

**DS n°3 (CCP - e3a)**  
(Samedi 9 novembre 2024 - Durée 4h)

*L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les efforts d'explication (schémas) seront valorisés.*

## 1 ÉTUDE D'UN CONDENSATEUR

Donnée :  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

### PARTIE A. – ÉTUDE D'UN MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE

Un microphone électrostatique (Figure 1) est constitué d'une membrane  $P_1$  de surface  $S$ , extrêmement légère de masse  $m_e$ . Celle-ci, réalisée en métal (ou en polyester rendu conducteur par un saupoudrage de métal), est mobile et constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'espace entre la membrane  $P_1$  et l'armature fixe  $P_2$  est entièrement rempli d'air de permittivité électrique  $\varepsilon_0$ . Au repos, la distance entre les deux armatures parallèles est notée  $e$ . En mouvement, la liaison entre l'isolant et la membrane peut être modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur  $k_e$ .

Les variations de pression provoquées par l'onde sonore font varier la distance entre les deux armatures par un déplacement de la membrane parallèlement à l'axe  $Ox$ . Ce déplacement induit une variation de la capacité et cet effet est exploité dans le circuit électrique de la Figure 1 de manière à récupérer le signal  $u(t)$  aux bornes de la résistance  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . Les variations de  $u(t)$  sont à l'image de celles de la pression acoustique

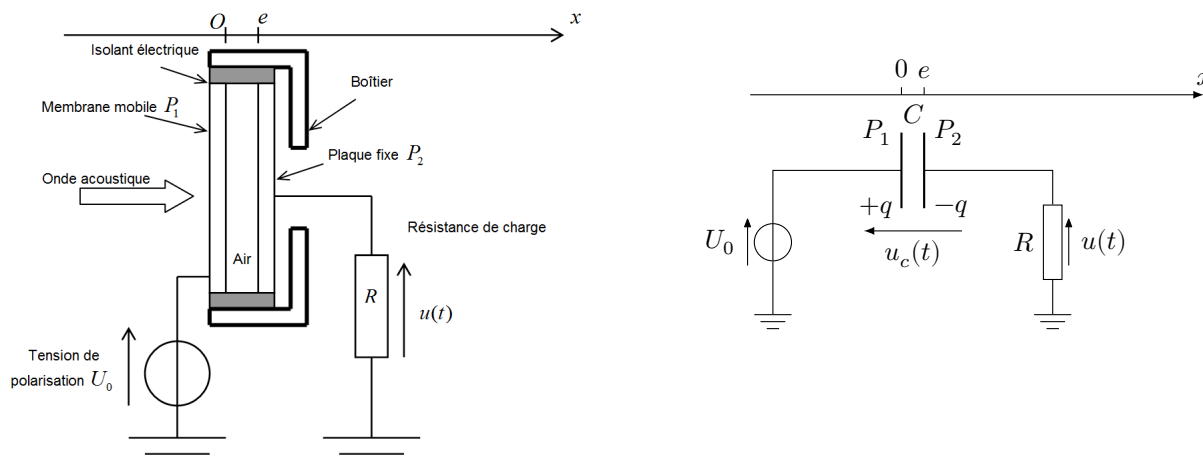


FIGURE 1 – Microphone électrostatique

La membrane  $P_1$  et l'armature fixe  $P_2$  sont assimilées à des plans chargés uniformément par les charges  $+q$  et  $-q$ . On associe à  $P_1$  et  $P_2$  les densités surfaciques uniformes de charges  $+\sigma = +q/S$  pour  $-\sigma = -q/S$  pour  $P_2$ . De plus, on assimile les deux plaques à des plans infinis afin de négliger par la suite les effets de bord.

### I. Capacité du condensateur au repos

- 1) Montrer, par des considérations de symétrie et d'invariance, que le champ électrique  $\vec{E}_1(M)$  créé par la plaque  $P_1$  en tout point de l'espace est perpendiculaire à ce plan et ne dépend que d'une variable d'espace.
- 2) Justifier que  $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$  où  $M$  et  $M'$  sont deux points placés symétriquement par rapport au plan  $P_1$ .
- 3) En appliquant le théorème de Gauss sur une surface clairement indiquée, exprimer le champ électrique  $\vec{E}_1(M)$ .
- 4) Dédire du résultat précédent l'expression du champ électrique total  $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$  créé par les deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  en tout point de l'espace.
- 5) Montrer que la différence de potentiel  $u_C = V_{P_1} - V_{P_2}$  entre les deux plaques peut se mettre sous la forme  $u_C = \frac{q}{C_0}$ , où  $C_0$  est la capacité du condensateur au repos. Déterminer l'expression de  $C_0$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $S$  et  $e$ .

### II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armature du condensateur

On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique  $\mathcal{P}$  parallélépipédique d'épaisseur  $d < e$ , de même surface  $S$  que  $P_1$  et  $P_2$  et parallèle aux armatures du condensateur (Figure 2). Les effets de bords sont toujours négligés et, du point de vue des symétries, on pourra considérer que  $P_1$ ,  $P_2$  et  $\mathcal{P}$  sont d'extension infinie selon  $Oy$  et  $Oz$ .

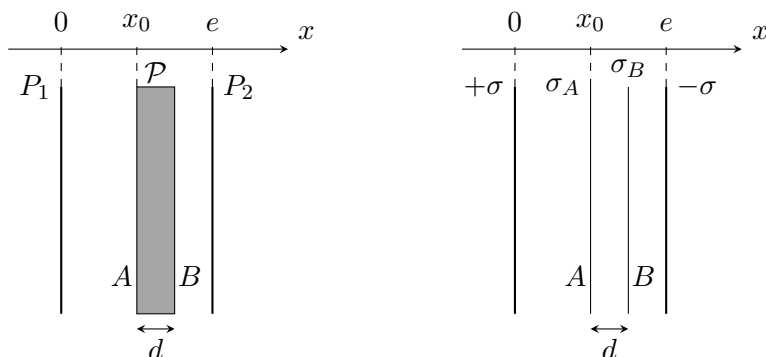


FIGURE 2 – Introduction d'une plaque entre les armatures

Avant son introduction dans le condensateur, la plaque métallique  $\mathcal{P}$  n'est pas chargée. Cependant, sous l'influence du champ électrique du condensateur, les électrons de conduction de  $\mathcal{P}$  vont se déplacer et venir s'accumuler sur l'une des faces ( $A$  ou  $B$  sur le schéma), créant ainsi une distribution de charges surfacique. Il y a alors un défaut d'électrons sur la face opposée, ce qui est équivalent à une distribution surfacique de charges de signe opposé.

Un état d'équilibre finit par s'installer où les charges s'immobilisent dans le référentiel d'étude. L'ensemble condensateur et plaque se comporte alors comme quatre plans infinis comme indiqué sur la Figure 2, avec des densités surfaciques  $+\sigma$ ,  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  et  $-\sigma$ .

- 1) Préciser les signes des densités  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$ . Quelle est la relation entre  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  ?
- 2) On admet que les charges se répartissent sur les deux faces  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}$  de sorte à ce que le champ électrostatique total  $\vec{E}(x)$  soit nul dans  $\mathcal{P}$ , c'est à dire pour  $x_0 \leq x \leq x_0 + d$ .

Déterminer l'expression de  $\vec{E}(x)$  pour  $x_0 \leq x \leq x_0 + d$  et en déduire la relation entre  $\sigma_A$  et  $\sigma$ .

- 3) Déterminer l'expression du champ électrostatique pour  $x \in [0, x_0]$  d'une part et pour  $x \in [x_0 + d, e]$  d'autre part, en fonction de  $\sigma$  et de  $\varepsilon_0$ . En déduire la différence de potentiel  $u_c = V(x = 0) - V(x = e)$  entre les deux armatures du condensateur, en fonction de  $\sigma$ ,  $e$ ,  $d$  et  $\varepsilon_0$ .
- 4) En déduire la capacité  $C'$  du condensateur ainsi obtenu (avec la plaque métallique). On exprimera  $C'$  en fonction de  $e$ ,  $d$ ,  $S$  et  $\varepsilon_0$ . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité du condensateur.

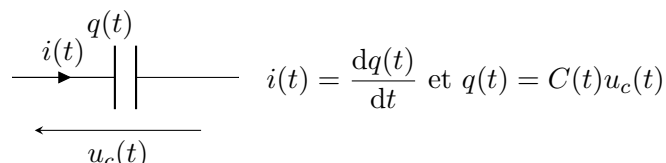
### III. Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal

On revient dans cette partie à la configuration du condensateur plan étudié dans la partie **I.**, sans plaque métallique. Lorsque celui-ci est au repos (écartement  $e$  entre les armatures), sa capacité est  $C_0$  déterminée à la question **I.5**).

En raison du passage d'une onde acoustique créant surpression sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , la membrane mobile  $P_1$  oscille autour de sa position d'équilibre  $O$  selon l'équation  $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$  avec une amplitude de déplacement  $X_1 \ll e$ . On admet que l'expression de la capacité obtenue à la question **I.5**) reste valable à condition de remplacer l'épaisseur  $e$  par  $e + x_1(t)$ .

- 1) À l'aide d'un développement limité, montrer que la capacité  $C(t)$  du condensateur s'exprime par  $C(t) = C_0 - C_1 \cos(\omega t)$ . Préciser l'expression de  $C_1$  en fonction de  $C_0$ ,  $X_1$  et  $e$ .

La Figure 3 rappelle les équations caractéristiques reliant l'intensité électrique  $i(t)$  traversant un condensateur, la charge électrique  $q(t)$  sur son armature, la tension  $u_c(t)$  à ses bornes et sa capacité  $C(t)$  :



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{i(t)} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \xleftarrow{u_c(t)}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } q(t) = C(t)u_c(t)$$

FIGURE 3 – Relations générales entre  $i$ ,  $q$ ,  $u_c$  et  $C$  pour un condensateur.

- 2) a) Quelle est la relation entre  $i(t)$ ,  $u_c(t)$  et  $C(t)$  ?  
 b) On note  $u(t)$  la tension aux bornes de la résistance  $R$  et  $U_0$  la tension constante délivrée par le générateur sur le schéma électrique de la Figure 1. Établir la relation liant  $u(t)$ ,  $U_0$ ,  $R$  et  $C(t)$ .
- 3) En déduire, en précisant les approximations faites, l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de la tension  $u(t)$  sous la forme

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{U_0 X_1}{e} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC_0}$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ .

- 4) Exprimer l'amplitude  $U$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $X_1$ ,  $e$  et  $U_0$ .

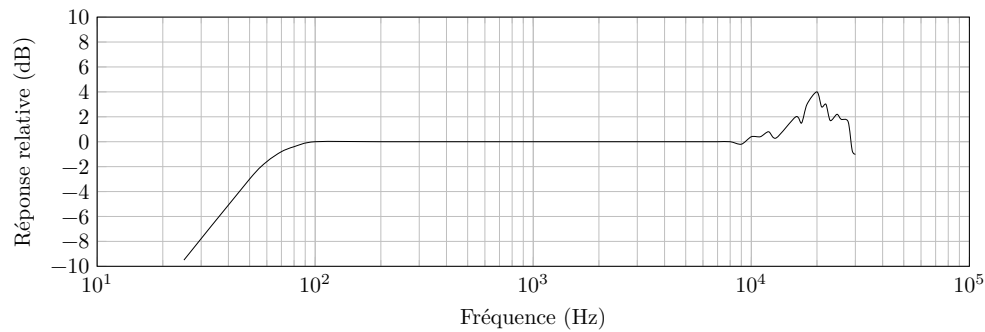


FIGURE 4 – Réponse du microphone électrostatique en fonction de la fréquence :  $20 \log U$  en fonction de la fréquence (échelle logarithmique)

- 5) Montrer qu'en dessous de 10 kHz le graphe  $20 \log U$  en fonction de  $\omega$  est compatible avec la réponse relative du microphone en fonction de la fréquence donnée Figure 4.
- 6) Estimer alors l'ordre de grandeur de  $C_0$ .

Le modèle étudié précédemment ne prend pas en considération le couplage électromécanique du système dans les hautes fréquences. Celui-ci, devient prépondérant au-delà de 10 kHz, la réponse du microphone présente alors une résonance causée par les oscillations mécaniques de la membrane au voisinage de sa position d'équilibre.

- 7) Donner un ordre de grandeur de  $\sqrt{k_e/m_e}$ .

## 2 À propos de mécanique dans le film "Fast and Furious"

Ce sujet aborde diverses questions de physique librement inspirées d'un article de la N.S.T.A. (National Science Teaching Associationaux Etats-Unis) qui traite de la vraisemblance scientifique de certaines scènes de la saga cinématographique "Fast and furious".

### Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

Dans l'épisode 5 de la série, on voit les héros du film voler un coffre-fort conteneur (contenant le butin d'un trafiquant de drogue) en l'accrochant par des filins à deux voitures de course. Nous allons étudier si cette scène est compatible avec les lois de la physique. **Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.**



FIGURE 5 – Course-poursuite dans les rues de Rio.

On suppose que la course-poursuite s'effectue à la vitesse  $V$  constante dans le référentiel terrestre ( $\mathcal{R}_T$ ), supposé galiléen. Ce référentiel est muni d'un repère  $(Oxyz)$  où  $Oz$  est l'axe vertical ascendant et d'une base orthonormale directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On note  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.

Dans le film il y a deux voitures, chacune de masse  $m_1$ , mais, dans le but de simplifier le problème, l'étude est ramenée à une seule voiture de masse  $m = 2m_1$  tirant le conteneur de masse  $m_0$  en ligne droite, sur route horizontale (axe  $Ox$ ), grâce à un filin horizontal que l'on supposera sans masse. Le schéma de ce dispositif est donnée sur la Figure 2.

On entend par voiture l'ensemble carrosserie, roues, moteur, conducteur. Le plan  $(Oxz)$ , vertical contenant le filin, est plan de symétrie de l'ensemble {voiture, filin, conteneur}. On suppose ainsi que toutes les actions mécaniques sont décrites par des forces coplanaires ramenées dans ce plan. Ainsi, la paire de roues arrières est remplacée par une seule roue au contact avec le bitume en  $I_1$ . Il en est de même pour la paire de roues avant en  $I_2$ . On donne la valeur de l'empattement  $I_1I_2 = 2b$ .

Les réactions exercées par la chaussée sur le conteneur et sur les roues sont décrites :

- pour le conteneur par :  $\vec{R}_0 = -T_0 \vec{e}_x + N_0 \vec{e}_z$  ;
- pour la roue arrière :  $\vec{R}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$  appliquée en  $I_1$  ;
- pour la roue avant :  $\vec{R}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$  appliquée en  $I_2$ .

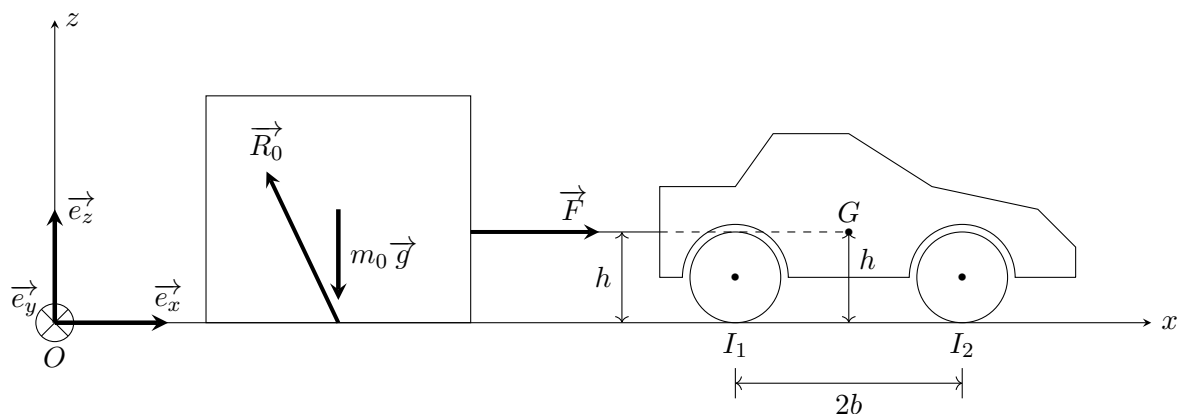


FIGURE 6 – Schéma de l'ensemble conteneur, filin, voiture.

On note  $f_0$  le coefficient de frottement dynamique au contact métal/bitume (pour le conteneur) et  $f_s$  le coefficient de frottement statique pour le contact pneu/bitume.

Le filin, accroché horizontalement à une hauteur  $h$  au-dessus de la chaussée, exerce une force de traction  $\vec{F}$  sur le conteneur. Les actions mécaniques subies par le conteneur sont représentées sur la Figure 2.

Les roues de la voiture sont munies de pneus en caoutchouc. On note  $d$  le diamètre des roues et  $J$  leur moment d'inertie par rapport à leurs axes de symétrie respectifs. La voiture étant une traction-avant, on note  $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_y$  le moment des forces exercées par le moteur sur la roue avant ( $\Gamma_m > 0$ ).

Dans tout le problème on négligera les frottements de l'air.

- 1) Reproduire la Figure 6 et la compléter en indiquant toutes les actions mécaniques extérieures subies par la voiture.
- 2) En appliquant le théorème du centre d'inertie au conteneur et à l'aide d'une loi sur le frottement solide à préciser, obtenir l'expression de  $\vec{F}$  en fonction de  $f_0$ ,  $m_0$ ,  $g$  et  $\vec{e}_x$ .
- 3) On suppose qu'aucune roue ne glisse sur la chaussée. On admet alors que les actions de contact chaussée/roues ne dissipent ni ne fournissent aucune puissance aux roues. De plus, on néglige la masse des roues devant la masse de la carrosserie, du moteur et du conducteur. L'énergie cinétique  $E_c$  de la voiture dans le référentiel terrestre est donc celle du système { carrosserie + moteur + conducteur }. On admettra la loi suivante :

$$\left( \frac{dE_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = P_m + \sum P(\vec{F}_{\text{ext}})$$

où  $P_m$  est la puissance fournie par le moteur et  $\sum P(\vec{F}_{\text{ext}})$  est la somme des puissances des forces appliquées par le milieu extérieur sur la voiture.

- a) En déduire la relation entre la puissance de  $\vec{F}$  et la puissance  $P_m$  fournie par le moteur.
- b) Calculer  $P_m$  en kilowatt et en cheval-vapeur. Le choix de deux voitures dans cette mise en scène vous semble-t-il réaliste ?

- 4) a) Rappeler la loi du moment cinétique scalaire appliquée à un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. On précisera tous les termes et notations introduits.
- b) Recenser toutes les actions mécaniques (résultantes ou moments) s'exerçant sur la roue arrière, puis sur la roue avant.
- c) On suppose chaque roue en liaison pivot parfaite avec le reste de la voiture. Dans le référentiel de la carrosserie, la roue arrière a une vitesse angulaire  $\omega_1$  constante et la roue avant une vitesse angulaire  $\omega_2$  constante.

En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire à chaque roue dans le référentiel de la carrosserie, par rapport à des axes à préciser, montrer que  $T_1 = 0$  et que  $\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}$

- 5) a) Montrer que  $\vec{F} = T_2 \vec{e}_x$ .
- b) En déduire  $\Gamma_m$  et faire l'application numérique.
- 6) La loi du moment cinétique scalaire appliquée à la voiture par rapport à l'axe  $(G, \vec{e}_y)$  ( $G$  étant le centre d'inertie de la voiture) permet de montrer que  $(N_1 - N_2)b = T_2 h$  (cf. figure 6).
- a) Pourquoi le couple  $\Gamma_m$  n'intervient-il pas dans ce résultat ?
- b) En déduire  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $f_0$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $m_0$  et  $g$ .
- 7) Les lois de Coulomb sur le frottement solide permettent d'assurer que les roues ne glissent pas sur la chaussée si  $|T_k| < f_s N_k$  avec  $k \in \{1, 2\}$ .
- a) Quelle roue risque de glisser ?
- b) Montrer qu'un tractage sans glissement des roues impose une masse maximale tractable

$$m_{0,\max} = m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 + f_s \frac{h}{2b}\right)}$$

- c) Faire l'application numérique. Commenter le résultat trouvé.
- 8) Lors de la préparation de leur plan, un des protagonistes suggère d'utiliser des voitures à propulsion arrière.
- a) Quelles sont alors les expressions de  $T_1$  et de  $T_2$  ?
- b) En admettant que  $N_1$  et  $N_2$  trouvés à la question 7) sont inchangés, dire quelle roue risque de glisser dans ce cas.
- c) En déduire l'expression de la masse maximale tractable  $m'_{0,\max}$ .
- d) Faire l'application numérique et conclure si les héros peuvent ou non réussir cette opération de tractage.

### Données numériques :

Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$  ;

Masse du conteneur :  $m_0 = 4\,500 \text{ kg}$  ;

Masse totale des deux voitures :  $m = 3\,000 \text{ kg}$  ;

Diamètre des roues :  $d = 20 \text{ pouces}$  (1 pouce = 2,5 cm) ;

Empattement :  $2b = 2,7 \text{ m}$  ;

Hauteur du centre d'inertie  $G$  et du filin :  $h = 0,5 \text{ m}$  ;

Coefficient de frottement dynamique métal/bitume :  $f_0 = 0,4$  ;

Coefficient de frottement statique caoutchouc/bitume :  $f_s = 1,0$  ;

Vitesse lors de cette course poursuite :  $V = 190 \text{ km.h}^{-1}$  ;

Cheval-vapeur (unité de puissance) : 1 ch = 736 W