DM n°10 Pour le vendredi 20 décembre 2024

1 De la physique autour d'un tore

Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (ce peut être un rectangle ou un cercle, voir figure 1, mais d'autres figures sont possibles) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\widehat{u_z}$) ou d'une flèche dans le cas général ($\vec{p}$).

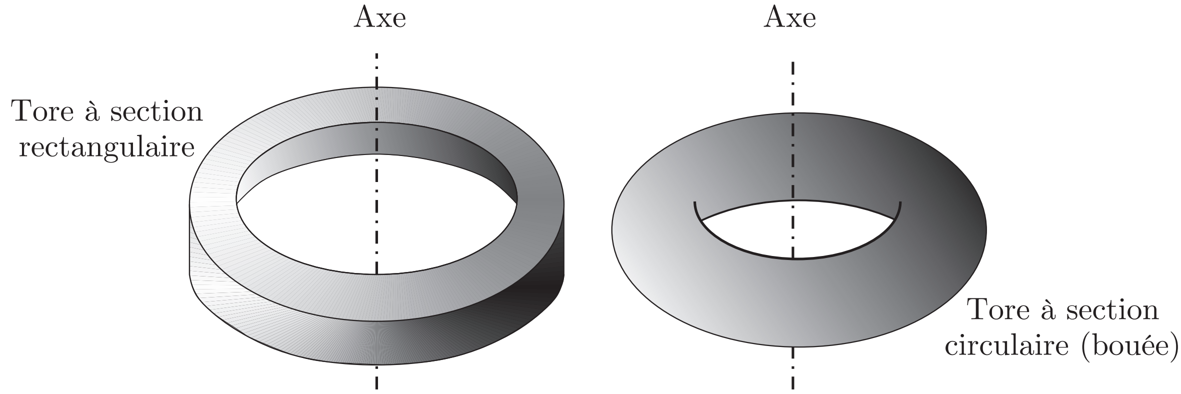


FIGURE 1 – Deux types de tores

I. – Étude d'un conducteur ohmique torique

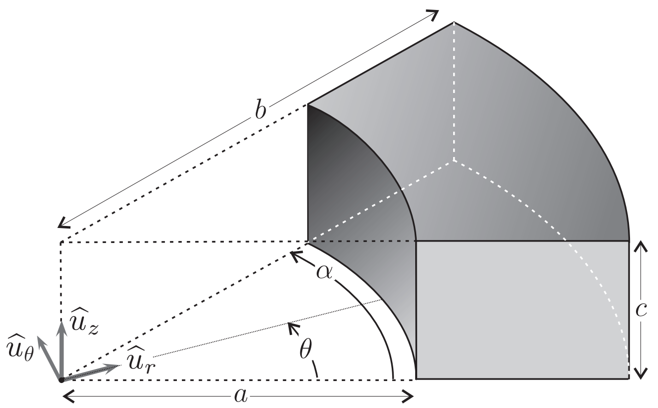


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de 10^8 S · m^{-1}. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, d'épaisseur c.
On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

❏ **6** — On rappelle la valeur numérique de la constante $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

❏ **7** – À partir de l'équation de conservation de la charge électrique, établir une équation différentielle temporelle vérifiée par la densité volumique de charges ρ.

❏ **8** – On note $\rho_0(M)$ la valeur de ρ en un point M à l'instant $t = 0$. Montrer que $\rho(M) \approx 0$ si t est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

Dans la suite, on supposera que $\rho = 0$ dans le conducteur.

❏ **9** — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V.

❏ **10** — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\widehat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ $\vec{E}$ et de la densité de courant $\vec{j}$.

❏ **11** — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a, b, c, γ et α.

❏ **12** — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L. Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a.

II. – Étude d'une pince ampèremétrique

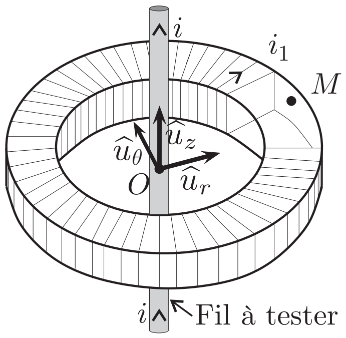


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.
Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.
Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, d'épaisseur c, d'axe (O,z). Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ.
Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\widehat{u}_r + z\widehat{u}_z$ avec $r \in [a,b]$ et $z \in [0,c]$.
Un fil rectiligne infini de même axe (O,z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

❏ **13** — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

❏ **14** — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\widehat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B\,(r)$ en fonction de μ_0, $i(t)$, $i_1(t)$, N et r.

❏ **15** — Calculer le flux Φ de $\vec{B}$ à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

2 Sens d'évolution d'une réaction chimique

L'équilibre de synthèse de l'eau est :

$$2\ H_{2(g)} + O_{2(g)} = 2\ H_2O_{(g)} \quad \Delta_r G^0(T) = 495 - 0{,}033\,T \quad \text{en kJ.mol}^{-1}$$

Un mélange gazeux contient initialement n_1 mol de H_2, n_2 mol de O_2 et n_3 mol de H_2O. Il est à la température T et sous la pression $P = 1$ bar. Déterminer dans les deux cas ci-dessous le sens d'évolution du mélange :

1. $n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}33$ mol et $T = 1500$ K.
2. $n_1 = 2/30$ mol, $n_2 = 1/30$ mol et $n_3 = 0{,}90$ mol pour $T = 3000$ K.

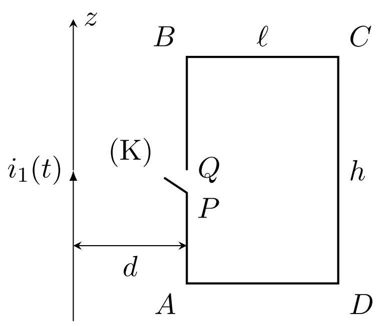
3 Phénomènes d'induction électromagnétique

On se place dans le cadre de l'ARQS.

Un fil rectiligne, d'axe Oz, infiniment long, est parcouru par un courant d'intensité $i_1(t)$. Un cadre rectangulaire métallique $ABCD$, de hauteur $h = AB = CD$, de largeur $\ell = BC = AD$, est placé dans un plan contenant l'axe Oz.

Le cadre métallique $ABCD$ possède une résistance R et une inductance propre L.

Le côté AB, parallèle à l'axe et situé à la distance d du fil, comporte un interrupteur (K) de dimensions négligeables, susceptible de fermer ou d'ouvrir le circuit au niveau de deux points P et Q très rapprochés.



En un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) on note $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ la base locale cylindrique.

1) Établir l'expression vectorielle du champ magnétique $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ créé par le courant d'intensité $i_1(t)$, en tout point M de l'espace situé à une distance r, non nulle, du conducteur filiforme.

2) Déterminer le flux $\Phi_1(t)$ du vecteur $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ à travers le cadre rectangulaire $ABCD$, orienté dans le sens $ABCD$.

Le dispositif précédent est étudié dans diverses situations.

3) <u>*Premier cas*</u> : le cadre est immobile, l'interrupteur (K) est fermé (figure b) et le courant $i_1 = I_1$ est constant et positif. Existe-t-il une f.e.m. (force électromotrice) e_1 induite par le fil dans le cadre ? Si oui, l'exprimer en fonction des données de l'énoncé.

4) <u>*Deuxième cas*</u> : le cadre est immobile et le courant d'intensité i_1 varie au cours du temps selon la loi : $i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega_1 t)$.

a) L'interrupteur (K) est ouvert. Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, la différence de potentiel $V(P,t) - V(Q,t)$ existant entre les points P et Q.

b) L'intensité $i(t)$ du courant dans le cadre est nulle pour $t < 0$ et l'interrupteur (K) est fermé à l'instant $t = 0$. Montrer que l'intensité électrique $i(t)$ induite dans le cadre s'écrit :

$$i(t) = \alpha_1 e^{-t/\tau} + \alpha_2 \cos(\omega t) + \alpha_3 \sin(\omega t)$$

où α_1, α_2, α_3 et τ sont des constantes à déterminer en fonction des données de l'énoncé.

c) Dans le cas du régime sinusoïdal forcé montrer qu'on peut aussi mettre $i(t)$ sous la forme :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

et déterminer I_m et φ en fonction des données de l'énoncé.

5) *Troisième cas* : le courant $i_1 = I_1$ est constant et positif, et l'interrupteur (K) est fermé. Le cadre est mis en mouvement [1], mais il demeure dans un plan contenant l'axe Oz, le côté AB restant parallèle à cet axe. Déterminer la f.e.m. induite e_1 par le fil dans le cadre, dans les deux situations suivantes :

a) la distance d est constante. Le mouvement est un mouvement de rotation uniforme, de pulsation ω_2 autour de l'axe Oz ;

b) la distance d varie maintenant au cours du temps, selon la loi : $d(t) = d_0 + vt$ (où d_0 et v sont des constantes positives) : le cadre s'écarte de l'axe Oz à la vitesse v, dans un mouvement rectiligne de translation uniforme.

1. Ce mouvement est causé par un opérateur qui ne lâche pas le circuit.