

Étude électromagnétique d'un solénoïde en régime variable
Données et formulaire en coordonnées cylindriques :

 Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

 Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

L'espace est rapporté à un repère $R = (Oxyz)$. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et on donne :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{e}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta + 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{e}_\theta + \Delta A_z \vec{e}_z$$

et

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A) Propriétés électromagnétiques d'un métal

On considère un échantillon de métal possédant une conductivité électrique $\gamma = 1,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ et on admettra qu'en tout point de ce conducteur, les équations de Maxwell peuvent être écrites en utilisant les constantes ε_0 et μ_0 du vide.

- 1) a) Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge électrique que la densité volumique de charges en un point M quelconque mais fixé de l'échantillon vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \frac{\rho(M, t)}{\tau} = 0$$

On exprimera τ en fonction de γ et de ε_0 .

- b) En déduire $\rho(M, t)$ en fonction du temps. On posera $\rho_0(M) = \rho(M, t = 0)$. Application numérique : calculer la constante τ . Que peut-on en déduire quant à la densité volumique de charges dans le métal ?

Dans toute la suite on considèrera que $\rho(M, t) = 0$ en tout point du volume du métal.

- c) Quelle est alors la caractéristique de la densité de courant $\vec{j}(M, t)$ dans le métal ? En particulier, dans le cas où celui-ci a la forme d'un fil, que peut-on dire des intensités électriques $i_{S_1}(t)$ et $i_{S_2}(t)$ qui traversent deux sections S_1 et S_2 de ce fil ?
- d) D'autre part, dans le cas où le champ électrique en un point M du métal est donné par $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_m(M) \cos(\omega t + \varphi(M))$, montrer que la densité de courant de déplacement est négligeable devant la densité de courant de conduction si la fréquence $f = \omega/2\pi$ est inférieure à une fréquence maximale f_{\max} dont on donnera l'expression en fonction de ε_0 et γ , ainsi que la valeur numérique.

B) Étude d'un solénoïde en basse fréquence

On considère un solénoïde infini (\mathcal{S}) d'axe Oz formé de spires circulaires jointives, de rayon intérieur $a = 2 \text{ cm}$ et de section carrée d'arête $b = 0,5 \text{ mm}$. Chaque spire est constituée de cuivre et elle est enrobée par une couche d'isolant électrique d'épaisseur négligeable. L'intérieur du solénoïde est de l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide.

On suppose que les spires sont orientées dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz et sont toutes parcourues par un courant de même intensité $i(t)$ donnée par :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

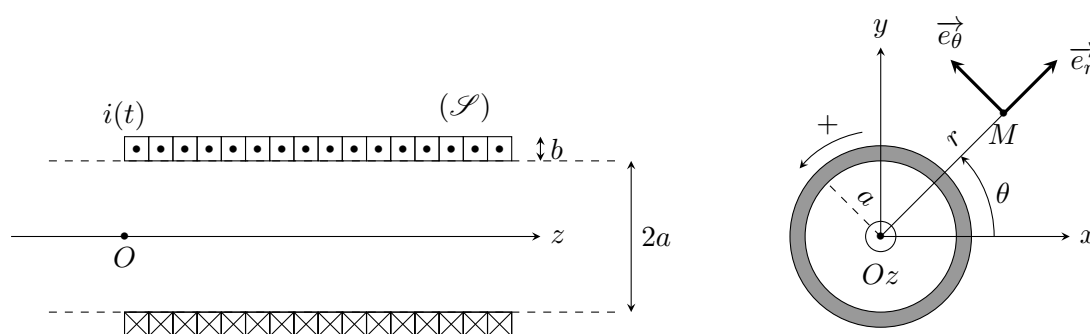


FIGURE 1 –

- 2) a) Montrer que l'espace $a \leq r \leq a + b$ peut être modélisé comme un volume de cuivre parcouru par une densité de courant $\vec{j}(P, t) = j(t) \vec{e}_\theta(P)$ où P est un point de ce volume et $\vec{e}_\theta(P)$ le vecteur unitaire orthoradial de la base cylindrique locale en P . On donnera l'expression de $j(t)$ en fonction de $i(t)$ et de b .
- b) Montrer que les symétries et invariances impliquent qu'en tout point M de l'espace les champs électrique et magnétique créés par cette distribution de courant peuvent s'écrire :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_z$$

- 3) On s'intéresse à l'espace situé à l'intérieur du solénoïde ($r < a$).

- a) Montrer qu'en tout point M de cet espace on a :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- b) On suppose que le champ magnétique s'écrit sous la forme $\vec{B}(r, t) = B_0(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Montrer que $B_0(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} B_0(r) = 0 \quad (1)$$

- c) On cherche la solution de l'équation différentielle précédente sous la forme d'un développement en série entière :

$$B_0(r) = B_0(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n$$

Déterminer les coefficients α_0 et α_1 , ainsi qu'une récurrence reliant α_n à α_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p (p!)^2}$$

Remarque :

Si on pose $x = \omega r/c$, la série entière précédente définit la fonction de Bessel de première espèce $J_0 : x \mapsto J_0(x)$ et d'indice nul. Cette fonction est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :

$$J_0(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{4^p (p!)^2}$$

De façon plus générale, on définit les fonctions de Bessel de première espèce et d'indice $n \in \mathbb{N}$, $J_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, J_n(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+n}}{2^{2p+n} p! (p+n)!}$$

Pour $r < a$, le champ magnétique s'écrit donc :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) J_0(x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega r}{c}$$

On montre d'ailleurs qu'il s'agit de la solution générale de l'équation (1) qui reste bornée dans l'espace $r < a$.

d) À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que, pour $r < a$, le champ électrique $E(r, t)$ admet un développement en série entière de la forme :

$$E(r, t) = B_0(0) \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p p! (p+1)!}$$

4) On se limite aux "basses" fréquences, c'est à dire aux fréquences qui vérifient la condition $\omega a/c \leq 1/100$. Dans cette approximation on réduit les deux séries entières intervenant dans les expressions de $B(r, t)$ et $E(r, t)$ à leurs termes d'ordre 0.

- Expliciter la fréquence maximale f_M déduite de la condition précédente. En donner la valeur numérique et comparer à la fréquence f_{\max} explicitée à la question 1)d).
- Donner dans ce cas les expressions approchées de $B(r, t)$ et $E(r, t)$.
- On suppose qu'à ce même degré d'approximation, le champ magnétique est nul dans l'espace $r > a + b$. En déduire à l'aide du théorème d'Ampère et par un choix judicieux de la courbe d'intégration l'expression de $B_0(0)$ en fonction de μ_0 , b et I_m .
- Désignons par n le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Quelle est la relation entre n et b ? Montrer alors que, pour $r < a$:

$$\vec{B}(M, t) = \mu_0 n I_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M, t) = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$$

- 5) On souhaite établir un bilan énergétique pour le champ électromagnétique dans le solénoïde, c'est à dire pour $r < a$. On se place toujours dans l'approximation basse fréquence $\omega a/c \leq 1/100$.
- Montrer que, dans cette région de l'espace, la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m .
 - Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.
 - En déduire que l'identité locale de Poynting est bien vérifiée dans le solénoïde ($r < a$).

C) Chauffage d'un métal par induction électromagnétique

Note : les données numériques initiales ont été modifiées pour obtenir une fréquence f_M plus réaliste pour le physicien.

Le chauffage d'un cylindre métallique est obtenu en plaçant celui-ci au centre du solénoïde (\mathcal{S}) précédent (toujours considéré comme infini, à spires carrées jointives et comportant n spires par mètre, comme dans la partie B)), parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I_m (figure 2). La longueur du cylindre métallique est supposée infinie, comme celle du solénoïde et son rayon est $a = 2$ cm.

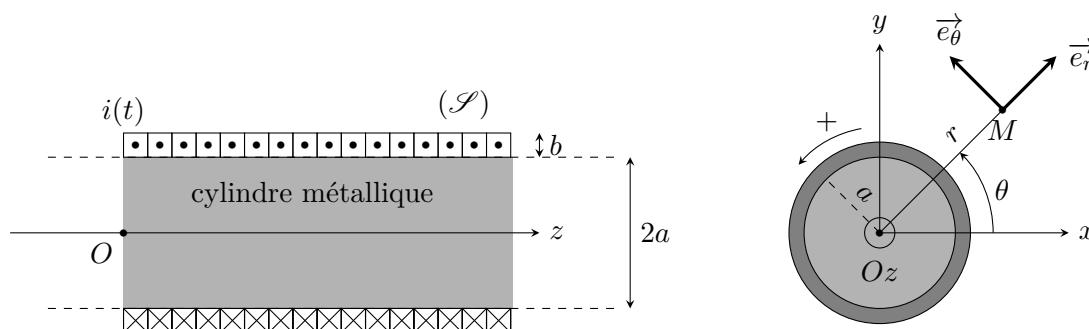


FIGURE 2 –

Le métal chauffé est un acier de conductivité électrique $\gamma = 10^5 \text{ S.m}^{-1}$ et dont les constantes électromagnétiques sont ε_0 et μ_0 .

Les symétries et invariances de la situation suggèrent d'écrire les champs électrique et magnétique correspondant à ce problème sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_z$$

Dans la suite, on posera $B(r, t) = \text{Re}[\underline{B}(r, t)]$ avec $\underline{B}(r, t) = \underline{B}_0(r) e^{j\omega t}$ et où $\underline{B}_0(r)$ est une fonction de r à valeurs complexes. $\underline{B}(r, t)$ est la représentation complexe du champ magnétique.

On se place dans les mêmes conditions d'approximation que celles étudiées à la question 1) : $\rho = 0$ et $f \leq f_{\max}$.

- Écrire les équations de Maxwell en un point M du cylindre métallique.
 - En déduire que dans le cylindre métallique, $B(r, t)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\Delta B(r, t) = \lambda \frac{\partial B(r, t)}{\partial t}$$

et expliciter λ en fonction de μ_0 , μ_r et de γ .

- c) Compte-tenu de la linéarité de l'équation précédente, la représentation complexe $\underline{B}(r, t)$ satisfait à la même équation que $B(r, t)$. En déduire que :

$$\frac{d^2 \underline{B}_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{B}_0(r)}{dr} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{B}_0(r) = 0$$

à condition de poser :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \gamma \omega}}$$

Quelle est la dimension de δ ?

Dans le cas des basses fréquences, il est admis que $\underline{B}_0(r)$ est bien représentée par un développement en série tel que :

$$\underline{B}_0(r) = \underline{B}_0(0) (1 + \underline{\alpha}_1 r + \underline{\alpha}_2 r^2 + \dots + \underline{\alpha}_n r^n + \dots) = \underline{B}_0(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{\alpha}_n r^n$$

où $\underline{\alpha}_n \in \mathbb{C}$

- d) Établir les relations de récurrence entre les coefficients $\underline{\alpha}_n$. Préciser en particulier la valeur de $\underline{\alpha}_1$, celle de $\underline{\alpha}_2$ et la relation entre $\underline{\alpha}_n$ et $\underline{\alpha}_{n-2}$. Montrer que dans le cylindre :

$$\underline{B}_0(r) = \underline{B}_0(0) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^p}{2^p (p!)^2} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2p}$$

7) On se place dans des conditions expérimentales telles que $a/\delta \leq 1/10$.

- a) Déterminer l'expression ainsi que la valeur numérique de la fréquence maximale f_M mise en évidence.

Dans le cas où $f \leq f_M$, on admet que le développement de $\underline{B}_0(r)$ est correctement exprimé en ne conservant que les deux termes principaux de la série entière, les autres termes étant considérés comme négligeables. De plus on admettra que $\underline{B}_0(0)$ est réel et on posera $\underline{B}_0(0) = B_0 \in \mathbb{R}$

- b) Montrer que :

$$B(r, t) = \text{Re}[\underline{B}(r, t)] = B_0 \cos(\omega t) - B_0 \frac{r^2}{2\delta^2} \sin(\omega t)$$

- c) En déduire la densité de courant \vec{j} dans le métal au premier ordre en r sous la forme : $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ et préciser l'expression de $j(r, t)$.

- 8) a) Calculer la puissance volumique moyenne (moyenne temporelle) $p_v(r)$ dissipée par effet Joule dans le métal. En déduire la puissance moyenne P_{moy} dissipée dans une longueur $h = 10$ cm de cylindre.
- b) Tracer un diagramme logarithmique en représentant $\log_{10} P_{\text{moy}}$ en fonction de $\log_{10} f$ pour $10^{-5} f_M < f < f_M$.