

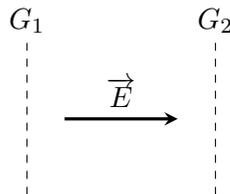
MP1 : Corrigé du DS n°4

I. Séparation des isotopes par spectrométrie de masse. Centrale TSI 2012

A - Accélération des ions

A1) Pour que les ions positifs soient accélérés, il faut que le champ électrostatique soit dirigé de G_1 vers G_2 . Or \vec{E} est dans le sens des potentiels décroissants. On en déduit que :

$$V_{G_1} > V_{G_2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{G_1} - V_{G_2} > 0}$$



A2) L'énergie mécanique d'un ion est constante au cours du temps :

$$E_m(O_1) = E_m(O_2) \quad \text{d'où} \quad 0 + eV_{G_1} = \frac{1}{2}mu^2 + eV_{G_2}$$

ce qui entraîne pour chaque type d'ions :

$$\boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}} \quad \text{et} \quad u_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}}$$

avec $m_1 = M_1/N_A$ et $m_2 = M_2/N_A$, M_1 et M_2 étant les masses molaires des deux types d'ions, c'est à dire $M_1 = 235 \text{ g.mol}^{-1}$ pour ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ et $M_2 = 238 \text{ g.mol}^{-1}$ pour ${}^{238}_{92}\text{U}^+$.

A3) L'énergie cinétique acquise par les ions s'écrit :

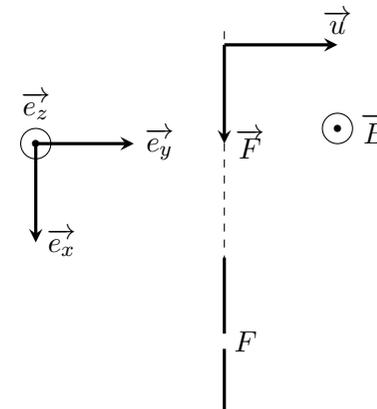
$$E_c = \frac{1}{2}mu^2 = eU = 15,0 \text{ keV} \quad \text{d'où} \quad \boxed{U = 15 \text{ kV}}$$

On en déduit que, après calcul des masses m_1 et m_2 :

$$\boxed{u_1 = 111 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad u_2 = 110 \text{ km/s}}$$

B - Déviation des ions

B1) Lorsqu'un ion positif pénètre dans la chambre de déviation, il est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = e\vec{u} \wedge \vec{B}$. Cette force doit être dirigée vers la fente F , d'où le sens de \vec{B} sur le schéma : $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $B > 0$.



B2) On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à un ion de charge e et de masse m . En négligeant les autres forces que la force magnétique on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

À la sortie de la chambre d'accélération (temps $t = 0$), le vecteur vitesse de l'ion est dans le plan de la figure et $\vec{v} = u \vec{e}_y$. Pour $t > 0$ on a :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

En projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$m \frac{dv_x}{dt} = eB v_y ; \quad m \frac{dv_y}{dt} = -eB v_x \quad \text{et} \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

On a donc $v_z = \text{Cste} = 0$ d'où $z = \text{Cste} = 0$ (d'après conditions initiales) : le mouvement est plan, dans le plan O_2xy (= plan de la figure).

Posons $\omega_c = eB/m$ (pulsation cyclotron) et $\underline{v} = v_x + iv_y$ (vitesse complexe). On obtient l'équation :

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -i\omega_c \underline{v} \implies \underline{v}(t) = \underline{v}(0) e^{-i\omega_c t} = iu e^{-i\omega_c t}$$

Il vient :

$$v_x(t) = \text{Re}[v(t)] = u \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = \text{Im}[v] = u \cos(\omega_c t)$$

puis :

$$x(t) = -\frac{u}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + C_1 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + C_2$$

Les conditions initiales donnent : $C_1 = u/\omega_c$ et $C_2 = 0$, d'où :

$$x(t) = \frac{u}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

L'élimination du temps conduit à :

$$\left(x - \frac{u}{\omega_c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{u}{\omega_c}\right)^2$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega = \left(\frac{u}{\omega_c}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{u}{\omega_c} = \frac{mu}{eB}$. On a donc pour les deux types d'ions :

$$R_1 = \frac{m_1 u_1}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{m_2 u_2}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_2}{e}}$$

B3) Les ions de l'uranium 235 passent par F si et seulement si $2R_1 = D$ ce qui conduit à :

$$B = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}} \stackrel{AN}{=} 0,576 \text{ T}$$

ce qui est un ordre de grandeur raisonnable pour B , facilement atteignable en laboratoire.

B4) Pour le champ magnétique trouvé à la question précédente on a : $2R_2 = 946 \text{ mm} > D + L'$. Les ions de l'isotope 238 ne passent pas par la fente F . Il y a bien séparation isotopique.

B5) Charge électrique passant dans le dispositif en un an : $Q = It$ avec $t = 365,25 \times 24 \times 3600$ secondes donc $Q = 3,156 \cdot 10^6 \text{ C}$.

Nombre d'ions : $N = \frac{Q}{e} = 1,972 \cdot 10^{25}$

Le nombre d'ions ${}_{92}^{235}\text{U}^+$ est donc $0,7 \cdot 10^{-2} \times N = 1,380 \cdot 10^{23}$ ce qui correspond à 0,229 mol, soit une masse de 53,9 grammes. Ceci n'est pas beaucoup !

II. Résonance magnétique nucléaire CCINP MP 2017

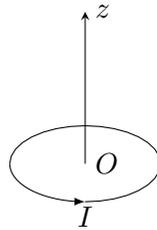
I. Rapports gyromagnétiques

Q1. Le contour définissant la spire étant orienté, le vecteur surface obéit à la règle de la main droite :

$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$$

Le moment magnétique de la spire est le produit de \vec{S} par l'intensité I du courant qui traverse la spire.

$$\vec{m} = I \vec{S} = I \pi R^2 \vec{e}_z$$



Q2. a) Le mouvement étant circulaire ($r = \text{Cste}$), le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. La puissance de la force \vec{F}_{el} est donc nulle puisque :

$$\vec{F}_{\text{el}} \cdot \vec{v} = 0$$

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_{\text{el}} \cdot \vec{v} = 0$$

ce qui montre que l'énergie cinétique est conservée et donc que la norme de la vitesse est une constante.

b) En assimilant la trajectoire de l'électron à une boucle de courant microscopique parcourue par un courant $I = -e/T$ (voir cours), on peut associer à l'électron un moment magnétique :

$$\vec{m} = -\frac{e}{T} \pi r_B^2 \vec{e}_z$$

Comme la norme de la vitesse est constante, on peut écrire que la circonférence du cercle vérifie l'équation :

$$2\pi r_B = \int_0^T v dt = vT \quad \text{donc} \quad v = \frac{2\pi r_B}{T}$$

d'où :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2} v r_B \vec{e}_z$$

c) Par définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r_B v \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m_e r_B v \vec{e}_z$$

d) On en déduit que :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_O = \gamma_e \vec{L}_O$$

et donc que :

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

Application numérique : $\gamma_e = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C.kg}^{-1}$.

Q3. Décomposons la boule en porteuse d'une charge totale q en petites charges élémentaires dq . Lorsque la boule est en rotation autour d'un diamètre OZ , chaque charge dq décrit un cercle autour de OZ et crée un moment magnétique dirigé dans la direction du vecteur \vec{e}_z si $dq > 0$ et $-\vec{e}_z$ si $dq < 0$. Si on considère que le moment magnétique total \vec{m} de la boule est la somme des moments magnétiques de chaque charge dq , alors \vec{m} sera colinéaire à \vec{e}_z .

- Q4.** Nous obtenons : $\|\vec{m}\| = \gamma_p \hbar/2$. Application numérique : $\|\vec{m}\| = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A.m}^2$.

II. Dipôles magnétiques

- Q5.** Il s'agit d'un système physique caractérisé par un moment magnétique \vec{m} non nul et dont la taille caractéristique ℓ est très petite devant la distance où on observe son champ magnétique créé
- Q6.** Rappelons que lorsque le champ magnétique d'origine extérieure \vec{B}_0 est uniforme, la résultante des forces magnétiques exercées sur le dipôle est nulle : il ne reste que le moment résultant de ces forces (couple).

Les positions d'équilibre correspondent à $\vec{\Gamma} = \vec{0}$, c'est à dire à \vec{m} dans le même sens que \vec{B}_0 où \vec{m} en sens opposé à \vec{B}_0 . Dans le premier cas l'énergie potentielle vaut $E_p(1) = -\|\vec{m}\|B_0$ et dans l'autre cas elle vaut $E_p(2) = +\|\vec{m}\|B_0$.

La position d'équilibre stable correspond à la plus petite valeur de E_p : c'est donc *la première configuration*.

- Q7.** La différence d'énergie vaut : $\Delta E_p = 2\|\vec{m}\|B_0$. Application numérique : $\Delta E_p = 2,8 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$ (on rappelle qu'un eV est égal à $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

C'est une très petite énergie comparée à celle des électrons dans les atomes par exemple qui est de l'ordre de quelques eV ou à celle des interactions (fortes) entre les nucléons du noyau atomique qui est de l'ordre de quelques centaines de MeV (méga électron-volts).

Précession d'un dipôle magnétique.

- Q8.** En supposant que les seules forces qui agissent sont les forces magnétiques, nous avons (TMC) :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

En multipliant cette équation par γ_p , il vient :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma_p \vec{B}_0 \wedge \vec{m} \quad (1)$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\omega}_0 = -\gamma_p \vec{B}_0}$$

Du point de vue des dimensions, ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps : il s'agit d'une *pulsation*, appelée *pulsation de précession* ou encore *pulsation de Larmor*.

- Q9.** Considérons le produit scalaire de l'équation précédente par \vec{m} . Nous obtenons :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et comme :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{m} \cdot \vec{m})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt}$$

il vient :

$$\boxed{\frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt} = 0 \iff \|\vec{m}\| = \text{Cste}}$$

Considérons maintenant le produit scalaire de l'équation précédente par \vec{e}_z . Puisque $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ et que \vec{e}_z est un vecteur constant, il vient :

$$\vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{d(\vec{e}_z \cdot \vec{m})}{dt} = \vec{e}_z \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et donc :

$$\boxed{\vec{e}_z \cdot \vec{m} = m_z = \text{Cste}}$$

En utilisant les deux expressions équivalentes du produit scalaire, on en déduit que :

$$\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = m_z B_0 = \|\vec{m}\| B_0 \cos \alpha = \text{Cste}$$

ce qui montre que $\cos \alpha$ reste constant au cours du mouvement et donc que α reste constant. Ceci montre que le vecteur \vec{m} décrit un cône de demi-angle au sommet α .

- Q10.** a) Projetons l'équation (1) sur la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{m}_x = \gamma_p B_0 m_y \\ \dot{m}_y = -\gamma_p B_0 m_x \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et en y remplaçant \dot{m}_y , il vient :

$$\ddot{m}_x = \gamma_p B_0 \dot{m}_y = -(\gamma_p B_0)^2 m_x$$

Par la suite, nous poserons : $\omega_0 = \|\vec{\omega}_0\| = \gamma_p B_0 > 0$. On obtient alors :

$$\ddot{m}_x + \omega_0^2 m_x = 0$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 . Une équation similaire est vérifiée par m_y .

- b) Nous avons :

$$m_x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

En observant la configuration du moment magnétique à $t = 0$, on voit que $m_x(0) = m_0 \sin \alpha$ et que $\dot{m}_x(0) = \omega_0 m_y(0) = 0$. On en déduit que $\lambda = m_0 \sin \alpha$ et $\mu = 0$ et donc :

$$m_x(t) = m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t)$$

puis :

$$\begin{aligned} \dot{m}_y &= -\gamma_p B_0 m_x = -\omega_0 m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t) \\ \implies m_y(t) &= -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t) + \text{Cste} \end{aligned}$$

Comme $m_y(0) = 0$, la constante d'intégration est nulle et nous obtenons :

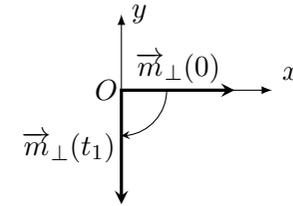
$$m_y(t) = -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t)$$

- c) On a :

$$m_x^2 + m_y^2 = (m_0 \sin \alpha)^2$$

ce qui montre que l'extrémité du vecteur \vec{m}_\perp décrit un cercle de rayon $m_0 \sin \alpha$. La vitesse angulaire de parcours de ce cercle est ω_0 .

À l'instant $t = 0$, $\vec{m}_\perp(0) = m_0 \sin \alpha \vec{e}_x$ et à l'instant $t_1 > 0$ tel que $\omega_0 t_1 = \pi/2$, $\vec{m}_\perp(t_1) = -m_0 \sin \alpha \vec{e}_y$. On voit donc que le sens de parcours est le *sens horaire*.



III. La relaxation de l'aimantation

- Q11.** On suppose pour simplifier l'étude qu'à l'instant $t = 0$, juste après l'impulsion radiofréquence, l'aimantation vaut $\vec{M}(t = 0) = -M_0 \vec{e}_y$.

- a) Le document 2 donne l'équation à projeter. On obtient :

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \iff \frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1}$$

- b) La solution est : $M_z(t) = A \exp(-t/T_1) + M_0$, avec $M_z(0) = 0$, ce qui conduit à :

$$M_z(t) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

Q12. Obtention de \vec{M}_\perp :

- a) La projection de l'équation du document 2 sur un plan orthogonal à \vec{e}_z conduit à :

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

- b) Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} &= \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp e^{t/T_2} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé par l'énoncé.

- c) Il s'agit de la même équation différentielle que celle qui était vérifiée à la question **Q8.** par \vec{m} . On en déduit les deux équations couplées :

$$\begin{cases} \dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} \\ \dot{M}_{1y} = \omega_0 M_{1x} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\ddot{M}_{1y} = -\omega_0^2 M_{1y}$$

et donc à :

$$M_{1y}(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

avec : $M_{1y}(0) = -M_0$ et $\dot{M}_{1y}(0) = \omega_0 M_{1x}(0) = 0$ et donc :

$$M_{1y}(t) = -M_0 \cos(\omega_0 t)$$

et

$$\dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} = M_0 \cos(\omega_0 t) \implies M_{1x}(t) = M_0 \sin(\omega_0 t)$$

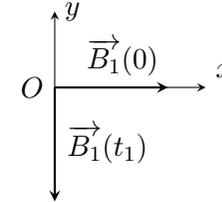
et, finalement :

$$\vec{M}_\perp(t) = \vec{M}_\perp e^{-t/T_2} = -M_0 e^{-t/T_2} [-\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

La norme de ce vecteur est donc : $M_\perp(t) = M_0 e^{-t/T_2}$, ce qui donne une décroissance exponentielle, avec une constante de temps T_2 , conforme à l'allure donnée sur le document 1.

IV. La RMN pulsée

- Q13.** Tout d'abord, $\|\vec{B}_1\| = B_1 = \text{Cste}$. Ensuite, si on représente \vec{B}_1 à $t = 0$, puis à t_1 tel que $\omega t_1 = \pi/2$, nous obtenons :



Ainsi, l'extrémité de \vec{B}_1 décrit un cercle de rayon B_1 dans le sens horaire.

- Q14.** Négliger les phénomènes de relaxation revient à faire $T_1 \rightarrow +\infty$ et $T_2 \rightarrow +\infty$ dans les équations de Bloch. Le champ magnétique vu par le dipôle étant maintenant $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$, il vient :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{M}$$

avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma_p B_0 \vec{e}_z = -\omega_0 \vec{e}_z$ et $\vec{\omega}_1 = -\gamma_p \vec{B}_1 = -\omega_1 \vec{e}_1$.

Q15. Il s'agit d'une rotation de repère dans le sens horaire, ce qui donne :

$$\vec{\omega}(R_1/R_0) = -\omega \vec{e}_z$$

Q16. Utilisons la loi de dérivation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{M} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{M}$$

et, d'autre part :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = -\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M}$$

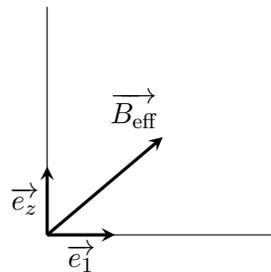
En regroupant les deux expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} &= (\omega - \omega_0) \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M} \\ &= \vec{M} \wedge [(\omega_0 - \omega) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{e}_1] \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p} \vec{e}_z + \frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_1 = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma_p}\right) \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_1$$

qui est bien homogène à un champ magnétique. Ce champ "effectif" est représenté sur le figure ci-dessous, dans le cas où $\omega_0 > \omega$:



Q17. Dans le référentiel tournant, nous sommes ramenés à la situation des questions 9., 10. et 11. Le vecteur aimantation va avoir un mouvement de précession autour de l'axe défini par le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} .

Q18. Si on tient compte des temps de relaxation T_1 et T_2 , ce mouvement de précession va s'amortir. Le vecteur aimantation va venir s'aligner selon l'axe défini par le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} , avec une constante de temps T_1 , tandis que les composantes de \vec{M} orthogonales à cet axe vont tendre vers 0 avec une constante de temps T_2 .

Comme, selon le document 3, la norme de \vec{M} est conservée au cours de ce basculement, le vecteur \vec{M} va finir par s'aligner selon l'axe de \vec{B}_{eff} , avec une norme égale à M_0 .

Q19. Il faut faire varier la direction de l'axe de \vec{B}_{eff} en agissant sur la vitesse angulaire ω du champ tournant et en attendant un temps $T > \max(T_1, T_2)$ pour que \vec{M} ait le temps de s'aligner sur cet axe. Ainsi, pour faire basculer \vec{M} dans le plan Oxy , il est nécessaire que $\omega = \omega_0$.

A.N. : $\omega = \omega_0 = 2,67 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et donc $f = \omega/2\pi = 42,5 \text{ MHz}$, ce qui correspond à des ondes radiofréquence.

On appelle ce phénomène "résonance" parce que ce basculement se produit pour une fréquence caractéristique f_0 du système.

Q20. Il faut que $t_1 > \max(T_1, T_2)$ (déjà répondu à la question précédente). D'après le document 3, $T_1 > T_2$ pour les tissus étudiés et donc il faut que $t_1 > T_1$ qui varie de 0,2 s à 3 s et qui dépend de l'intensité de B_0 .

III. Magnéto-résistance. Mines-Pont PSI 2016

1) Le problème est invariant par toute rotation autour de l'axe Oz et par toute translation le long de l'axe Oz puisqu'on néglige les effets de bord. On a donc $V = V(r)$

2) On a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

ce qui implique :

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \Delta V = 0$$

qui est l'équation de Laplace. On en déduit que :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \text{donc} \quad r \frac{dV}{dr} = C \quad \text{d'où} \quad V(r) = C \ln(r) + C'$$

où C et C' sont deux constantes. Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} V(r_1) = C \ln(r_1) + C' = V_1 \\ V(r_2) = C \ln(r_2) + C' = V_2 \end{cases}$$

On résout pour en déduire que :

$$\boxed{C = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \quad \text{et} \quad C' = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r_1)}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{C}{r} \vec{e}_r = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\vec{e}_r}{r}}$$

3) Un électron de conduction dans le volume $d\tau$, assimilé à une charge ponctuelle M_i de vecteur vitesse \vec{v}_i , est soumis à :

- La force électrique $-e \vec{E}(M_i)$
- La force magnétique $-e \vec{v}_i \wedge \vec{B}$
- La force de frottement $-\lambda \vec{v}_i$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) donne :

$$m_e \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -e \vec{E}(M_i) - e \vec{v}_i \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}_i$$

En sommant sur les δN électrons de conduction contenus dans $d\tau$ on obtient :

$$m_e \sum_{i=1}^{\delta N} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -e \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{E}(M_i) - e \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \wedge \vec{B} - \lambda \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i$$

En supposant que le champ électrostatique varie peu à l'échelle de l'élément de volume $d\tau$ on peut l'assimiler à sa valeur en M situé sur un sommet du petit parallélépipède formant le volume $d\tau$ (et à la distance r de l'axe Oz). D'autre part, en permutant la somme et la dérivation dans le membre de gauche et en utilisant le fait que \vec{B} est uniforme, on obtient :

$$m_e \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right) = -e \delta N \vec{E}(M) - e \left(\sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right) \wedge \vec{B} - \lambda \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i$$

On introduit ensuite la vitesse de dérive $\vec{v}_e^{\rightarrow}(M, t)$ des électrons de conduction en M et à l'instant t . Par définition, c'est la moyenne arithmétique :

$$\vec{v}_e^{\rightarrow}(M, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\delta N} \left(\sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right)$$

On obtient alors :

$$m_e \frac{\partial (\delta N \vec{v}_e^{\rightarrow}(M, t))}{\partial t} = -e \delta N \vec{E}(M) - e \delta N \vec{v}_e^{\rightarrow}(M, t) \wedge \vec{B} - \lambda \delta N \vec{v}_e^{\rightarrow}(M, t)$$

Enfin, comme $\delta N = n d\tau$, que l'élément de volume $d\tau$ reste fixe et que le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{j}(M, t) = -en\vec{v}_e(M, t)$$

(les électrons de conduction sont les seuls PCM puisque les ions sont fixes dans le référentiel d'étude), il vient (tous les champs vectoriels étant évalués au point M et à l'instant t) :

$$-\frac{m_e}{e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} d\tau = -en \vec{E} d\tau + \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau + \frac{\lambda}{e} \vec{j} d\tau$$

En simplifiant $d\tau$, on aboutit à :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}(M) - \frac{e}{m_e} \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B} - \frac{\lambda}{m_e} \vec{j}(M, t)$$

ce qui est bien l'équation demandée.

4) En régime stationnaire on a $\partial \vec{j} / \partial t = \vec{0}$, ce qui conduit à :

$$\vec{j}(M) + \frac{e}{\lambda} \vec{j}(M) \wedge \vec{B} = \frac{ne^2}{\lambda} \vec{E}(M)$$

Comme le point M est à la distance r de Oz et qu'on suppose l'invariance des courants par toute translation de direction Oz et par toute rotation d'axe Oz , on pose :

$$\vec{j}(M) = j_r(r) \vec{e}_r + j_\theta(r) \vec{e}_\theta + j_z(r) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

5) L'équation précédente peut être explicitée sur la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} + \frac{e}{\lambda} \begin{pmatrix} B j_\theta \\ -B j_r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{\lambda} \begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} j_r + (eB/\lambda) j_\theta = (ne^2/\lambda) E(r) \\ j_\theta - (eB/\lambda) j_r = 0 \\ j_z = 0 \end{cases}$$

On résout pour trouver :

$$j_r = \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} ; \quad j_\theta = \frac{eB}{\lambda} \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} \quad \text{et} \quad j_z = 0$$

6) L'équipotentielle est la surface cylindrique de rayon r et de hauteur h . On a donc, avec $d\vec{S} = rd\theta dz \vec{e}_r$:

$$I = \iint_S \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+h} j_r r d\theta dz = \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} 2\pi r h$$

En remplaçant $E(r)$ par son expression on obtient :

$$I = 2\pi h \frac{ne^2}{\lambda} \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}}$$

d'où :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\lambda}{2\pi h ne^2} \ln(r_2/r_1) \left(1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2} \right)$$

Si on note R_0 la résistance en l'absence de champ magnétique alors :

$$R_0 = \frac{\lambda}{2\pi h ne^2} \ln(r_2/r_1)$$

On remarque alors que :

$$R = R_0 \left(1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2} \right) \implies \boxed{\varepsilon = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}}$$

A.N. : $R_0 = 110 \Omega$ et $\varepsilon = 7,9.10^{-11}$

Cette variation relative de résistance est vraiment très faible et probablement très difficile à déceler.