1), $\overrightarrow{F'_m}$ doit donc s'écrire :

$$\overrightarrow{F'_m} = q_T \begin{pmatrix} v_yB_z - v_zB_y \\ v_zB_x - v_xB_z \\ -v_xB_y + v_yB_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

L'égalité des deux expressions (2) et (3) de $\overrightarrow{F'_m}$ doit être réalisée pour toutes valeurs du triplet (v_x, v_y, v_z), ce qui entraîne le système d'équations :

$$\forall\,(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} v_yB'_z + v_zB'_y & = & v_yB_z - v_zB_y \\ -v_zB'_x - v_xB'_z & = & v_zB_x - v_xB_z \\ v_xB'_y - v_yB'_x & = & -v_xB_y + v_yB_x \end{array} \right.$$

Examinons quelques cas particuliers :

- **1$^{\text{er}}$ cas** : $v_x = v_y = 0 = 0$ et $v_z \neq 0$.

  Le système se réduit à :

  $$\forall\, v_z \in \mathbb{R}^*,\ \begin{cases} v_z B'_y &= -v_z B_y \\ -v_z B'_x &= v_z B_x \end{cases}$$

  ce qui conduit à :

  $$\boxed{B'_x = -\,B_x \quad \text{et} \quad B'_y = -\,B_y}$$

- **2$^{\text{ème}}$ cas** : $v_x \neq 0$, $v_y \neq 0$ et $v_z = 0$.

  Compte-tenu des résultats précédents, après substitution de B'_x et B'_y, le système se réduit à :

  $$\forall\,(v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0),\ \begin{cases} v_y B'_z &= v_y B_z \\ -v_x B'_z &= -v_x B_z \\ -v_x B_y + v_y B_x &= -v_x B_y + v_y B_x \end{cases}$$

  La dernière équation n'apporte rien et les deux premières conduisent à :

  $$\boxed{B'_z = B_z}$$

En conclusion, le champ magnétostatique au point M' se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B}(M') &= B'_x\, \overrightarrow{e_x} + B'_y\, \overrightarrow{e_y} + B'_z\, \overrightarrow{e_z} = -B_x\, \overrightarrow{e_x} - B_y\, \overrightarrow{e_y} + B_z\, \overrightarrow{e_z} \\ &= -\,(B_x\, \overrightarrow{e_x} + B_y\, \overrightarrow{e_y} - B_z\, \overrightarrow{e_z}) = -\,\text{sym}/(Oxy)\, \overrightarrow{B}(M) \end{aligned}$$

ces égalités devant être vérifiées pour tout point M de l'espace. On voit donc que le champ magnétostatique qui existe en M' est l'opposé du symétrique du champ qui existe en M. Nous pouvons donc conclure que :

> *Si une distribution de courant $\mathscr{D}_{\text{courants}}$ créant un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ admet un plan de symétrie Π_{sym}, alors ce plan est un plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{B}$.*

2 Plan d'antisymétrie d'une distribution de courants

Nous reprenons le même raisonnement en supposant maintenant que le plan (Oxy) est un **plan d'antisymétrie** Π_{Antisym} d'une distribution de courants $\mathscr{D}_{\text{courants}}$.

Le champ magnétostatique en M étant toujours noté :

$$\overrightarrow{B} = B_x\, \overrightarrow{e_x} + B_y\, \overrightarrow{e_y} + B_z\, \overrightarrow{e_z}$$

la force magnétique exercée sur une charge ponctuelle test q_T placée en M avec une vitesse $\vec{v} = v_x\, \overrightarrow{e_x} + v_y\, \overrightarrow{e_y} + v_z\, \overrightarrow{e_z}$ a toujours pour expression :

$$\overrightarrow{F_m} = q_T\, \vec{v} \wedge \overrightarrow{B} = q_T \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si M' est le point symétrique de M par rapport au plan d'antisymétrie (Oxy), la même charge ponctuelle test q_T avec une **vitesse symétrique** $\vec{v}' = \text{sym}/(Oxy)\, \vec{v}$ subira la force magnétique :

$$\overrightarrow{F'_m} = q_T\, \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{B'} = q_T \begin{pmatrix} v_y B'_z + v_z B'_y \\ -v_z B'_x - v_x B'_z \\ v_x B'_y - v_y B'_x \end{pmatrix} \tag{5}$$

Or, selon le principe de Curie, le vecteur force magnétique $\overrightarrow{F'_m}$ doit être **l'opposé du vecteur symétrique** du vecteur $\overrightarrow{F_m}$ par rapport au plan (Oxy) : $\overrightarrow{F'_m} = -\,\mathrm{sym}/(Oxy)\,\overrightarrow{F_m}$ et doit donc s'écrire :

$$\overrightarrow{F'_m} = q_T \begin{pmatrix} -v_y B_z + v_z B_y \\ -v_z B_x + v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \tag{6}$$

L'égalité des deux expressions (5) et (6) de $\overrightarrow{F'_m}$ conduit au système d'équations :

$$\forall\,(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3,\; \left\{ \begin{array}{lcl} v_y B'_z + v_z B'_y & = & -v_y B_z + v_z B_y \\ -v_z B'_x - v_x B'_z & = & -v_z B_x + v_x B_z \\ v_x B'_y - v_y B'_x & = & v_x B_y - v_y B_x \end{array} \right.$$

Reprenons les mêmes cas particuliers qu'à la section précédente :

- **1**$^{\text{er}}$ **cas** : $v_x = v_y = 0 = 0$ et $v_z \neq 0$.

  Le système se réduit à :

  $$\forall\, v_z \in \mathbb{R}^*,\; \left\{ \begin{array}{lcl} v_z B'_y & = & v_z B_y \\ -v_z B'_x & = & -v_z B_x \end{array} \right.$$

  ce qui conduit à :

  $$\boxed{B'_x = B_x \quad \text{et} \quad B'_y = B_y}$$

- **2**$^{\text{ème}}$ **cas** : $v_x \neq 0$, $v_y \neq 0$ et $v_z = 0$.

  Après substitution de B'_x et B'_y, le système se réduit à :

  $$\forall\,(v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0),\; \left\{ \begin{array}{lcl} v_y B'_z & = & -v_y B_z \\ -v_x B'_z & = & v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x & = & v_x B_y - v_y B_x \end{array} \right.$$

  ce qui impose :

  $$\boxed{B'_z = -\,B_z}$$

En conclusion, le champ magnétostatique au point M' se met maintenant sous la forme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B}(M') &= B'_x\,\overrightarrow{e_x} + B'_y\,\overrightarrow{e_y} + B'_z\,\overrightarrow{e_z} = B_x\,\overrightarrow{e_x} + B_y\,\overrightarrow{e_y} - B_z\,\overrightarrow{e_z} \\ &= \mathrm{sym}/(Oxy)\,\overrightarrow{B}(M) \end{aligned}$$

ces égalités devant être vérifiées pour tout point M de l'espace. On constate désormais que le champ magnétostatique qui existe en M' est le **symétrique** du champ qui existe en M. Nous pouvons donc conclure que :

> *Si une distribution de courant $\mathscr{D}_{\text{courants}}$ créant un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ admet un plan d'antisymétrie Π_{Antisym}, alors ce plan est un plan de symétrie de $\overrightarrow{B}$.*