

Étude électromagnétique d'un solénoïde en régime variable. Corrigé.

Données et formulaire en coordonnées cylindriques :

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

L'espace est rapporté à un repère $R = (Oxyz)$. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et on donne :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{e}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta + 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{e}_\theta + \Delta A_z \vec{e}_z$$

et

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A) Propriétés électromagnétiques d'un métal

On considère un échantillon de métal possédant une conductivité électrique $\gamma = 1,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ et on admettra qu'en tout point de ce conducteur, les équations de Maxwell peuvent être écrites en utilisant les constantes ε_0 et μ_0 du vide.

- 1) a) Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge électrique que la densité volumique de charges en un point M quelconque mais fixé de l'échantillon vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \frac{\rho(M, t)}{\tau} = 0$$

On exprimera τ en fonction de γ et de ε_0 .

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

donc

$$\gamma \operatorname{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Or, l'équation de Maxwell-Gauss indique que $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$$

On pose alors : $\tau = \varepsilon_0/\gamma$.

- b) En déduire $\rho(M, t)$ en fonction du temps. On posera $\rho_0(M) = \rho(M, t = 0)$. Application numérique : calculer la constante τ . Que peut-on en déduire quant à la densité volumique de charges dans le métal ?

On en déduit que, en un point M du volume du métal :

$$\rho(M, t) = \rho(M, t = 0) e^{-t/\tau} = \rho_0(M) e^{-t/\tau}$$

A.N. : $\tau = 8,85 \times 10^{-19} \text{ s} \approx 10^{-18} \text{ s}$.

Il s'ensuit que si la densité volumique de charges dans le cuivre était éventuellement non nulle à l'instant $t = 0$, elle tend très rapidement vers 0 (au bout de quelques τ).

Dans toute la suite on considèrera que $\rho(M, t) = 0$ en tout point du volume du métal.

- c) Quelle est alors la caractéristique de la densité de courant $\vec{j}(M, t)$ dans le métal ? En particulier, dans le cas où celui-ci a la forme d'un fil, que peut-on dire des intensités électriques $i_{S_1}(t)$ et $i_{S_2}(t)$ qui traversent deux sections S_1 et S_2 de ce fil ?

Si $\rho = 0$ alors la densité de courant vérifie $\text{div } \vec{j} = 0$: \vec{j} est donc un champ vectoriel à flux conservatif. Cela a pour conséquence que :

$$\boxed{i_{S_1}(t) = i_{S_2}(t)}$$

- d) D'autre part, dans le cas où le champ électrique en un point M du métal est donné par $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_m(M) \cos(\omega t + \varphi(M))$, montrer que la densité de courant de déplacement est négligeable devant la densité de courant de conduction si la fréquence $f = \omega/2\pi$ est inférieure à une fréquence maximale f_{\max} dont on donnera l'expression en fonction de ε_0 et γ , ainsi que la valeur numérique.

La densité de courant de conduction est $\vec{j}_c = \gamma \vec{E} = \gamma \vec{E}_m(M) \cos(\omega t + \varphi(M))$ tandis que la densité de courant de déplacement vaut :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \omega \vec{E}_m(M) \sin(\omega t + \varphi(M))$$

Comparons les amplitudes des ces deux grandeurs :

$$\boxed{\frac{\text{amp} \cdot \vec{j}_d}{\text{amp} \vec{j}_c} = \frac{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}_m(M)\|}{\gamma \|\vec{E}_m(M)\|} = \tau \omega}$$

où τ est la constante de temps introduite à la question précédente. Compte-tenu de la petitesse de τ on remarque que $\tau \omega \ll 1$ pour un grand nombre de fréquences. Plus précisément :

$$2\pi\tau f \leq \frac{1}{100} \iff f \leq \frac{1}{200\pi\tau} = 1,8 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

d'où :

$$\boxed{f_{\max} = 1,8 \times 10^{15} \text{ Hz}}$$

ce qui correspond à de l'**ultra-violet**.

B) Étude d'un solénoïde en basse fréquence

On considère un solénoïde infini (\mathcal{S}) d'axe Oz formé de spires circulaires jointives, de rayon intérieur $a = 2 \text{ cm}$ et de section carrée d'arête $b = 0,5 \text{ mm}$. Chaque spire est constituée de cuivre et elle est enrobée par une couche d'isolant électrique d'épaisseur négligeable. L'intérieur du solénoïde est de l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide.

On suppose que les spires sont orientées dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz et sont toutes parcourues par un courant de même intensité $i(t)$ donnée par :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

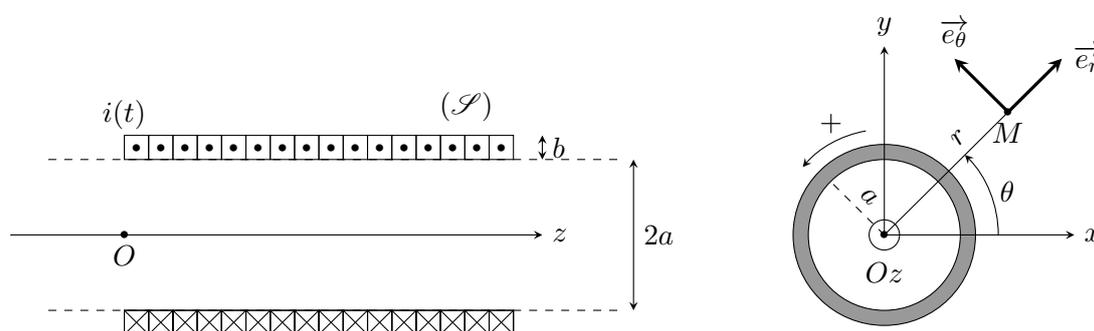


FIGURE 1 –

- 2) a) Montrer que l'espace $a \leq r \leq a + b$ peut être modélisé comme un volume de cuivre parcouru par une densité de courant $\vec{j}(P, t) = j(t) \vec{e}_\theta(P)$ où P est un point de ce volume et $\vec{e}_\theta(P)$ le vecteur unitaire orthoradial de la base cylindrique locale en P . On donnera l'expression de $j(t)$ en fonction de $i(t)$ et de b .

On sait que le vecteur densité de courant est orthogonal à la section du fil et qu'il est uniforme sur cette section. On en déduit qu'en un point P quelconque d'une section $s = b^2$ du fil on a :

$$\vec{j}(P, t) = \frac{i(t)}{b^2} \vec{e}_\theta(P)$$

Or, tout point P de l'espace $a \leq r \leq a + b$ appartient une section d'une unique spire donnée (puisque l'on néglige l'espace occupé par l'isolant électrique qui enrobe le fil). Il en résulte que l'expression précédente est valable en tout point P de l'espace $a \leq r \leq a + b$.

$$\boxed{\vec{j}(P, t) = j(t) \vec{e}_\theta(P) \quad \text{avec} \quad j(t) = \frac{i(t)}{b^2}}$$

- b) Montrer que les symétries et invariances impliquent qu'en tout point M de l'espace les champs électrique et magnétique créés par cette distribution de courant peuvent s'écrire :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_z$$

Soit $M(r, \theta, z)$ un point quelconque de l'espace et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique locale en M .

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de d'antisymétrie des charges et des courants (comme $\rho = 0$ la distribution de charges et de courants est ici réduite à une distribution de courants) contenant M . Il s'agit donc d'un plan d'antisymétrie de \vec{E} , ce qui implique :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t) \vec{e}_\theta$$

De plus, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de de symétrie des charges et des courants contenant M . Il s'agit donc d'un plan d'antisymétrie de \vec{B} et donc :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, \theta, z, t) \vec{e}_z$$

Cette distribution de charges et de courants est invariante par toute rotation d'axe Oz et par toute translation de direction \vec{e}_z et on a donc :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_z}$$

3) On s'intéresse à l'espace situé à l'intérieur du solénoïde ($r < a$).

a) Montrer qu'en tout point M de cet espace on a :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dans l'espace $r < a$ les équations de Maxwell-Thomson, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent respectivement :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On a donc :

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \text{rot } \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\text{rot } \vec{E})}{\partial t} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Or :

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{B}) = \text{grad } (\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

ce qui montre que :

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

b) On suppose que le champ magnétique s'écrit sous la forme $\vec{B}(r, t) = B_0(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Montrer que $B_0(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} B_0(r) = 0$$

Avec la forme proposée on a :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 B_0(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} = (\Delta B_0(r)) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

En projetant sur \vec{e}_z et en utilisant l'expression du Laplacien donné dans le formulaire on obtient :

$$\forall t, \forall r < a, \left[\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} B_0(r) \right] \cos(\omega t) = 0$$

ce qui implique, en choisissant un t_0 particulier tel que $\cos(\omega t_0) \neq 0$:

$$\boxed{\forall r < a, \frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} B_0(r) = 0}$$

c) On cherche la solution de l'équation différentielle précédente sous la forme d'un développement en série entière :

$$B_0(r) = B_0(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n$$

Déterminer les coefficients α_0 et α_1 , ainsi qu'une récurrence reliant α_n à α_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p (p!)^2}$$

On remarque déjà que $\alpha_0 = 0$. De plus on a :

$$\frac{dB_0(r)}{dr} = B_0(0) \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n r^{n-1}$$

donc, en posant $k = n - 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} &= B_0(0) \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n r^{n-2} = B_0(0) \left\{ \frac{\alpha_1}{r} + \sum_{n=2}^{+\infty} n \alpha_n r^{n-2} \right\} \\ &= B_0(0) \left\{ \frac{\alpha_1}{r} + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) \alpha_{k+2} r^k \right\} \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} = B_0(0) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \alpha_n r^{n-2} = B_0(0) \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) \alpha_{k+2} r^k$$

k étant un indice muet, on peut le renommer n . Il vient alors :

$$\forall r \in]0, a[, \frac{\alpha_1}{r} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ (n+2)^2 \alpha_{n+2} + \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_n \right\} r^n = 0$$

et donc :

$$\alpha_0 = 1 \quad ; \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{n+2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\alpha_n}{(n+2)^2}$$

Tous les termes d'indice impair sont nuls et les termes d'indice pairs vérifient l'équation de récurrence :

$$\boxed{\alpha_{2p} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\alpha_{2(p-1)}}{4p^2} \quad \text{si} \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = 1}$$

On a donc :

$$\frac{\alpha_{2p}}{\alpha_0} = \underbrace{\frac{\alpha_{2p}}{\alpha_{2(p-1)}} \times \frac{\alpha_{2(p-1)}}{\alpha_{2(p-2)}} \times \dots \times \frac{\alpha_{2.1}}{\alpha_{2.0}}}_{p \text{ facteurs}} = (-1)^p \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^p \frac{1}{4^p (p!)^2}$$

d'où :

$$\alpha_{2p} = (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{1}{4^p (p!)^2} \quad \text{si } p \geq 1 \quad \text{et } \alpha_0 = 1$$

Manifestement la première expression convient aussi pour $p = 0$ puisque par convention on a $0! = 1$, ce qui permet de poser :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha_{2p} = (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{1}{4^p (p!)^2}$$

Finalement, lorsque $r < a$ le champ magnétique s'écrit :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p (p!)^2}$$

Remarque :

Si on pose $x = \omega r/c$, la série entière définit la fonction de Bessel de première espèce $J_0 : x \mapsto J_0(x)$ et d'indice nul. Cette fonction est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :

$$J_0(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{4^p (p!)^2}$$

De façon plus générale, on définit les fonctions de Bessel de première espèce et d'indice $n \in \mathbb{N}$, $J_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, J_n(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+n}}{2^{2p+n} p! (p+n)!}$$

Pour $r < a$, le champ magnétique s'écrit donc :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) J_0(x) \quad \text{avec } x = \frac{\omega r}{c}$$

On montre d'ailleurs qu'il s'agit de la solution générale de l'équation (XX) qui reste bornée dans l'espace $r < a$.

- d) À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que, pour $r < a$, le champ électrique $E(r, t)$ admet un développement en série entière de la forme :

$$E(r, t) = B_0(0) \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p p! (p+1)!}$$

Pour $r < a$, l'équation de Maxwell-Ampère conduit à :

$$-\frac{\partial B(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E(r, t)}{\partial t}$$

ce qui conduit à :

$$E(r, t) = -c^2 B_0(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{2p r^{2p-1}}{4^p (p!)^2}$$

Le terme de rang nul ne contribuant pas à la série entière on peut la faire démarrer à partir de $p = 1$, puis poser $k = p - 1$, ce qui donne :

$$E(r, t) = -c^2 B_0(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k+2} \frac{2(k+1) r^{2k+1}}{4^{k+1} ((k+1)!)^2}$$

et conduit donc à, après avoir renommé k en p :

$$E(r, t) = B_0(0) \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2p} \frac{r^{2p}}{4^p p! (p+1)!}$$

- 4) On se limite aux "basses" fréquences, c'est à dire aux fréquences qui vérifient la condition $\omega a/c \leq 1/100$. Dans cette approximation on réduit les deux séries entières intervenant dans les expressions de $B(r, t)$ et $E(r, t)$ à leurs termes d'ordre 0.

- a) Expliciter la fréquence maximale f_M déduite de la condition précédente. En donner la valeur numérique et comparer à la fréquence f_{\max} explicitée à la question 1)d).

Comme $\omega = 2\pi f$, on a donc :

$$f \leq \frac{c}{200\pi a} = f_M \quad \text{AN} \quad f_M \approx 24 \text{ MHz}$$

On constate que $f_M \ll f_{\max}$. Ainsi, si $f \leq f_M$, on peut à la fois négliger le courant de déplacement dans les fils de cuivre qui constituent le solénoïde (et donc s'assurer que le courant $i(t)$ ne dépend pas de la position de la section du fil) et négliger les termes d'ordre supérieurs à 0 dans les séries entières.

- b) Donner dans ce cas les expressions approchées de $B(r, t)$ et $E(r, t)$.

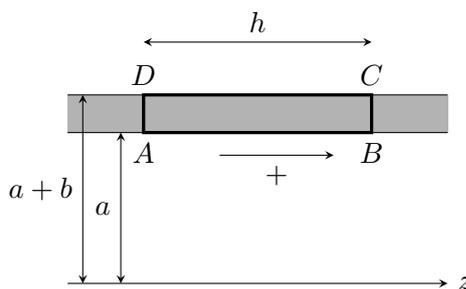
On a donc :

$$B(r, t) = B_0(0) \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad E(r, t) = B_0(0) \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2}$$

À ce degré d'approximation, le champ magnétique est donc uniforme dans l'espace $r < a$.

- c) On suppose qu'à ce même degré d'approximation, le champ magnétique est nul dans l'espace $r > a + b$. En déduire à l'aide du théorème d'Ampère et par un choix judicieux de la courbe d'intégration l'expression de $B_0(0)$ en fonction de μ_0 , b et I_m .

Appliquons le théorème d'Ampère en choisissant comme courbe fermée orientée (C_A) un rectangle $ABCD$ de longueur h et positionné comme cela est indiqué sur la figure :



$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \iint_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$$

Or on a vu que le courant de déplacement était négligeable dans le métal et donc :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(t) bh = \frac{i(t)}{b} h$$

De plus :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_0(0) \cos(\omega t) h$$

et donc :

$$B_0(0) = \mu_0 \frac{I_m}{b}$$

- d) Désignons par n le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Quelle est la relation entre n et b ? Montrer alors que, pour $r < a$:

$$\vec{B}(M, t) = \mu_0 n I_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M, t) = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$$

On a manifestement $n = 1/b$ puisque qu'il y a 1 spire tous les b mètres. Il vient donc $B_0(0) = \mu_0 n I_m$, ce qui donne :

$$\vec{B}(M, t) = \mu_0 n I_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M, t) = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$$

- 5) On souhaite établir un bilan énergétique pour le champ électromagnétique dans le solénoïde, c'est à dire pour $r < a$. On se plus toujours dans l'approximation basse fréquence $\omega a/c \leq 1/100$.

- a) Montrer que, dans cette région de l'espace, la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m .

Les densités volumiques d'énergie s'écrivent :

$$u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2 \quad \text{et} \quad u_m = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2$$

d'où en faisant le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{amp } u_e}{\text{amp } u_m} = \frac{1}{c^2} \frac{(\mu_0 n I_m)^2 \omega^2 r^2}{(\mu_0 n I_m)^2} \leq \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^2 \leq \frac{1}{2 \times 10^4} = 5 \times 10^{-5}$$

Cela montre donc que la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m .

b) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \mu_0 (nI_m)^2 \frac{\omega r}{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_r$$

c) En déduire que l'identité locale de Poynting est bien vérifiée dans le solénoïde ($r < a$).

Comme $\vec{j} = \vec{0}$ pour $r < a$ et que u_e est négligeable devant u_m , l'identité locale de Poynting se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_m}{\partial t} = 0$$

or :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0 (nI_m)^2 \frac{\omega r^2}{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) = \mu_0 (nI_m)^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

et

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 (nI_m)^2}{2} \cos^2(\omega t) \right) = -\mu_0 (nI_m)^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

L'identité locale de Poynting est donc bien vérifiée dans le solénoïde.

C) Chauffage d'un métal par induction électromagnétique

Le chauffage d'un cylindre métallique est obtenu en plaçant celui-ci au centre du solénoïde (\mathcal{S}) précédent (toujours considéré comme infini, à spires carrées jointives et comportant n spires par mètre, comme dans la partie **B**), parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I_m (figure 2). La longueur du cylindre métallique est supposée infinie, comme celle du solénoïde et son rayon est $a = 2 \text{ cm}$.

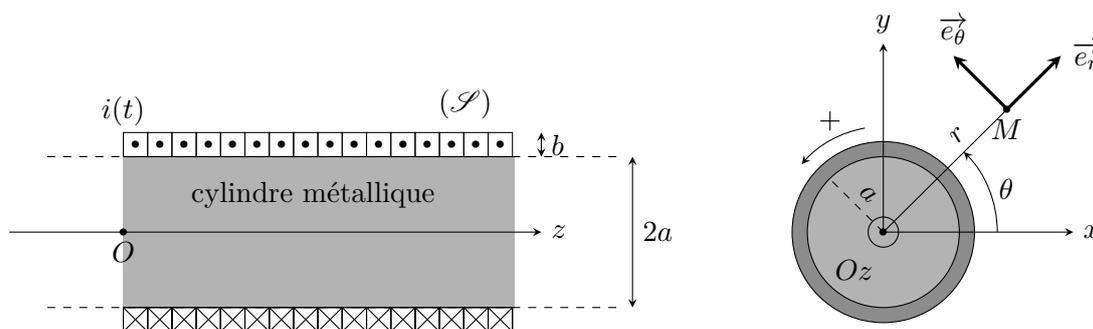


FIGURE 2 –

Le métal chauffé est un acier de conductivité électrique $\gamma = 10^5 \text{ S.m}^{-1}$ et dont les constantes électromagnétiques sont ϵ_0 et μ_0 .

Les symétries et invariances de la situation suggèrent d'écrire les champs électrique et magnétique correspondant à ce problème sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_z$$

Dans la suite, on posera $B(r, t) = \operatorname{Re}[\underline{B}(r, t)]$ avec $\underline{B}(r, t) = \underline{B}_0(r) e^{j\omega t}$ et où $\underline{B}_0(r)$ est une fonction de r à valeurs complexes. $\underline{B}(r, t)$ est la représentation complexe du champ magnétique.

On se place dans les mêmes conditions d'approximation que celles étudiées à la question 1)

- 6) a) Écrire les équations de Maxwell en un point M du cylindre à chauffer (il est rappelé que pour tout point $\rho(M, t) = 0$).

Dans le métal le courant de déplacement est négligeable tant que $f \leq f_{\max}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 && \text{Maxwell-Gauss} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 && \text{Maxwell-Thomson} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{Maxwell-Faraday} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{j} = \mu_0 \mu_r \gamma \vec{j} && \text{Maxwell-Ampère} \end{aligned}$$

- b) En déduire que dans le cylindre métallique, $B(r, t)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\Delta B(r, t) = \lambda \frac{\partial B(r, t)}{\partial t}$$

et expliciter λ en fonction de μ_0 , μ_r et de γ .

On a :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \mu_r \gamma \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'autre part :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

et donc :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \mu_r \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sachant que $\Delta \vec{B} = \Delta B(r, t) \vec{e}_z$ et que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \vec{e}_z$, on obtient en projetant sur \vec{e}_z :

$$\Delta B(r, t) = \mu_0 \mu_r \gamma \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lambda = \mu_0 \mu_r \gamma}$$

- c) Compte-tenu de la linéarité de l'équation précédente, la représentation complexe $\underline{B}(r, t)$ satisfait à la même équation que $B(r, t)$. En déduire que :

$$\frac{d^2 \underline{B}_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_0(r)}{dr} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{B}_0(r) = 0$$

à condition de poser :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \gamma \omega}}$$

Quelle est la dimension de δ ?

La représentation complexe $\underline{B}(r, t)$ obéit aussi à l'équation précédente. Il s'ensuit que :

$$\Delta \underline{B}(r, t) = \mu_0 \mu_r \gamma \frac{\partial \underline{B}(r, t)}{\partial t}$$

Or :

$$\Delta \underline{B}(r, t) = e^{j\omega t} \Delta \underline{B}_0(r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{B}(r, t)}{\partial t} = j\omega e^{j\omega t} \underline{B}_0(r)$$

et donc :

$$\Delta \underline{B}_0(r) = j \mu_0 \mu_r \gamma \omega \underline{B}_0(r)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{B}_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_0(r)}{dr} - j \mu_0 \mu_r \gamma \omega \underline{B}_0(r) = 0}$$

qui est bien de la forme demandée à condition de poser :

$$\frac{2}{\delta^2} = \mu_0 \mu_r \gamma \omega \quad \text{donc} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \gamma \omega}}$$

Du point de vue dimensionnel on a :

$$\frac{[B_0]}{[\delta]^2} = \left[\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} \right] = \frac{[B_0]}{[L]^2}$$

ce qui montre que δ est **homogène à une longueur**.

Dans le cas des basses fréquences, il est admis que $B_0(r)$ est bien représentée par un développement en série tel que :

$$B_0(r) = B_0(0) (1 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots + \alpha_n r^n + \dots) = B_0(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n$$

où $\alpha_n \in \mathbb{C}$

- d) Établir les relations de récurrence entre les coefficients α_n . Préciser en particulier la valeur de α_1 , celle de α_2 et la relation entre α_n et α_{n-2} . Montrer que dans le cylindre :

$$B_0(r) = B_0(0) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^p}{2^p (p!)^2} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2p}$$

On reprend le même calcul qu'à la question 3) c). En reprenant certains des résultats établis à cette question nous avons :

$$\frac{1}{r} \frac{dB_0(r)}{dr} = B_0(0) \left\{ \frac{\alpha_1}{r} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) \alpha_{n+2} r^n \right\}$$

et

$$\frac{d^2 B_0(r)}{dr^2} = B_0(0) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) \alpha_{n+2} r^n$$

Il vient donc :

$$\forall r \in]0, a[, \quad \frac{\alpha_1}{r} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ (n+2)^2 \alpha_{n+2} - \frac{2j}{\delta^2} \alpha_n \right\} r^n = 0$$

et donc :

$$\alpha_0 = 1 \quad ; \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{n+2} = \frac{2j}{\delta^2} \frac{\alpha_n}{(n+2)^2}$$

Tous les termes d'indice impair sont nuls et les termes d'indice pairs vérifient l'équation de récurrence :

$$\alpha_{2p} = \frac{2j}{\delta^2} \frac{\alpha_{2(p-1)}}{4p^2} \quad \text{si} \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = 1$$

On a donc :

$$\frac{\alpha_{2p}}{\alpha_0} = \underbrace{\frac{\alpha_{2p}}{\alpha_{2(p-1)}} \times \frac{\alpha_{2(p-1)}}{\alpha_{2(p-2)}} \times \dots \times \frac{\alpha_{2.1}}{\alpha_{2.0}}}_{p \text{ facteurs}} = \frac{j^p}{\delta^{2p}} \frac{1}{2^p (p!)^2}$$

d'où :

$$\alpha_{2p} = \left(\frac{j}{\delta^2}\right)^p \frac{1}{2^p (p!)^2} \quad \text{si } p \geq 1 \quad \text{et } \alpha_0 = 1$$

On a donc bien :

$$\underline{B}_0(r) = \underline{B}_0(0) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^p}{2^p (p!)^2} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2p}$$

7) On se place dans des conditions expérimentales telle que $a/\delta \leq 1/10$.

a) Déterminer l'expression ainsi que la valeur numérique de la fréquence maximale f_M mise en évidence.

On a donc :

$$a \times \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \leq \frac{1}{10} \iff f \leq \frac{1}{100\pi a^2 \mu_0 \gamma} = f_M \quad \text{AN : } f_M = 63 \text{ Hz}$$

Dans le cas où $f \leq f_M$, on admet que le développement de $\underline{B}_0(r)$ est correctement exprimé en ne conservant que les deux termes principaux de la série entière, les autres termes étant considérés comme négligeables. De plus on admettra que $\underline{B}_0(0)$ est réel et on posera $\underline{B}_0(0) = B_0 \in \mathbb{R}$

b) Montrer que :

$$B(r, t) = \text{Re}[\underline{B}(r, t)] = B_0 \cos(\omega t) - B_0 \frac{r^2}{2\delta^2} \sin(\omega t)$$

On a :

$$\underline{B}(r, t) = \underline{B}_0(r) e^{j\omega t} = B_0 \left(1 + \frac{j}{2} \frac{r^2}{\delta^2}\right) e^{j\omega t}$$

d'où :

$$B(r, t) = B_0 \cos(\omega t) - B_0 \frac{r^2}{2\delta^2} \sin(\omega t)$$

c) En déduire la densité de courant \vec{j} dans le métal au premier ordre en r sous la forme : $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ et préciser l'expression de $j(r, t)$.

Appliquons l'équation de Maxwell-Ampère dans le métal, en négligeant le courant de déplacement devant le courant de conduction :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = - \frac{\partial B(r, t)}{\partial r} \vec{e}_\theta = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{r}{\delta^2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$j(r, t) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{r}{\delta^2} \sin(\omega t)$$

- 8) a) Calculer la puissance volumique moyenne $p_v(r)$ dissipée par effet Joule dans le métal. En déduire la puissance moyenne P_{moy} dissipée dans une longueur $h = 10$ cm de cylindre.

Dans un métal, la puissance volumique dissipée par effet Joule est $\vec{j} \cdot \vec{E} = j^2/\gamma$. On en déduit la puissance volumique moyenne :

$$p_v(r) = \left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)^2 \frac{r^2}{\gamma \delta^4} \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)^2 \frac{r^2}{2\gamma \delta^4}$$

puis :

$$P_{\text{moy}} = \iiint p_v(r) d\tau = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+h} p_v(r) r dr d\theta dz$$

d'où :

$$P_{\text{moy}} = \pi \left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)^2 \frac{a^4}{4\gamma \delta^4} h$$

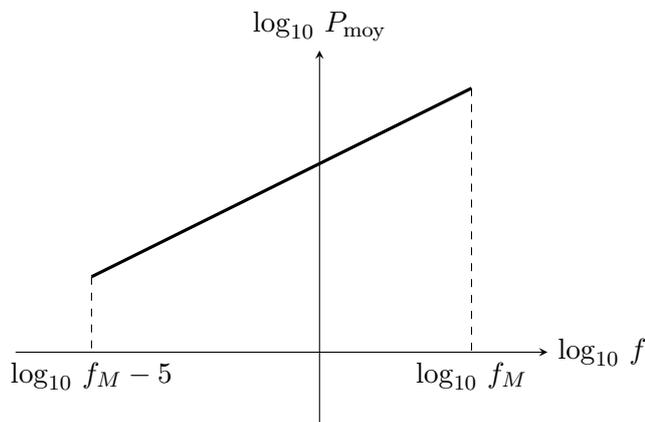
- b) Tracer un diagramme logarithmique en représentant $\log_{10} P_{\text{moy}}$ en fonction de $\log_{10} f$ pour $10^{-5} f_M < f < f_M$.

Comme $1/\gamma \delta^4 = \mu_0^2 \gamma \pi^2 f^2$, il vient :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\pi^3}{4} B_0^2 \gamma \frac{a^4 h}{\delta^4} f^2$$

d'où :

$$\log_{10} P_{\text{moy}} = \underbrace{\log_{10} \left(\frac{\pi^3}{4} B_0^2 \gamma \frac{a^4 h}{\delta^4} \right)}_{\text{noté A}} + 2 \log_{10} f = A + 2 \log_{10} f$$



Conclusion :

La puissance dissipée par effet Joule est proportionnelle au carré de la fréquence f . On a donc intérêt à opérer à des fréquences proches de f_M pour augmenter l'efficacité du chauffage.