

**MP1 - Correction - DS n°3bis (CCS - Mines)**

**1 STRUCTURE INTERNE DE LA TERRE (d'après CCS-PSI-2024)**

A. Préliminaire : l'analogie électrostatique  
- gravitation

Q.16	électrostatique	gravitation
force $\vec{F} \propto 1/r^2$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_{12}$ q charge	$-G m_1 m_2 \frac{\vec{e}_{12}}{r^2}$ m masse
champs	$\vec{F} = q \vec{E}$ $\vec{E}$	$\vec{F} = m \vec{G}$ $\vec{G}$
constante	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$-4\pi G$

$\Rightarrow$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\rho$ : charge vol.	$\text{div } \vec{G} = -4\pi G \rho$ $\rho$ : masse vol.
th de GAUSS	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$

B. Un premier modèle géométrique fuste de la Terre

0.17



On utilise  $r$  quelconque à l'aide de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$

Le problème est à symétrie SPHÉRIQUE (invariant par toute rotation autour de  $O$ )

$$\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$$

$\Sigma$ : sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$

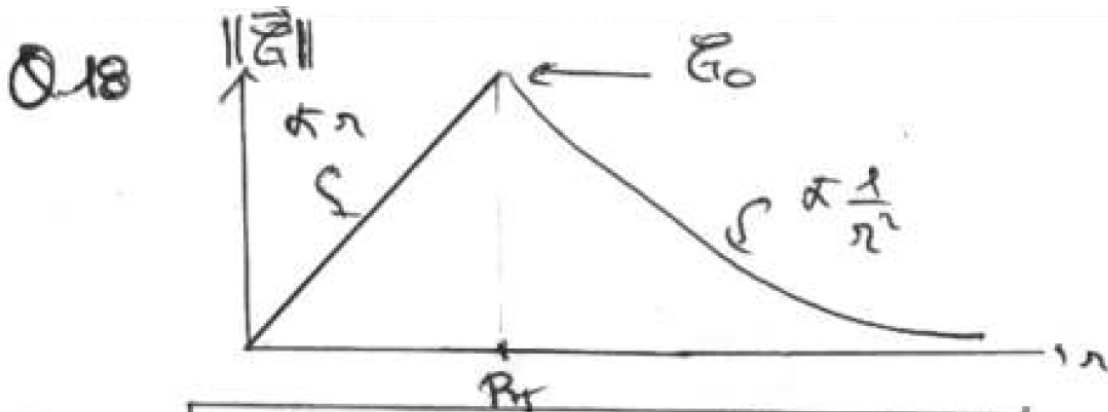
$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} E(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{S}\vec{e}_r = E(r) \underbrace{\oint_{\Sigma} dS}_{4\pi r^2} = E(r) 4\pi r^2$$

Si  $r < R_T$   $m_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$

Si  $r \geq R_T$   $m_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R_T^3 = M_T$

$\Rightarrow$   
Th de GAUSS

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$	$\vec{E}(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 r \vec{e}_r = -\frac{G M_T r}{R_T^3} \vec{e}_r$ <p style="text-align: center; margin: 0;"><math>\forall r \leq R_T</math></p>
	$\vec{E}(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 \frac{R_T^3}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{e}_r$ <p style="text-align: center; margin: 0;"><math>\forall r \geq R_T</math></p>



Q.19

$$E_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,972 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} = 9,814 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

C. Un second modèle (noyau + manteau) de la Terre

Q.20 D'après le th de GAUSS,  $E_0$  ne dépend que de  $M_T$  et  $R_T$  qui sont inchangés.

Voir fin du corrigé pour autre méthode \*

Q.21 On appelle l'équation de Maxwell-Gauss "gravitationnelle"

• pour  $r \leq R_2$   $E_T(r) = -E_0 \frac{r}{R_2}$  (car  $E_T < 0$ )

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 E_0 \frac{r}{R_2}) = -\frac{3E_0}{R_2} = -4\pi G \rho(r)$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{3E_0}{4\pi G R_2} = \text{cte}$$

• pour  $R_2 \leq r \leq R_T$   $E_T(r) = -E_0$

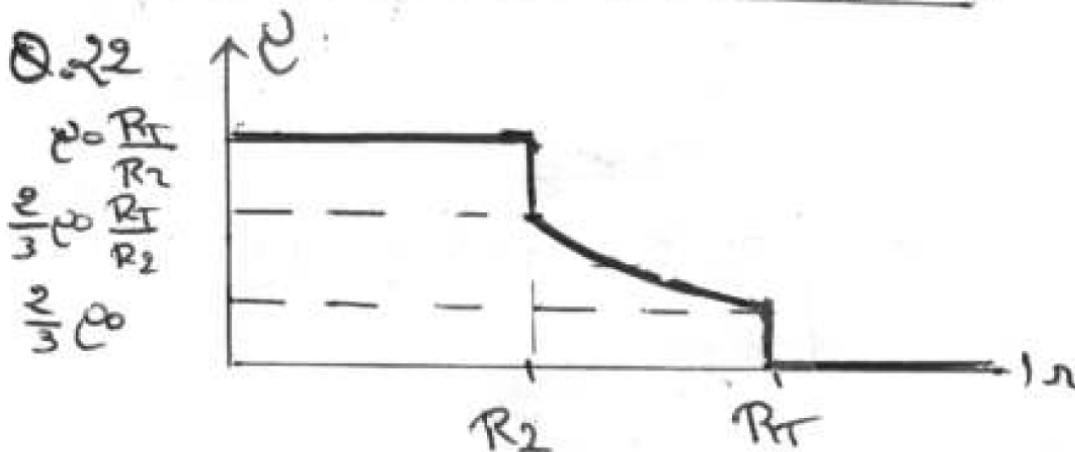
$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 E_0) = -\frac{2}{r} E_0 = -4\pi G \rho(r)$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{Q_0}{2\pi r z}$$

$$\text{or } Q_0 = \frac{G\pi r}{R_T^2} = \frac{G}{R_T^2} \frac{4}{3}\rho_0\pi R_T^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 G R_T$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \rho_0 \frac{R_T}{R_2} \text{ pour } r < R_2$$

$$\text{et } \rho(r) = \frac{\pi r}{2\pi R_T^2 r} \text{ pour } R_2 < r < R_T = \frac{2}{3}\rho_0 \frac{R_T}{r}$$



$$\text{on a aussi } \rho(R_2^-) = \rho_0 \frac{R_T}{R_2} \quad \rho(R_2^+) = \frac{2}{3}\rho_0 \frac{R_T}{R_2}$$

$$\text{et } \rho(R_T^-) = \frac{2}{3}\rho_0$$

$$\text{AN } \left[ \begin{aligned} \rho(R_2^-) &= \frac{3 R_T}{4\pi R_T^2 R_2} = \frac{3 \times 5,572 \cdot 10^{24}}{4\pi (6371 \cdot 10^3)^2 (3486 \cdot 10^3)} = 10 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \\ \rho(R_2^+) &= 6,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \quad \rho(R_T^-) = 3,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \end{aligned} \right.$$

Proches des valeurs de la figure 3, mais le modèle  $\rho(r) = \text{cte}$  pour  $r < R_2$  est mis en défaut

## 2 Étude d'un microphone électrostatique

**IV.A.1)** Soit  $M(x_M, y_M, z_M)$  un point quelconque. Les plans  $(Mxz)$  et  $(Myz)$  étant des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique en  $M$  sera de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(x_M, y_M, z_M) \vec{u}_z$$

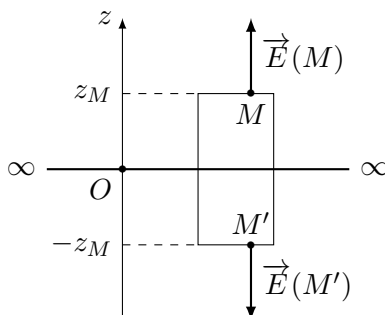
Comme il y a invariance par toute translation le long de  $Ox$  ou de  $Oy$ , on en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(z_M) \vec{u}_z$$

**IV.A.2)** Le plan de la base est plan de symétrie pour cette distribution de charge seule. Le champ électrostatique créé par cette distribution est donc transformé en son symétrique de part et d'autre de la base, c'est à dire, si  $M'$  est le point symétrique de  $M$  par rapport au plan de la base :

$$\vec{E}(M') = \text{sym } \vec{E}(M) = -\vec{E}(M)$$

**IV.A.3)** Soit  $M$  un point de cote  $z_M > 0$ . Prenons comme surface de Gauss  $S_G$  un cylindre de hauteur  $2z_M$  et dont les deux bases sont deux disques de rayon  $r$  et sont placées de façon symétrique par rapport au plan chargé. Le point  $M$  est supposé appartenir à la base supérieure du cylindre.



Les contributions au flux des deux bases sont identiques et la surface latérale ne contribue pas. Nous avons donc :

$$\Phi(\vec{E}/S_G) = 2 \times \pi r^2 E(z_M)$$

De plus, comme  $Q_{int} = \sigma \pi r^2$ , le théorème de Gauss conduit à :

$$E(z_M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M < 0$$

De plus, si  $Q$  est la charge portée par l'armature de base,  $\sigma = \frac{Q}{S}$  ce qui conduit à :

$$E(z_M) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M < 0$$

**IV.A.4)**

$$\vec{F}_e = -Q \vec{E}_{\text{base}} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

Il s'agit d'une force attractive, ce qui est cohérent car les deux disques portent des charges opposées.

**IV.A.5)** Par définition de la capacité d'un condensateur :  $Q = CU$  et donc :

$$\vec{F}_e = -\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(e+z)^2} \vec{u}_z$$

### IV.C – Étude dynamique

**IV.C.1)** On applique le principe fondamental de la dynamique à la membrane, en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U(t)^2}{(e+z)^2}$$

**IV.C.2)**  $z = z_0 + \xi(t)$  donc  $\dot{z} = \dot{\xi}$  et  $\ddot{z} = \ddot{\xi}$ . Par conséquent :

$$m\ddot{\xi} = -k(z_0 + \xi) - h\dot{\xi} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{(U_0 + u)^2}{(e + z_0 + \xi)^2}$$

**IV.C.3)** Un développement limité au premier ordre en  $u/U_0$  et en  $\xi/(e+z_0)$  permet d'écrire :

$$\begin{cases} (U_0 + u)^2 & \approx U_0^2 + 2U_0 u \\ \frac{1}{(e + z_0 + \xi)^2} & \approx \frac{1}{(e + z_0)^2} \left(1 - \frac{2\xi}{e + z_0}\right) = \frac{1}{(e + z_0)^2} - \frac{2\xi}{(e + z_0)^3} \end{cases}$$

En reportant dans l'équation précédente et en négligeant le terme proportionnel à  $\xi u$  qui est un infiniment petit du deuxième ordre, nous obtenons :

$$m\ddot{\xi} = -k\xi - h\dot{\xi} - \underbrace{kz_0 - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U_0^2}{(e+z_0)^2}}_{=0 \text{ (condition d'équilibre)}} - \varepsilon_0 S \frac{U_0 u}{(e+z_0)^2} + \varepsilon_0 S \frac{U_0^2 \xi}{(e+z_0)^3}$$

d'où :

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \left\{ k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e+z_0)^3} \right\} \xi = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e+z_0)^2} u(t)$$

donc :

$$\begin{cases} k' & = k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e+z_0)^3} \\ \alpha & = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e+z_0)^2} \end{cases}$$

Application numérique : avec  $U_0 = 1,1$  kV, on obtient :  $k' = 980$  N.m<sup>-1</sup> et  $\alpha = -5,5 \cdot 10^{-5}$  N.V<sup>-1</sup>. La valeur de  $\alpha$  est donc très petite. Si  $u(t)$  n'est pas importante, l'excitation de la membrane restera faible, donc  $\xi(t)$  aussi (ce qui justifie par ailleurs le développement limité réalisé dans cette question).

### IV.D – Régime sinusoïdal forcé

**IV.D.1)** On transpose l'équation différentielle dans le domaine complexe. Sachant que dériver par rapport au temps revient à multiplier par  $j\omega$ , il vient :

$$(-m\omega^2 + jh\omega + k') \underline{\xi}(t) = \alpha \underline{u}(t)$$

et donc :

$$A(j\omega) = \frac{\alpha}{k' + jh\omega - m\omega^2}$$

**IV.D.2)** C'est un filtre passe-bas du seconde ordre. Sa fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique :

$$A(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Dans notre cas :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = 2\pi f_0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}} \quad \text{fréquence propre du filtre}$$

A.N. :  $m = \mu aS = 2,7 \text{ g}$  ce qui donne :  $f_0 = 96 \text{ Hz}$ .

**IV.D.3)** Si  $f \ll f_0$ , alors  $A(j\omega) \approx H_0 = \alpha/k'$  et donc :

$$\xi(t) = \frac{\alpha}{k'} u_s \cos(\omega t) = \xi_m \cos(\omega t)$$

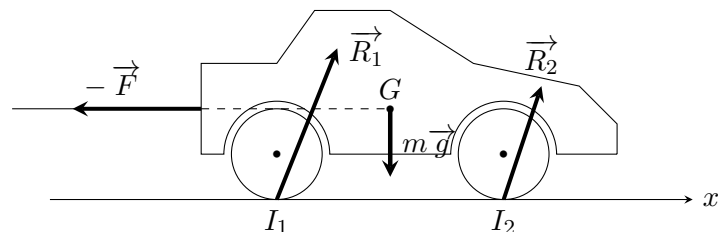
La réponse  $\xi(t)$  est donc en phase avec l'excitation  $u(t)$ . Si on veut que  $\xi_m = e/100$ , alors on doit choisir :

$$u_s = \frac{k'e}{100\alpha} = 5,3 \cdot 10^2 \text{ V}$$

### 3 À propos de mécanique dans le film "Fast and furious". CCINP MP 2021

Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

1) On a le schéma ci-dessous :



La voiture est soumise :

- aux réactions de la route  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  respectivement appliquées en  $I_1$  et en  $I_2$  ;
- à son poids  $m\vec{g}$  appliqué en  $G$  ;
- à la force exercée par le filin. Comme celui-ci est sans masse, cette force est  $-\vec{F}$ , opposé de la force exercée par le filin sur le conteneur.

**Remarque** : les actions exercées par le moteur sur la roue avant sont des forces internes au système {voiture}.

- 2) Le filin étant tendu, le conteneur possède la même vitesse  $\vec{V} = V \vec{e}_x$  constante que la voiture (le conteneur étant en translation, tous les points de celui-ci ont la même vitesse  $\vec{V}$ ). Le théorème du centre d'inertie (TCI) appliqué dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à :

$$m_0 \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_T} = \vec{0} = m_0 \vec{g} + \vec{R}_0 + \vec{F} = m_0 \vec{g} - T_0 \vec{e}_x + N_0 \vec{e}_z + \vec{F}$$

En projection sur  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  on obtient :

$$N_0 = m_0 g \quad \text{et} \quad F = T_0$$

Or, comme le conteneur glisse sur la route, la loi de Coulomb s'applique et la réaction tangentielle est opposée à la vitesse de glissement, donc  $T_0 > 0$ . De plus,  $T_0 = f_0 N_0 = f_0 m_0 g$ . On a donc :

$$\boxed{\vec{F} = f_0 m_0 g \vec{e}_x}$$

- 3) a) La vitesse du système { carrosserie + moteur + conducteur } étant constante dans le référentiel terrestre, l'énergie cinétique  $E_c$  reste constante.

Les forces extérieures sont les réactions de la route  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  de puissances nulles d'après l'énoncé, le poids  $m \vec{g}$  de puissance nulle car orthogonal à  $\vec{V}$  et la force  $-\vec{F}$  de puissance  $-\vec{F} \cdot \vec{V}$ . On a donc :

$$\left( \frac{dE_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = 0 = P_m - \vec{F} \cdot \vec{V}$$

d'où :

$$\boxed{P_m = \vec{F} \cdot \vec{V}}$$

- b) On a donc :

$$\boxed{P_m = f_0 m_0 g V \stackrel{AN}{=} 0,4 \times 4500 \times 10 \times 190\,000 / 3600 = 950 \text{ kW}}$$

ce qui représente 1291 ch. Vu que la valeur moyenne des puissances des voitures circulant en France est de 117 ch, que la puissance d'un camion semi-remorque est de l'ordre de 400 ch, ce chiffre est donc totalement irréaliste, même avec deux voitures !

- 4) a) Si  $S$  est un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans un référentiel galiléen muni d'un repère  $R$ , que  $O$  est un point de  $\Delta$  et que  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire directeur de  $\Delta$ , alors :

- Si  $\vec{L}_O(S/R)$  est le moment cinétique de  $S$  par rapport à  $O$ , sa projection sur l'axe de rotation  $\Delta$  s'écrit :

$$L_\Delta = \vec{L}_O(S/R) \cdot \vec{u} = J_\Delta \omega$$

où  $J_\Delta$  est le moment d'inertie de  $S$  par rapport à  $\Delta$  et  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de  $S$  autour de  $\Delta$ .

- Si  $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$  est le moment par rapport à  $O$  des forces exercées par l'extérieur sur  $S$ , sa projection sur  $\Delta$  s'écrit :

$$M_\Delta = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}$$



- Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta}}$$

- b) • Pour la roue arrière :

La réaction du sol  $\vec{R}_1$ , le poids de la roue qui s'applique en  $O_1$  (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite.

- Pour la roue avant :

La réaction du sol  $\vec{R}_2$ , le poids de la roue qui s'applique en  $O_2$  (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite et le moment des actions du moteur  $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_y$ .

- c) On applique le TMC à chaque roue dans le référentiel de la carrosserie, galiléen puisqu'en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.

- **Roue arrière** : l'axe de rotation est  $\Delta_1 = O_1 \vec{e}_y$ . La vitesse angulaire  $\omega_1$  étant constante on a :

$$J_{\Delta_1} \frac{d\omega_1}{dt} = 0 = M_{\Delta_1}(\vec{R}_1) + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{pivot})}_{=0} = -\frac{d}{2} T_1$$

d'où :  $\boxed{T_1 = 0}$

- **Roue avant** : l'axe de rotation est  $\Delta_2 = O_2 \vec{e}_y$ . La vitesse angulaire  $\omega_2$  étant constante il vient :

$$J_{\Delta_2} \frac{d\omega_2}{dt} = 0 = M_{\Delta_2}(\vec{R}_2) + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{pivot})}_{=0} + M_{\Delta_2}(\text{moteur}) = -\frac{d}{2} T_2 + \Gamma_m$$

d'où  $\boxed{\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}}$ .

- 5) a) On applique le théorème du centre d'inertie (TCI) à la voiture dans le référentiel terrestre, en projection sur  $\vec{e}_x$ . L'accélération de  $G$  étant nulle, on obtient :

$$0 = -F + T_1 + T_2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = T_2}$$

- b) On en déduit :

$$\boxed{\Gamma_m = F \frac{d}{2} = f_0 m_0 g \frac{d}{2} \vec{e}_x}$$

A.N.  $\Gamma_m = 4500 \text{ N.m}$  (couple moteur).

- 6) a) Parce qu'il s'agit d'une force intérieure au système {voiture}. Or le TMC ne fait intervenir que les forces exercées par l'extérieur sur le système étudié.

- b) Si on applique le TCI à la voiture dans le référentiel terrestre et qu'on projette sur  $\vec{e}_z$ , on obtient l'équation :

$$N_1 + N_2 = mg$$

On a donc deux équations à deux inconnues  $N_1$  et  $N_2$  qu'on peut facilement résoudre pour obtenir :

$$N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b}$$

et

$$N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}$$

- 7) a) Puisque  $T_1 = 0$ , la loi de Coulomb est toujours vérifiée pour la roue arrière : elle ne glissera donc jamais. En revant la roue avant ne glisse pas tant que :

$$|T_2| = f_0 m_0 g < f_s \left( \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

- b) On isole  $m_0$  pour trouver :

$$m_0 f_0 g \left( 1 + f_s \frac{h}{2b} \right) < f_s \frac{mg}{2}$$

d'où le résultat :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left( 1 + f_s \frac{h}{2b} \right)} = m_{0,\max}$$

- c) A.N. :  $m_{0,\max} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ kg} = 3,2 \text{ tonnes}$ . Cette masse semble être un bon ordre de grandeur pour un conteneur (qui doit sûrement contenir beaucoup de lingots d'or). On peut donc concevoir que la voiture ne glisse pas.
- 8) a) On échange alors les rôles des roues avant et arrière. Le TMC scalaire appliqué à chacune des roues conduit à :

$$\Gamma_m = T_1 \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad T_2 = 0$$

Le TCI appliqué à la voiture conduit alors à :  $T_1 = F = f_0 m_0 g$ .

- b) Dans ce cas, c'est la roue avant qui ne glissera jamais alors que la roue arrière risque de dérapage. Il n'y a pas de dérapage tant que :

$$|T_1| = f_0 m_0 g < f_s \left( \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

- c) La résolution de l'inégalité précédente conduit alors à :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left( 1 + f_s \frac{h}{2b} \right)} = m'_{0,\max}$$

- d) A.N. :  $m'_{0,\max} = 4,6 \cdot 10^3 \text{ kg} = 4,6 \text{ tonnes}$ . Ceci améliore donc les choses du moins au niveau de l'absence de glissement (mais pas au niveau de la puissance nécessaire).