Corrigé du DM n°10 - Électromagnétisme

1 De la physique autour d'un tore - Extrait Mines Ponts MP 2014

I. Étude d'un conducteur ohmique torique

6. ε_0 est la permittivité du vide. Son unité est le farad par mètre : F.m^{-1}.

7. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss div $\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0$ et de la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma\,\overrightarrow{E}$, on peur transformer l'équation de conservation de la charge :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0}$$

où la constante de temps τ vaut :

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19}\,\mathrm{s}}$$

On en déduit la solution :

$$\boxed{\rho(M,t) = \rho(M,0)\,e^{-t/\tau}}$$

qui est quasiment négligeable au bout d'une durée $T \approx 5\tau$, c'est à dire **quasiment instantanément**.

8. En un point M, l'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS) consiste à négliger le temps de propagation du champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ entre la distribution de charges et de courants D_{cc} et le point M devant le temps caractéristique τ_{car} d'évolution des charges et des courants.

Si $d_{\max}(M)$ représente la distance maximale entre M et un point de D_{cc} alors l'ARQS est vérifiée au point M si et seulement si :

$$\frac{d_{\max}(M)}{c} \ll \tau_{\text{car}} \qquad (*)$$

L'ensemble des point M vérifiant $(*)$ est appelé **zone ARQS**. En un point M de la zone ARQS, $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ à l'instant t dépendent de l'état des charges $\rho(t)$ et des courants $\overrightarrow{j}(t)$ au même instant t.

Tout se passe comme si la propagation de l'information de D_{cc} vers le point M était instantanée, c'est à dire avec une vitesse de propagation $c \longrightarrow +\infty$. C'est pourquoi on obtient les équations de Maxwell approchées dans l'ARQS en faisant $c \longrightarrow +\infty$ dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j} \quad \text{puisque} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \longrightarrow \overrightarrow{0}}$$

9. On a donc maintenant pour système d'équations vérifiées en régime permanent dans un conducteur ohmique :

$$\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} \;\; ; \;\; \rho = 0 \;\; ; \;\; \operatorname{div}\overrightarrow{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

La dernière équation entraîne qu'il existe un potentiel électrique V tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$. L'équation de Maxwell-Gauss implique alors que :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\Delta V = 0}$$

10. On a maintenant $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$ avec $V(0) = U$ et $V(\alpha) = 0$. V est donc une fonction affine de θ :

$$\boxed{V(\theta) = -\frac{U}{\alpha}\,\theta + U \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{E} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{u}_\theta = \frac{U}{\alpha r}\,\hat{u}_\theta \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{j} = \frac{\gamma U}{\alpha r}\,\hat{u}_\theta}$$

11. L'intensité demandée est le flux du vecteur $\overrightarrow{j}$ à travers la section du tore : $I = \iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\,\hat{u}_\theta$. Il vient donc l'expression :

$$I = \frac{\gamma U}{\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}\int_0^c \mathrm{d}z \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\gamma c}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{a}\right)U$$

qu'on écrit $I = U/R$ avec :

$$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c}\frac{1}{\ln(b/a)}}$$

12. La relation demandée est donc $R = \dfrac{L}{\gamma S}$. Ici, on peut remarquer que :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

si $(b-a) \ll a$. On a donc la valeur approchée :

$$\boxed{R \approx \frac{\alpha a}{\gamma\, c(b-a)}}$$

où on reconnaît $S = c(b-a)$ (section) et $L = \alpha a$ (longueur). On a donc bien $R \approx L/\gamma S$.

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

13. – L'approximation des états quasi-stationnaires (AEQS) a été présentée à la question **8** : elle consiste à négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\vec{j}$, donc à calculer le champ magnétique par les équations $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$ et $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, exactement comme dans le cas magnétostatique. Le théorème de Stokes $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ pour un contour ferme $(\mathcal{C})$ servant de bord orienté à la surface $(\mathcal{S})$ permet alors d'énoncer le théorème d'Ampère, la circulation de $\vec{B}$ sur un tel contour fermé vérifie $\boxed{\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 i_{(\mathcal{S})}}$ où le courant enlacé $i_{(\mathcal{S})}$ est celui qui traverse la surface $(\mathcal{S})$.

14. – Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle des courants $i(t)$ et $i_1(t)$ donc le champ $\vec{B}$ créé par ces courants est perpendiculaire à ces plans de symétrie : $\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\hat{u}_\theta$. Ce champ est également invariant par tout rotation d'un angle multiple de $2\pi/N$; si N est assez grand, il s'agit pratiquement d'une invariance de révolution donc $\vec{B}(M) = B(r,z)\hat{u}_\theta$. On applique alors le théorème d'Ampère à un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r et d'axe (Oz), donc à r et z fixés, et entièrement situé à l'intérieur du tore ; on a alors $\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}\theta\hat{u}_\theta$ donc $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi r B(r,z)$. Le courant traversant un disque de rayon r comporte (dans le sens positif) le courant i au centre en N courants tous égaux à i_1 (puisque le cercle $(\mathcal{C})$ est intérieur au tore, le disque est traversé une seule fois par chacun des fils formant un rectangle) soit $i_{(\mathcal{S})} = i + Ni_1$ et $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\hat{u}_\theta \text{ où } B(r) = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}(i + Ni_1)}$.

15. – Considérant que le bobinage de la pince ampèremétrique est formé de N rectangles de côtés $b-a$ et c, il vient $\Phi = N \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\hat{u}_\theta$ donc $\Phi = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi}(i + Ni_1) \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_0^c \mathrm{d}z$ ou enfin $\boxed{\Phi = \dfrac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \dfrac{a+b}{a}(i + Ni_1)}$. Puisque $\Phi = Li_1 + Mi$ pour i et i_1 quelconque, on peut identifier les deux termes $\boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln \dfrac{a+b}{a}}$ et $\boxed{M = \dfrac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{L}{N}}$.

2 Sens d'évolution d'une réaction chimique

L'équilibre de synthèse de l'eau est :

$$2\ H_{2(g)}\ +\ O_{2(g)}\ =\ 2\ H_2O_{(g)} \qquad \Delta_r G^0(T)\ =\ 495 - 0{,}033T \quad \text{en kJ.mol}^{-1}$$

Un mélange gazeux contient initialement n_1 mol de H_2, n_2 mol de O_2 et n_3 mol de H_2O. Il est à la température T et sous la pression $P = 1$ bar. Déterminer dans les deux cas ci-dessous le sens d'évolution du mélange :

1. *$n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}33$ mol et $T = 1500$ K.*
2. *$n_1 = 2/30$ mol, $n_2 = 1/30$ mol et $n_3 = 0{,}90$ mol pour $T = 3000$ K.*

Calculons le quotient réactionnel dans l'état initial en posant $n_g = n_1 + n_2 + n_3$ le nombre total de moles de gaz. On a avec $P = P^o = 1$ bar :

$$a(\mathrm{H_2}) = \frac{n_1}{n_g}\frac{P}{P^o} = \frac{n_1}{n_g} \quad ; \quad a(\mathrm{O_2}) = \frac{n_2}{n_g} \quad \text{et} \quad a(\mathrm{H_2O}) = \frac{n_3}{n_g}$$

d'où :

$$Q_{r,I} = \frac{a^2(\mathrm{H_2O})}{a^2(\mathrm{H_2})a(\mathrm{O_2})} = \frac{n_3^2\, n_g}{n_1^2\, n_2} = \frac{n_3^2\,(n_1+n_2+n_3)}{n_1^2\, n_2}$$

On en déduit :

$$\Delta_r G_I = \Delta_r G^0(T) + RT\ \ln\left(Q_{r,I}\right) = \Delta_r G^0(T) + RT\ \ln\left(\frac{n_3^2\,(n_1+n_2+n_3)}{n_1^2\, n_2}\right)$$

1. $n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}33$ mol et $T = 1500$ K.

   $\Delta_r G^0(T) = 495\,000 - 33 \times 1500 = 445\ 500$ J.mol^{-1} et donc $\Delta_r G_I = 459{,}2$ kJ.mol^{-1} > 0. La réaction évolue donc dans le sens indirect $\underset{2}{\longleftarrow}$.

2. $n_1 = 2/30$ mol, $n_2 = 1/30$ mol et $n_3 = 0{,}90$ mol pour $T = 3000$ K.

   $\Delta_r G^0(T) = 495\,000 - 33 \times 3000 = 396\ 000$ J.mol^{-1} et donc $\Delta_r G_I = 419{,}2$ kJ.mol^{-1} > 0. La réaction évolue donc à nouveau dans le sens indirect $\underset{2}{\longleftarrow}$.

3 Phénomènes d'induction électromagnétique

1) Dans le cadre de l'A.R.Q.S. les lois de la magnétostatique sont valables (en particulier le théorème d'Ampère). L'analyse des symétries et des invariances, puis l'application du théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et de rayon r permet de montrer que, pour $r > 0$:

$$\boxed{\overrightarrow{B}_1(M,t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}}$$

2) Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre rectangulaire orienté dans le sens ABCD vaut :

$$\Phi_1(t) = \iint_{\mathrm{ABCD}} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\mathrm{ABCD}} B_1\overrightarrow{e_\theta}.\mathrm{d}z\mathrm{d}r\ \overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0 i_1(t)\,h}{2\pi}\int_d^{d+\ell}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 i_1(t)\,h}{2\pi}\ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

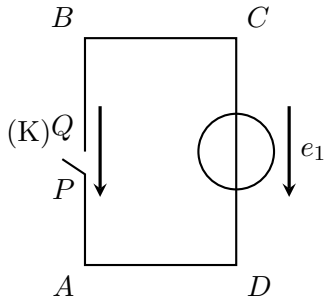
3) <u>*Premier cas*</u> : La f.e.m. induite est nulle car $\Phi_1 = \mathrm{Cste}$ et donc $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = 0$.

4) *Deuxième cas* :

a) Selon la loi de Faraday, la fém induite devient :

$$e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_{m1}\,\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\pi}\,h\,\ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

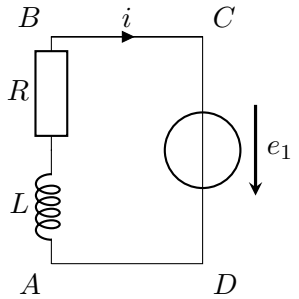
Le schéma électrocinétique équivalent du circuit est donné ci-dessous (la fém e_1 étant orientée dans le sens ABCD). Aucun courant ne circule dans le circuit :



On a donc :

$$\boxed{V(P,t) - V(Q,t) = e_1 = -\frac{\mu_0 I_{m1}\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\pi}\,h\,\ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)}$$

b) Lorsque l'interrupteur (K) est fermé, il faut tenir compte de la résistance R du cadre et de son inductance propre L. Le schéma électrocinétique équivalent devient :



Une loi des mailles conduit à :

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e_1 = E_m \cos(\omega_1 t) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_m = -\frac{\mu_0 I_{m1}\omega_1}{2\pi}\,h\,\ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)}$$

Il s'agit d'un système linéaire analogique dont l'excitation est e_1 et dont la réponse est l'intensité $i(t)$. La solution génrale de cette équation différentielle est :

$$i(t) = \underbrace{\alpha_1\, e^{-t/\tau}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\alpha_2 \cos(\omega_1 t) + \alpha_3 \sin(\omega_1 t)}_{\text{solution particulière}}$$

Dans la solution homogène, la constante de temps vaut $\boxed{\tau = L/R}$ et la solution particulière se détermine par substitution dans l'équation différentielle :

$$-L\alpha_2\omega_1 \sin(\omega_1 t) + L\alpha_3\omega_1 \cos(\omega_1 t) + R\alpha_2 \cos(\omega_1 t) + R\alpha_3 \sin(\omega_1 t) = E_m \cos(\omega_1 t)$$

En identifiant les termes en $\cos(\omega_1 t)$ et $\sin(\omega_1 t)$ on obtient :

$$\begin{cases} R\,\alpha_2 + L\omega_1\,\alpha_3 & = & E_m \\ -L\omega_1\,\alpha_2 + R\,\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\alpha_2 = E_m \frac{R}{R^2 + L^2\omega_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = E_m \frac{L\omega_1}{R^2 + L^2\omega_1^2}}$$

La constante α_1 se calcule en écrivant que $i(0^+) = i(0^-)$ par continuité du courante dans uun inductance. On a donc :

$$\boxed{\alpha_1 = -\alpha_2 = -\,E_m \frac{R}{R^2 + L^2\omega_1^2}}$$

c) Le cas du régime sinusoïdal forcé correspond aux dates t telles que la solution homogène soit négligeable. En pratique $t \geqslant 5\tau$. Dans ce régime on aura :

$$i(t) = \alpha_2 \cos(\omega_1 t) + \alpha_3 \sin(\omega_1 t) = E_m \left\{ \frac{R}{R^2 + L^2\omega_1^2} \cos(\omega_1 t) + \frac{L\omega_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} \sin(\omega_1 t) \right\}$$

On posant :

$$\cos(\varphi) = \frac{L\omega_1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_1^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_1^2}}$$

on obtient bien :

$$\boxed{i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_1^2}} \sin(\omega_1 t - \varphi) \quad \text{donc} \quad I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_1^2}}}$$

5) <u>*Troisième cas*</u> :

a) La fem d'induction est nulle dans ce cas d'après la loi de Faraday, car le flux du champ magnétique est inchangé à tout instant.

On peut également s'en convaincre en se plaçant dans le référentiel du cadre mobile : le champ $\overrightarrow{B_1}$ étant invariant par rotation d'angle $\omega_2 t$ autour de l'axe Oz, le champ perçu par le circuit est invariant.

b) Calculons la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday, le circuit étant toujours orienté dans le sens horaire ABCD. Le flux $\Phi_1(t)$ varie en raison du déplacement du cadre $d(t) = d_0 + vt$ et donc :

$$\Phi_1(t) = \frac{\mu_0 I_1\, h}{2\pi} \ln\left(\frac{d_0 + vt + \ell}{d_0 + vt}\right)$$

d'où :

$$\boxed{e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I_1 v\, h}{2\pi} \frac{\ell}{(d_0 + vt)(d_0 + \ell + vt)}}$$