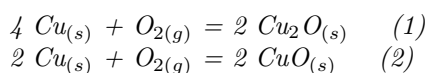


Corrigé du DM n°11 - Thermochimie - Électromagnétisme

1 Thermochimie

À diverses températures T , on relève les valeurs correspondantes des enthalpies libres standard $\Delta_r G^0$ relatives aux réactions (1) et (2) :



Données :

$T(K)$	300	800
$\Delta_r G_1^0 \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$	-300	-230
$\Delta_r G_2^0 \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$	-260	-170

On suppose par ailleurs que $\Delta_r H^0$ et que $\Delta_r S^0$ sont indépendantes de T pour les deux réactions.

- 1) Déterminer $\Delta_r H_k^0$ et $\Delta_r S_k^0$ ($k = 1, 2$) pour les deux réactions.

L'enthalpie et l'entropie standard de la réaction étant indépendantes de la température, l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^0(T)$ de la réaction est une fonction affine de T . Nous avons donc à résoudre un système de deux équations à deux inconnues. En posant $T_a = 300 \text{ K}$ et $T_b = 800 \text{ K}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \Delta_r G^0(T_a) &= \Delta_r H^0 - T_a \Delta_r S^0 \\ \Delta_r G^0(T_b) &= \Delta_r H^0 - T_b \Delta_r S^0 \end{cases}$$

d'où :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r G^0(T_a) - \Delta_r G^0(T_b)}{T_b - T_a}$$

et

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r G^0(T_a) + T_a \Delta_r S^0 = \frac{T_b \Delta_r G^0(T_a) - T_a \Delta_r G^0(T_b)}{T_b - T_a}$$

Application numérique :

	Réaction (1)	Réaction (2)
$\Delta_r H^0 \text{ (en kJ.mol}^{-1}\text{)}$	- 342	- 314
$\Delta_r S^0 \text{ (en J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}\text{)}$	- 140	- 180

- 2) Soit $\text{CuO}_{(s)} + \text{Cu}_{(s)} = \text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$. Déterminer $\Delta_r G_3^0(T)$ pour cette réaction.

$\text{CuO}_{(s)} + \text{Cu}_{(s)} = \text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$ (3). On constate que : (3) = 1/2 x (1) - 1/2 x (2) et donc :

$$\Delta_r H_3^0 = \frac{\Delta_r H_1^0 - \Delta_r H_2^0}{2} = -14 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r S_3^0 = \frac{\Delta_r S_1^0 - \Delta_r S_2^0}{2} = 20 \text{ J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$$

d'où :

$$\Delta_r G_3^0(T) = -14 - 20.10^{-3} T \text{ kJ.mol}^{-1}$$

3) Soit $2 \text{ Cu}_2\text{O}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = 4 \text{ CuO}_{(s)}$. Déterminer $\Delta_r G_4^0(T)$ pour cette réaction.

De même : $2 \text{ Cu}_2\text{O}_{(s)} = \text{O}_{2(g)} = 4 \text{ CuO}_{(s)}$ (4). On constate que (4) = 2 x (2) - (1) d'où :

$$\Delta_r H_4^0 = 2 \Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = -286 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r S_4^0 = 2 \Delta_r S_2^0 - \Delta_r S_1^0 = -220 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

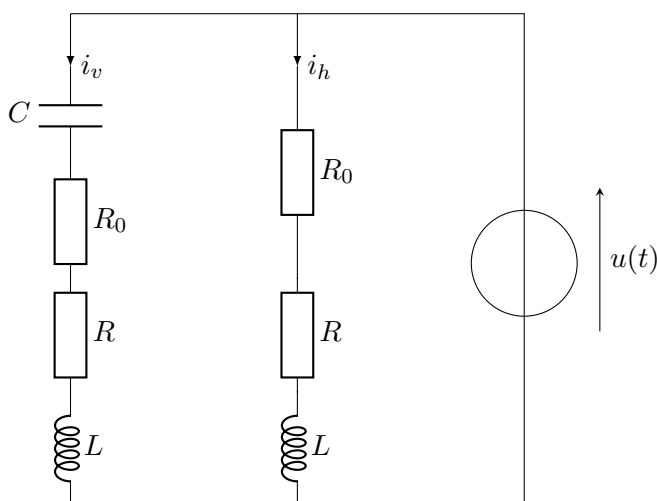
et finalement :

$$\Delta_r G_4^0(T) = -286 + 0,220 T \text{ kJ.mol}^{-1}$$

2 Principe du moteur asynchrone

I. Génération d'un champ magnétique tournant

1. Dessiner le schéma électrocinétique correspondant à ce circuit en y faisant figurer L et R .



2. Déterminer :

a) La valeur de R_0 pour que le courant $i_h(t)$ soit en retard de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.

On doit donc avoir $\varphi_h - \varphi_u = -\pi/4$. On utilise la représentation complexe pour résoudre cette question :

$$\underline{i}_h(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R + R_0 + jL\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \varphi_h - \varphi_u = -\arctan\left(\frac{L\omega_0}{R + R_0}\right) = -\pi/4$$

donc :

$$L\omega_0 = R + R_0 \iff R_0 = L\omega_0 - R$$

b) La valeur de C pour que le courant $i_v(t)$ soit en avance de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.

On a maintenant $\varphi_v - \varphi_u = +\pi/4$. En notation complexe on obtient :

$$\underline{i}_v(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R + R_0 + jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}} \quad \text{d'où} \quad \varphi_v - \varphi_u = -\arctan\left(\frac{L\omega_0 - 1/C\omega_0}{R + R_0}\right) = \pi/4$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{C\omega_0} - L\omega_0 = R + R_0 \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{(L\omega_0 + R + R_0)\omega_0} = \frac{1}{2L\omega_0^2}$$

- c) *Application numérique : $L = 200 \text{ mH}$, $R = 0,5 \Omega$ et $f_0 = \omega_0/2\pi = 100 \text{ Hz}$. Calculer R_0 et C .*

$$R_0 = 125 \Omega \text{ et } C = 6,3 \mu\text{F}$$

Ce sont des valeurs tout à fait courantes en TP.

- d) *Montrer que les amplitudes I_h et I_v sont identiques lorsque les conditions précédentes sont remplies.*

On a :

$$I_h = |i_h(t)| = \frac{U}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (L\omega_0)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2(R + R_0)^2}}$$

et

$$I_v = |i_v(t)| = \frac{U}{\sqrt{(R + R_0)^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2(R + R_0)^2}}$$

Les amplitudes des deux courants sont bien identiques.

3. *Montrer que le champ magnétique total $\vec{B}(A, t)$ créé au point A par l'ensemble des deux bobines est un champ tournant dont on précisera le sens de rotation.*

Les phases des deux courants électriques sont respectivement $\varphi_h = \varphi_u - \pi/4 = -\pi/2$ et $\varphi_v = \varphi_u + \pi/4 = 0$ puisque $\varphi_u = -\pi/4$. En notant $I_0 = I_h = I_v$ la valeur commune de l'amplitude des courants, on a donc :

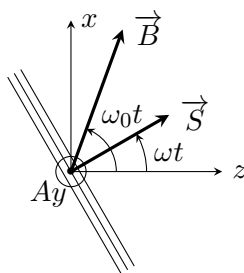
$$i_h(t) = I_0 \cos(\omega_0 t - \pi/2) = I_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i_v(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$$

ce qui produit, par le théorème de superposition, un champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B}(A, t) &= \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z + \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x \\ &= B_0 [\cos(\omega_0 t) \vec{e}_z + \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x] \end{aligned}$$

Il s'agit d'un champ magnétique tournant dans le **sens trigonométrique**.

II. Principe du moteur asynchrone



4. *Déterminer la force électromotrice induite dans (E) par le champ magnétique tournant. En déduire que (E) est parcouru par un courant induit $i(t)$ vérifiant l'équation différentielle :*

$$L_s \frac{di}{dt} + R_s i = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

où $\Omega = \omega_0 - \omega$. On donnera l'expression de la constante Φ_0 en fonction de N , S et B_0 .

Comme $\vec{B}$ est uniforme à l'échelle de la surface des spires, son flux à travers S est (tenir compte des N spires) :

$$\Phi(\vec{B}/S) = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N B_0 S \cos[(\omega_0 - \omega)t]$$

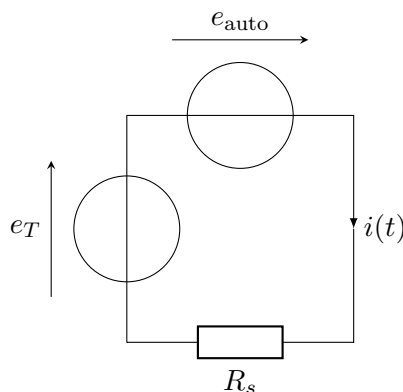
D'après la loi de Faraday, la fém induite par ce champ magnétique tournant est :

$$e_T = -\frac{d\Phi(\vec{B}/S)}{dt} = NB_0S(\omega_0 - \omega) \sin[(\omega_0 - \omega)t]$$

De plus, comme on tient compte de l'inductance L_s de l'enroulement, il y a une **fém autoinduite** qui s'écrit :

$$e_{\text{auto}} = -L_s \frac{di}{dt}$$

Ainsi, le schéma électrocinétique équivalent à l'enroulement est :



d'où :

$$e_T + e_{\text{auto}} = R_s i \quad \text{c'est à dire} \quad L_s \frac{di}{dt} + R_s i = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t) \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = NB_0 S$$

5. On se place en régime sinusoïdal forcé. L'intensité du courant dans (E) est alors sinusoïdale de pulsation Ω et de la forme :

$$i(t) = \lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)$$

où λ et μ sont deux constantes.

Déterminer les expressions de λ et μ en fonction de Φ_0 , Ω , L_s et R_s .

On substitue l'expression de $i(t)$ dans l'équation différentielle de la question précédente et on regroupe les termes en $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$. On obtient :

$$(L_s \Omega \mu + R_s \lambda) \cos(\Omega t) + (R_s \mu - L_s \Omega \lambda) \sin(\Omega t) = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

Cette équation devant être valable pour tout t , on peut particulariser en prenant $\Omega t = 0$ et $\Omega t = \pi/2$. On obtient alors le système de deux équations :

$$\begin{cases} L_s \Omega \mu + R_s \lambda = 0 \\ R_s \mu - L_s \Omega \lambda = \Phi_0 \Omega \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\Phi_0 \Omega \frac{L_s \Omega}{R_s^2 + (L_s \Omega)^2} \\ \mu = \Phi_0 \Omega \frac{R_s}{R_s^2 + (L_s \Omega)^2} \end{cases}$$

6. Donner l'expression du moment magnétique $\vec{m}$ de l'enroulement (E). En déduire le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ magnétique tournant.

On sait que : $\vec{m} = N i(t) \vec{S}$ et donc, puisque $\vec{B}$ est uniforme :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(t) &= \vec{m} \wedge \vec{B} = N B_0 S i(t) \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ 0 \\ \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} \\ &= \Phi_0 i(t) [\sin(\omega_0 t) \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t)] \vec{e}_y\end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(t) = \Phi_0 i(t) \sin[(\omega_0 - \omega)t] \vec{e}_y = \Phi_0 i(t) \sin(\Omega t) \vec{e}_y$$

7. En réalité le dispositif possède une grande inertie mécanique et la grandeur significative à considérer est la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ de $\vec{\Gamma}(t)$. Montrer que :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \Gamma \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \Gamma = \frac{\Omega R_s \Phi_0^2}{2(R_s^2 + L_s^2 \Omega^2)}$$

En remplaçant l'intensité $i(t)$ par son expression obtenue à la question 11., il vient :

$$\vec{\Gamma}(t) = \Phi_0 \lambda \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \vec{e}_y + \Phi_0 \mu \sin^2(\Omega t) \vec{e}_y$$

En passant à la valeur moyenne, sachant que $\langle \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \rangle = 0$ et $\langle \sin^2(\Omega t) \rangle = 1/2$, on obtient :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{\Phi_0 \mu}{2} \vec{e}_y = \frac{\Omega R_s \Phi_0^2}{2(R_s^2 + L_s^2 \Omega^2)} \vec{e}_y$$

8. On donne ci-dessous l'allure du moment moyen Γ en fonction de la vitesse angulaire ω de (E).
Quelle est la plage de pulsations ω pour lesquelles ce moment est effectivement moteur ?

Le couple est moteur lorsque $\Gamma > 0$, c'est à dire si $0 < \omega < \omega_0$. Le champ magnétique tournant doit donc tourner plus vite que l'enroulement.

9. Le mécanisme pivot n'est pas parfait et il exerce un moment mécanique résistant constant $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_y$ ($\Gamma_r > 0$) en raison de frottements. On suppose que :

$$\Gamma(0) < \Gamma_r < \Gamma_{\max}$$

À l'aide du théorème du moment cinétique et en ne considérant que le moment moyen pour les forces de Laplace, établir l'équation qui découle de la constance de ω . Utiliser le graphe précédent pour montrer qu'il n'y a alors que deux valeurs possibles ω_1 et ω_2 de la vitesse angulaire de rotation.

En régime permanent, ω est constante et on a :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Gamma = \Gamma_r}$$

On trace donc la droite horizontale d'équation $y = \Gamma_r$. Elle vient couper la courbe $\Gamma = f(\omega)$ pour deux pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$

10. Étudier la stabilité de chacun de ces deux régimes de fonctionnement.

La rotation à ω_2 est stable et celle à ω_1 est instable. Montrons-le pour ω_2 .

- Si à partir d'une vitesse de rotation ω_2 , la vitesse angulaire ω augmente légèrement pour une raison ou une autre, alors le couple moteur Γ diminue, donc $\Gamma - \Gamma_r$ devient négatif, ce qui fait diminuer ω d'après le TMC. La rotation est donc ramenée à son point d'équilibre ω_2
- Inversement, si à partir de ω_2 la vitesse angulaire ω diminue légèrement pour une raison ou une autre, alors le couple moteur Γ augmente, donc $\Gamma - \Gamma_r$ devient positif, ce qui fait alors augmenter ω . La rotation est donc à nouveau ramenée à son point d'équilibre ω_2