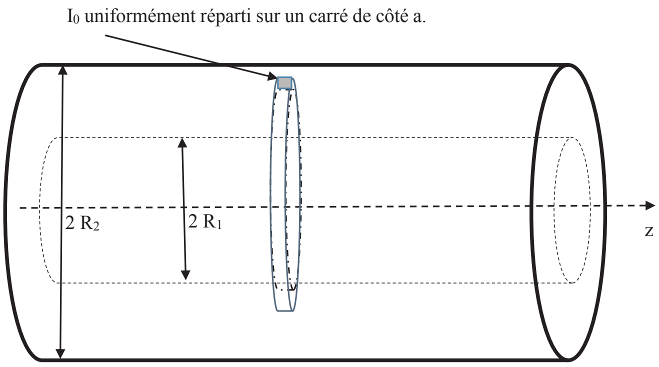
DM n°7 (pour le vendredi 22 novembre 2024)

La perméabilité du vide est $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

1 Production d'un champ magnétique intense (CCINP MP)

On utilise un solénoïde "épais" (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe Oz. Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1{,}0$ mm, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4{,}0$ m, depuis un rayon $R_1 = 20$ cm jusqu'à un rayon $R_2 = 25$ cm. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti à travers chaque section carrée, orienté dans le sens direct autour de Oz. La situation est schématisée sur la figure ci-dessous. Les sections carrées sont dans les plans $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ c'est-à-dire en positionnement radial.



1. Calculer le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ auquel cette distribution de courant est équivalente, pour $R_1 < r < R_2$.
2. Le champ magnétique étant supposé nul pour $r > R_2$, établir à l'aide du théorème d'Ampère que l'expression du champ sur en un point tel que $r < R_1$ vaut :

$$\overrightarrow{B_0} = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1) \overrightarrow{e_z}$$

3. Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 T ?

Pour obtenir un champ intense sans problème d'échauffement on utilise des matériaux supraconducteurs qui perdent totalement leur résistivité en dessous d'une température critique T_C, qui dépend du champ magnétique. Ces matériaux ont des propriétés magnétiques intéressantes : en régime stationnaire, ils "expulsent" le champ magnétique. Dans le cadre médical, on utilise des supraconducteurs durs, pour lesquels $T_C < 133$ K pour $B > 0{,}2$ T.

On admettra dans ce qui suit que la loi constitutive de certains supraconducteurs est $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{j} = -\Lambda \overrightarrow{B}$ où $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{B}$ sont respectivement la densité de courant et le champ magnétique en chaque point du corps supraconducteur. Dans cette loi, Λ est une constante positive.

4. Quelle est l'unité de Λ ?

5. En supposant qu'on peut appliquer les équations de Maxwell dans le matériau supraconducteur de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0, exprimer grâce à une formule d'analyse vectorielle l'équation du second ordre à laquelle obéit le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ en régime permanent. La mettre sous la forme :

$$\Delta \overrightarrow{B} - \frac{\overrightarrow{B}}{\delta^2} = \overrightarrow{0}$$

Quelle est la dimension de la grandeur δ ?

On considère qu'un supraconducteur de ce type occupe le demi-espace $x < 0$ et que les sources du champ sont telles que règne dans l'espace extérieur $x \geqslant 0$ un champ permanent uniforme $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{e_z}$. La modélisation de la distribution de courant est volumique et n'introduit donc pas de discontinuités spatiales du champ magnétique.

6. En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ dans le supraconducteur s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{B}(M) = B_x(x)\,\overrightarrow{e_x} + B_y(x)\,\overrightarrow{e_y} + B_z(x)\,\overrightarrow{e_z}$$

7. Déterminer l'expression de ce champ $\overrightarrow{B}(M)$ régnant dans le supraconducteur en fonction de x, δ et B_0. En déduire la densité de courant $\overrightarrow{j}$.
8. L'ordre de grandeur du paramètre δ est de 5.10^{-8} m. Commenter.
9. Tracer sans faire de calculs l'allure de $B_z(r)$ dans une symétrie cylindrique où le supraconducteur occupe le volume d'un cylindre creux d'épaisseur $e = R_2 - R_1 \gg \delta$, de longueur L très grande devant son rayon R_2. On suppose que le champ vaut $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{e_z}$ dans l'espace intérieur au cylindre creux.

2 Expression approchée du champ magnétique créé par une bobine (Centrale MP) : facultatif

1. Démontrer soigneusement l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur d'un solénoïde de longueur infinie, caractérisé par un rayon R_b et n de spires par mètre parcourues par un courant d'intensité I_0. On pourra admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur.

2. On s'intéresse maintenant au champ magnétique produit par la bobine ci-dessous. Le sens de la flèche du courant dans chaque spire est indiqué par les ronds pointés ou les ronds avec une croix. La bobine est constituée d'un enroulement de $N = 1000$ spires circulaires de même rayon R_b, parcourues par un courant $I_0 > 0$.

   Un logiciel de simulation a permis d'obtenir la carte de champ $\overrightarrow{B}$ de la Figure 2 qui représente la bobine à une échelle réduite mais qui respecte les proportions des longueurs. La Figure 3 représente l'amplitude du champ magnétique en un point M appartenant au plan $z = \ell_b/2$ en fonction de son abscisse x_r sur l'axe $(M, \overrightarrow{e_r})$, l'origine de cet axe étant choisie sur un des côtés de la bobine (profil radial). Sur cette figure est aussi représenté l'amplitude de $\overrightarrow{B}$ en un point M appartenant à l'axe (Oz) en fonction de sa coordonnée z, l'origine de cet axe étant choisie au centre O de la bobine (profil axial).

   a) À l'aide des différentes figures et courbes, estimer la valeur du rayon moyen R_b de l'enroulement du fil ainsi que la longueur ℓ_b de la bobine.

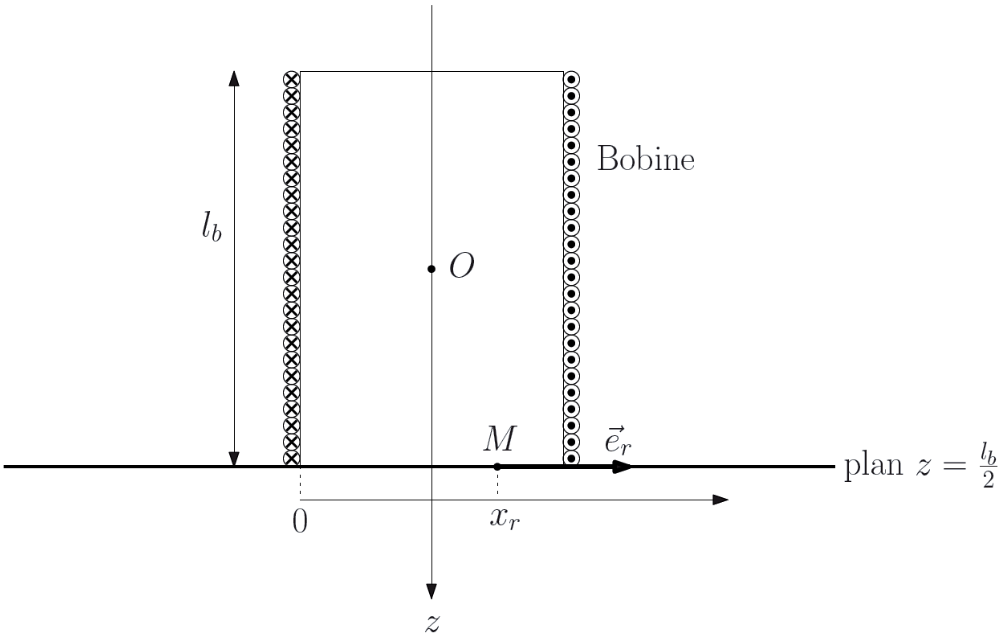


FIGURE 1 – *Conventions d'orientations et notations*

b) En admettant que l'expression du champ magnétique calculé à la première question reste valide au centre O de la bobine, en déduire la valeur de l'intensité I_0.

c) Pourquoi le champ produit par cette bobine s'écarte-t-il du modèle du solénoïde infini dès qu'on s'éloigne du centre de la bobine ?

d) On considère le point M situé sur l'axe de la bobine à $d = 7{,}5$ cm de son centre O. On suppose que le champ magnétique en ce point est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{B}(M) = \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \overrightarrow{e}_z$$

Estimer la valeur numérique de la constante α.

3. Justifier que le champ créé en un point M quelconque de l'espace est de la forme

$$\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,z)\,\overrightarrow{e_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

Qu'en est-il pour un point M de l'axe de la bobine ?

4. Indiquer le sens du champ magnétique sur les lignes de champ sur la Figure 2 (à recopier rapidement sur la copie).

5. Dans quelle zone le champ magnétique est-il le plus intense ? Aurait-on pu déduire ce résultat directement à partir de la répartition des lignes de champ de la Figure 2, c'est à dire sans l'échelle de teinte codant l'amplitude du champ magnétique ? On démontrera précisément la propriété utilisée à partir de l'équation de Maxwell-Thomson (ou Maxwell-Flux).

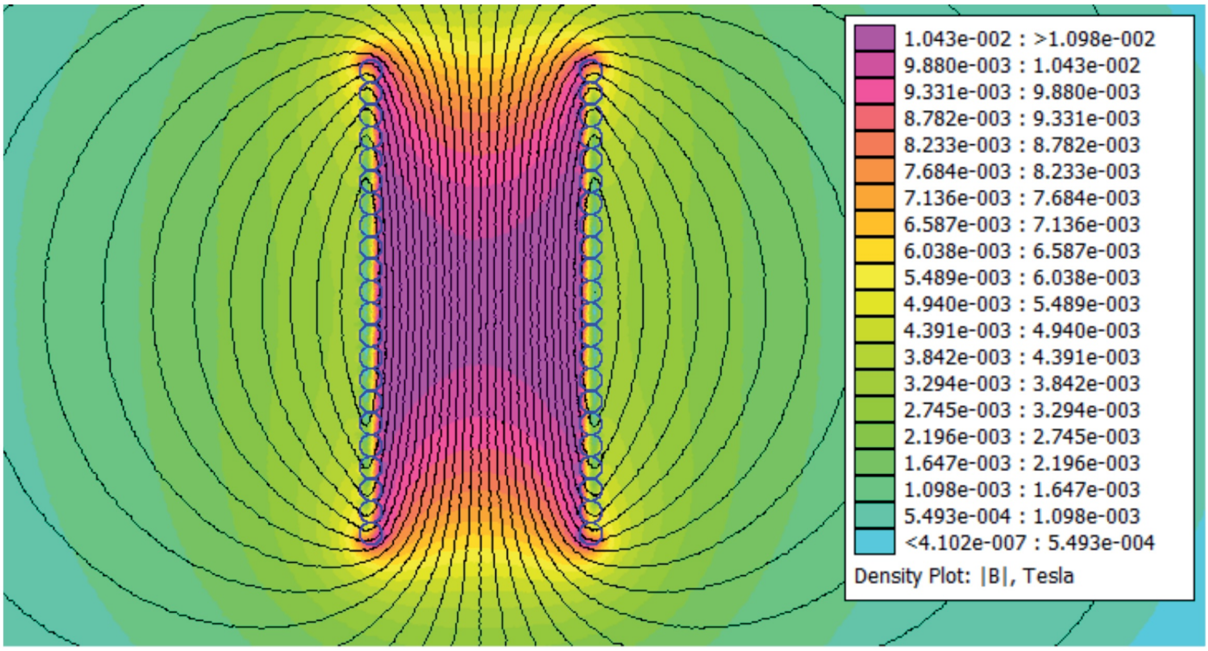


FIGURE 2 – *Carte des lignes de champ magnétique obtenue par simulation.*

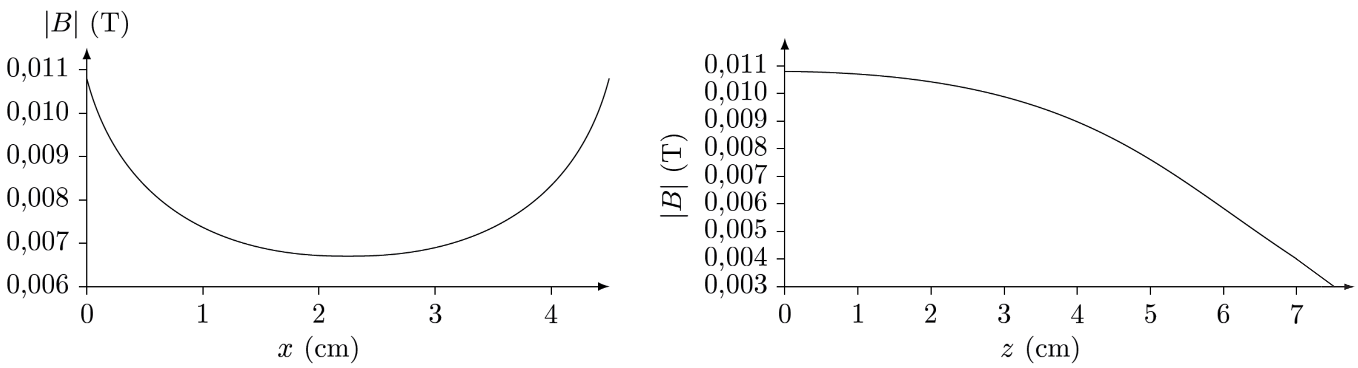


FIGURE 3 – *Profils respectivement radial et axial d'amplitude du champ magnétique.*