

**MP1 - DS n°3bis (CCS - Mines)**  
(Samedi 9 novembre 2024 - Durée 4h)

*L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les efforts d'explication (schémas) seront valorisés.*

## 1 STRUCTURE INTERNE DE LA TERRE

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
  - la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide,
  - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide ;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre ;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

Le problème aborde divers phénomènes et modèles en relation avec cette structure.

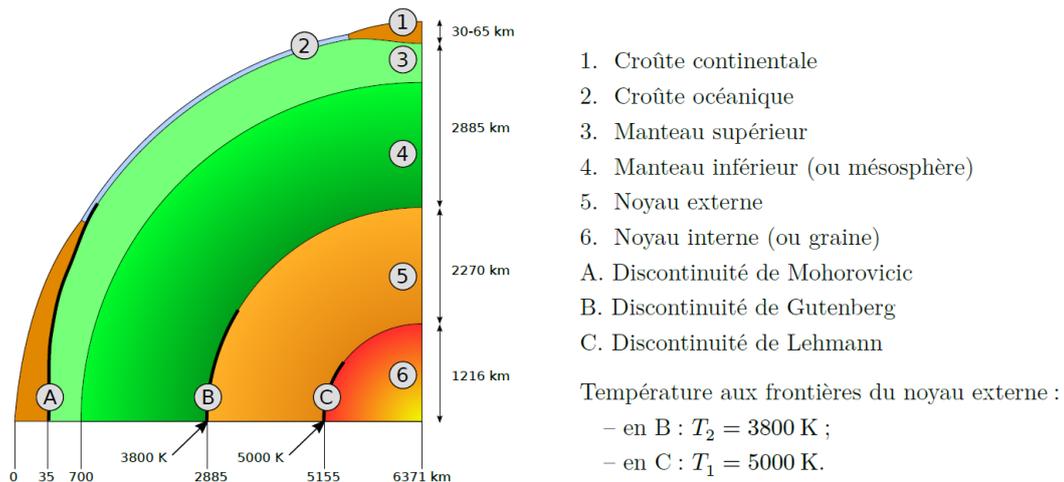


Figure 1 Structure de la Terre. D'après Wikipédia.

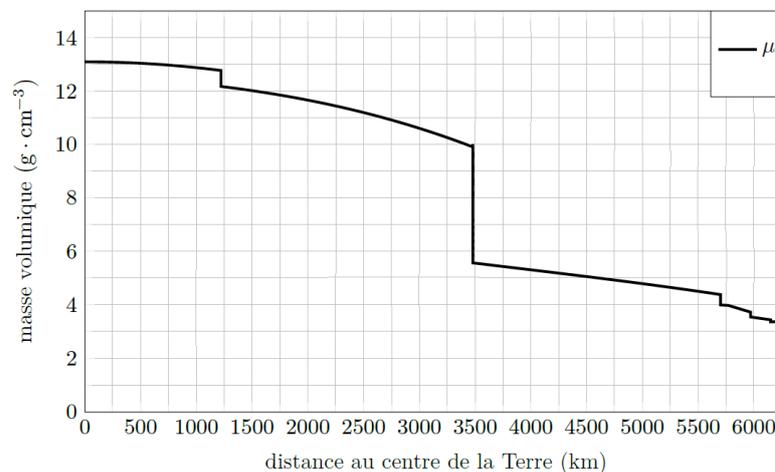


Figure 3 Profils de la masse volumique dans le modèle PREM.  
 D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. *Preliminary reference Earth model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 25, n° 4, p. 297-356.

Données

Rayon de la Terre	$R_T = 6371 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Seule la partie II sera abordée ici.

## II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

### II.A – Préliminaire : l'analogie électrostatique-gravitation

**Q 16.** En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté  $\vec{\mathcal{G}}$ , vérifie le théorème de Gauss de la gravitation (analogue du théorème de Gauss de l'électromagnétisme).

### II.B – Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule  $T_h$  de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$  uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté  $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$ . On note  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

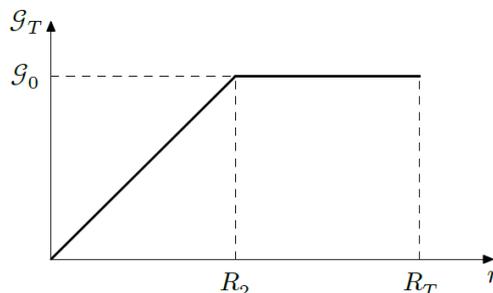
**Q 17.** Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$  en tout point de l'espace en introduisant un système de coordonnées adapté.

**Q 18.** Tracer sa norme en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$ .

**Q 19.** Calculer sa valeur  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre.

### II.C – Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre  $O$  et de rayon  $R_T$  avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre  $O$  ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme  $\mathcal{G}_T$  du champ gravitationnel interne en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$  présente l'allure précisée à la figure 4.



**Figure 4** Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg définie à la figure 1 correspond à la distance  $r = R_2$ .

On note toujours  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre.

**Q 20.** Justifier que la valeur de  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question Q 19.

**Q 21.** Déterminer la distribution de masse volumique  $\mu(r)$  pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de  $R_T$ ,  $R_2$  et  $\mu_0$  dans le noyau et en fonction de  $R_T$ ,  $M_T$  et  $r$  dans le manteau.

**Q 22.** Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique  $\mu(r)$  en précisant les valeurs numériques remarquables. Discuter les similitudes et les différences de ce modèle avec le profil de masse volumique donné par le modèle PREM sur la figure 3.

## 2 Étude d'un microphone électrostatique

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

On s'intéresse ici à quelques aspects de la transduction électro-acoustique. Une large partie du problème est consacrée à la transduction électrodynamique. Un modèle simple de haut-parleur électrostatique est ensuite étudié.

**Seule la quatrième partie, portant sur le microphone électrostatique sera étudiée dans ce DS.**

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance  $e$ . L'un d'eux est fixe (« la base »), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe  $Oz$ .

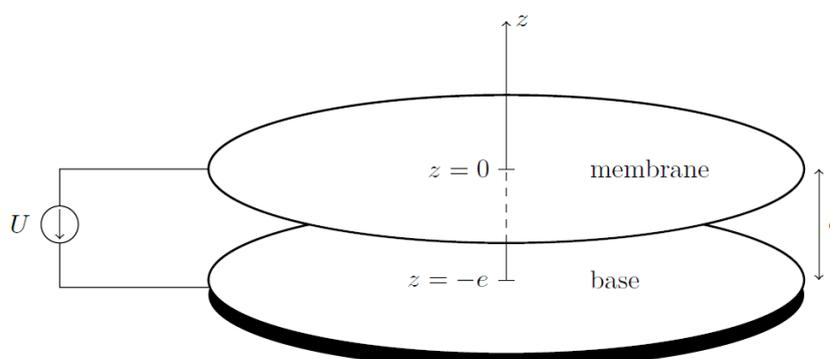


Figure 3

La membrane de surface  $S$  est rappelée vers la position  $z = 0$  par la force de rappel élastique  $-kz\vec{u}_z$ . Elle est également soumise, lors de ses déplacements, à la force de frottement fluide  $-h\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ . L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide. Lorsqu'on établit une différence de potentiel (ddp)  $U$  entre les disques, il apparaît une charge électrique  $Q$  sur la base et une charge opposée  $-Q$  sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.

### IV.A – Force exercée sur la membrane

La base est assimilée à un plan infini portant la densité surfacique de charge  $\sigma$  uniforme.

**IV.A.1)** En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser, en les justifiant, la direction du champ  $\vec{E}$  créé par la base seule et sa dépendance avec les coordonnées spatiales.

**IV.A.2)** Comparer les champs  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  créés par la base seule en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan des charges.

**IV.A.3)** En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe  $Oz$  traversant le plan de charge, déterminer le champ  $\vec{E}$  créé par la base seule dans tout l'espace en fonction de  $\sigma$  puis de la charge  $Q$ , sachant que l'armature a une surface réelle  $S$ .

**IV.A.4)** En déduire la force électrostatique  $\vec{F}_e$  subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?

**I.A.5)** L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur de capacité  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e + z}$ .

Exprimer  $\vec{F}_e$  en fonction de  $U$ ,  $z$  et des constantes du problème.

Lorsque le condensateur est soumis à une tension constante  $U_0$ , la membrane adopte une position d'équilibre sous l'action conjointe de la force électrique  $\vec{F}_e$ , de la force de rappel élas-

tique et de son poids (l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  étant supposée verticale descendante). Dans cette position d'équilibre, l'abscisse de la membrane est  $z_0$ .

L'étude de cette position d'équilibre, supposée stable, ne sera pas abordée dans ce sujet. Pour les applications numériques des questions suivantes, on prendra les données suivantes :

$$e = 3,0 \text{ mm} ; S = 0,05 \text{ m}^2 ; k = 1000 \text{ N.m}^{-1} ; \\ \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} ; U_0 = 1,1 \cdot 10^3 \text{ V} \text{ et } z_0 = -e/100$$

#### IV.C – Étude dynamique

**IV.C.1)** Donner l'équation différentielle reliant  $z(t)$  à la tension  $U(t)$  en régime variable. On notera  $m$  la masse de la membrane.

**IV.C.2)**  $U(t)$  étant une tension oscillante autour de la valeur  $U_0$  précédente, de la forme  $U(t) = U_0 + u(t)$  avec  $|u(t)| \ll U_0$ , on étudie les petits mouvements de la membrane au voisinage de la position d'équilibre stable  $z_0$  et on pose  $z(t) = z_0 + \xi(t)$  avec  $|\xi(t)| \ll e + z_0$ . Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $\xi(t)$ .

**IV.C.3)** Montrer qu'avec les hypothèses, cette équation prend la forme simplifiée

$$m \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + h \frac{d\xi(t)}{dt} + k' \xi(t) = \alpha u(t)$$

On fera un développement limité au premier ordre en  $\frac{\xi}{e + z_0}$  et  $\frac{u}{U_0}$ .

Donner les expressions de  $k'$  et  $\alpha$  en fonction de  $k$ ,  $S$ ,  $U_0$ ,  $e$  et  $z_0$ .

Donner les valeurs numériques de  $k'$  et  $\alpha$  (en reprenant les données de la question IV.B.5).

Conclure.

#### IV.D – Régime sinusoïdal forcé

On prend  $u(t) = u_s \cos(\omega t)$ . On note  $\underline{u}(t)$  et  $\underline{\xi}(t)$  les représentations complexes de  $u(t)$  et  $\xi(t)$ .

**IV.D.1)** Quelle est la nature du transfert  $A(j\omega) = \underline{\xi}/\underline{u}$  ?

**IV.D.2)** La membrane est une feuille d'aluminium d'épaisseur  $a = 20 \mu\text{m}$ , d'aire  $S = 0,05 \text{ m}^2$  et de masse volumique  $\mu = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Calculer la fréquence propre  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}}$  du système.

**IV.D.3)** On se place à une fréquence  $f \ll f_0$  (en « contrôle de raideur »). Quelle amplitude  $u_s$  doit-on donner à  $u(t)$  pour obtenir une amplitude d'oscillation  $\xi_m = e/100$  ?

Conclure.

### 3 À propos de mécanique dans le film "Fast and Furious"

Ce sujet aborde diverses questions de physique librement inspirées d'un article de la N.S.T.A. (National Science Teaching Associationaux Etats-Unis) qui traite de la vraisemblance scientifique de certaines scènes de la saga cinématographique "Fast and furious".

#### Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

Dans l'épisode 5 de la série, on voit les héros du film voler un coffre-fort conteneur (contenant le butin d'un trafiquant de drogue) en l'accrochant par des filins à deux voitures de course. Nous allons étudier si cette scène est compatible avec les lois de la physique. **Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.**



FIGURE 1 – Course-poursuite dans les rues de Rio.

On suppose que la course-poursuite s'effectue à la vitesse  $V$  constante dans le référentiel terrestre ( $\mathcal{R}_T$ ), supposé galiléen. Ce référentiel est muni d'un repère  $(Oxyz)$  où  $Oz$  est l'axe vertical ascendant et d'une base orthonormale directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On note  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.

Dans le film il y a deux voitures, chacune de masse  $m_1$ , mais, dans le but de simplifier le problème, l'étude est ramenée à une seule voiture de masse  $m = 2m_1$  tirant le conteneur de masse  $m_0$  en ligne droite, sur route horizontale (axe  $Ox$ ), grâce à un filin horizontal que l'on supposera sans masse. Le schéma de ce dispositif est donnée sur la Figure 2.

On entend par voiture l'ensemble carrosserie, roues, moteur, conducteur. Le plan  $(Oxz)$ , vertical contenant le filin, est plan de symétrie de l'ensemble {voiture, filin, conteneur}. On suppose ainsi que toutes les actions mécaniques sont décrites par des forces coplanaires ramenées dans ce plan. Ainsi, la paire de roues arrières est remplacée par une seule roue au contact avec le bitume en  $I_1$ . Il en est de même pour la paire de roues avant en  $I_2$ . On donne la valeur de l'empattement  $I_1I_2 = 2b$ .

Les réactions exercées par la chaussée sur le conteneur et sur les roues sont décrites :

- pour le conteneur par :  $\vec{R}_0 = -T_0 \vec{e}_x + N_0 \vec{e}_z$  ;
- pour la roue arrière :  $\vec{R}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$  appliquée en  $I_1$  ;
- pour la roue avant :  $\vec{R}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$  appliquée en  $I_2$ .

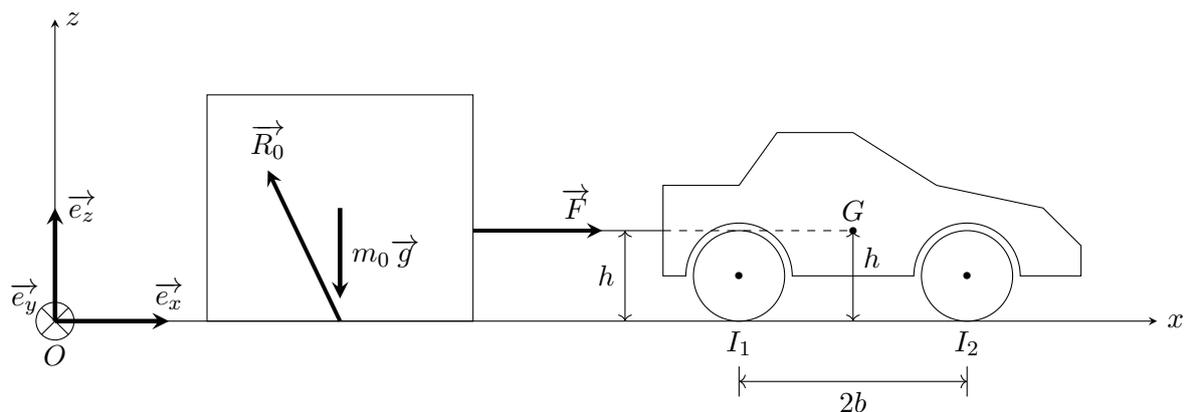


FIGURE 2 – Schéma de l'ensemble conteneur, filin, voiture.

On note  $f_0$  le coefficient de frottement dynamique au contact métal/bitume (pour le conteneur) et  $f_s$  le coefficient de frottement statique pour le contact pneu/bitume.

Le filin, accroché horizontalement à une hauteur  $h$  au-dessus de la chaussée, exerce une force de traction  $\vec{F}$  sur le conteneur. Les actions mécaniques subies par le conteneur sont représentées sur la Figure 2.

Les roues de la voiture sont munies de pneus en caoutchouc. On note  $d$  le diamètre des roues et  $J$  leur moment d'inertie par rapport à leurs axes de symétrie respectifs. La voiture étant une traction-avant, on note  $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_y$  le moment des forces exercées par le moteur sur la roue avant ( $\Gamma_m > 0$ ).

Dans tout le problème on négligera les frottements de l'air.

- 1) Reproduire la Figure 2 et la compléter en indiquant toutes les actions mécaniques extérieures subies par la voiture.
- 2) En appliquant le théorème du centre d'inertie au conteneur et à l'aide d'une loi sur le frottement solide à préciser, obtenir l'expression de  $\vec{F}$  en fonction de  $f_0$ ,  $m_0$ ,  $g$  et  $\vec{e}_x$ .
- 3) On suppose qu'aucune roue ne glisse sur la chaussée. On admet alors que les actions de contact chaussée/roues ne dissipent ni ne fournissent aucune puissance aux roues. De plus, on néglige la masse des roues devant la masse de la carrosserie, du moteur et du conducteur. L'énergie cinétique  $E_c$  de la voiture dans le référentiel terrestre est donc celle du système { carrosserie + moteur + conducteur }. On admettra la loi suivante :

$$\left( \frac{dE_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = P_m + \sum P(\vec{F}_{\text{ext}})$$

où  $P_m$  est la puissance fournie par le moteur et  $\sum P(\vec{F}_{\text{ext}})$  est la somme des puissances des forces appliquées par le milieu extérieur sur la voiture.

- a) En déduire la relation entre la puissance de  $\vec{F}$  et la puissance  $P_m$  fournie par le moteur.
- b) Calculer  $P_m$  en kilowatt et en cheval-vapeur. Le choix de deux voitures dans cette mise en scène vous semble-t-il réaliste ?

- 4) a) Rappeler la loi du moment cinétique scalaire appliquée à un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. On précisera tous les termes et notations introduits.
- b) Recenser toutes les actions mécaniques (résultantes ou moments) s'exerçant sur la roue arrière, puis sur la roue avant.
- c) On suppose chaque roue en liaison pivot parfaite avec le reste de la voiture. Dans le référentiel de la carrosserie, la roue arrière a une vitesse angulaire  $\omega_1$  constante et la roue avant une vitesse angulaire  $\omega_2$  constante.

En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire à chaque roue dans le référentiel de la carrosserie, par rapport à des axes à préciser, montrer que  $T_1 = 0$  et que  $\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}$

- 5) a) Montrer que  $\vec{F} = T_2 \vec{e}_x$ .
- b) En déduire  $\Gamma_m$  et faire l'application numérique.
- 6) La loi du moment cinétique scalaire appliquée à la voiture par rapport à l'axe  $(G, \vec{e}_y)$  ( $G$  étant le centre d'inertie de la voiture) permet de montrer que  $(N_1 - N_2)b = T_2 h$  (cf. figure 2).
- a) Pourquoi le couple  $\Gamma_m$  n'intervient-il pas dans ce résultat ?
- b) En déduire  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $f_0$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $m_0$  et  $g$ .
- 7) Les lois de Coulomb sur le frottement solide permettent d'assurer que les roues ne glissent pas sur la chaussée si  $|T_k| < f_s N_k$  avec  $k \in \{1, 2\}$ .
- a) Quelle roue risque de glisser ?
- b) Montrer qu'un tractage sans glissement des roues impose une masse maximale tractable

$$m_{0,\max} = m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 + f_s \frac{h}{2b}\right)}$$

- c) Faire l'application numérique. Commenter le résultat trouvé.
- 8) Lors de la préparation de leur plan, un des protagonistes suggère d'utiliser des voitures à propulsion arrière.
- a) Quelles sont alors les expressions de  $T_1$  et de  $T_2$  ?
- b) En admettant que  $N_1$  et  $N_2$  trouvés à la question 7) sont inchangés, dire quelle roue risque de glisser dans ce cas.
- c) En déduire l'expression de la masse maximale tractable  $m'_{0,\max}$ .
- d) Faire l'application numérique et conclure si les héros peuvent ou non réussir cette opération de tractage.

### Données numériques :

Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$  ;

Masse du conteneur :  $m_0 = 4\,500 \text{ kg}$  ;

Masse totale des deux voitures :  $m = 3\,000 \text{ kg}$  ;

Diamètre des roues :  $d = 20 \text{ pouces}$  (1 pouce = 2,5 cm) ;

Empattement :  $2b = 2,7 \text{ m}$  ;

Hauteur du centre d'inertie  $G$  et du filin :  $h = 0,5 \text{ m}$  ;

Coefficient de frottement dynamique métal/bitume :  $f_0 = 0,4$  ;

Coefficient de frottement statique caoutchouc/bitume :  $f_s = 1,0$  ;

Vitesse lors de cette course poursuite :  $V = 190 \text{ km.h}^{-1}$  ;

Cheval-vapeur (unité de puissance) : 1 ch = 736 W