

Correction du DS n°5

I. Etude d'une combustion

1) La réaction étant totale, CO(g) et O2(g) disparaissent et il se forme nO mol de CO2(g). Le réacteur contient au total nO = 2 mol de N2(g).

Bilan réaction idéale ΔH = 0



La réaction idéale est monobare et adiabatique donc :  $Q_p = \Delta H = 0$ . On décompose :

$$0 = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \text{ avec :}$$

$$\Delta H_1 = \Delta n H^\circ(T_0) \quad \text{J.F.} = \Delta n H^\circ(T_0) n_0$$

$$\Delta H_2 = (n_0 c_{p,m}(\text{CO}_2) + 2 n_0 c_{p,m}(\text{N}_2)) (T_F - T_0)$$

On en déduit :

$$T_F = T_0 - \frac{\Delta n H^\circ(T_0)}{c_{p,m}(\text{CO}_2) + 2 c_{p,m}(\text{N}_2)}$$

AN  $T_F = 3270 \text{ K}$

(cet ordre de grandeur est cohérent pour une température de flamme).

2) On calcule ΔS en utilisant sa définition

$$\Delta S^\circ = 5 \ln(\text{CO}_2) - 5 \ln(\text{CO}) - \frac{1}{2} 5 \ln(\text{O}_2)$$

$$= 2434 - 1973 - 0,5 \times 205 = -864 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(en accord avec le fait que le nombre de degrés de liberté diminue)

$$\Delta n G^\circ(T) = -283 \cdot 10^3 + 864 T \quad \text{J.mol}^{-1}$$

On en déduit :

$$K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta n G^\circ(T)}{RT}\right) = \exp\left(\frac{\Delta n S^\circ}{R}\right) \exp\left(-\frac{\Delta n H^\circ}{RT}\right)$$

qui est de la forme demandée, à condition de passer :

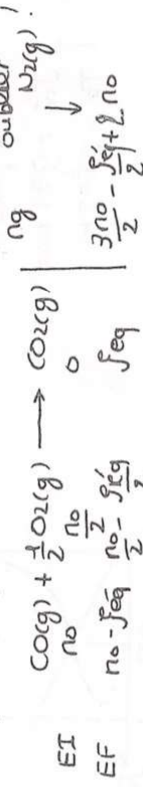
$$\left\{ \begin{array}{l} A = \exp\left(\frac{\Delta n S^\circ}{R}\right) = 305 \cdot 10^{-5} \\ B = -\frac{\Delta n H^\circ}{R} = 341 \cdot 10^4 \text{ K} \end{array} \right.$$

AN

2) L'état final est un équilibre à la température TF. On applique la loi d'action des masses :

$$K^\circ(T_F) = \frac{c_{\text{CO}_2}}{c_{\text{CO}} \sqrt{c_{\text{O}_2}}} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}} \sqrt{x_{\text{O}_2}}} \sqrt{\frac{p^\circ}{p}}$$

Un bilan de matière donne :



Nous avons donc :

$$n_g = \frac{.7 n_0 - j_{\text{eq}}}{2}$$

En reportant dans la LAM, nous obtenons

$$K^\circ(T_F) = \frac{j_{\text{eq}}}{n_0 - j_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{.7 n_0 - j_{\text{eq}}}{n_0 - j_{\text{eq}}}}$$

2) Nous avons Q(jeq) la valeur du quotient réactionnel à l'équilibre :

$$R_A Q(j_{\text{eq}}) = R_A K^\circ = R_A + \frac{B}{T_F} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{B}{T_F} = R \left( \frac{Q(j_{\text{eq}})}{A} \right)$$

et donc  $T_F = \frac{B}{R \left( \frac{Q(j_{\text{eq}})}{A} \right)}$  AN :  $T_F = 2500 \text{ K}$  pour  $j_{\text{eq}} = 98 \text{ mol}$

2

3) On reprend le même raisonnement qu'à la question 1. mais avec un avancement final  $\xi_{eq}$

$$T_F = T_0 - \frac{\Delta n H^0(T_0) \xi_{eq}}{C_{p,TOT}} = 82(\xi_{eq})$$

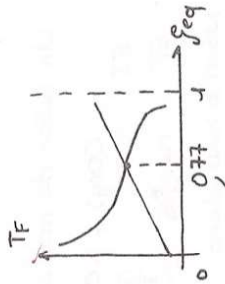
$$\text{avec } C_{p,TOT} = (n_{O_2} - \xi_{eq}) C_{p,m}(CO) + 95(n_{O_2} - \xi_{eq}) C_{p,m}(O_2) + \xi_{eq} C_{p,m}(CO_2) + 2 n_{O_2} C_{p,m}(N_2)$$

A.N.  $T_F = 2500$ .  $k$  si  $\xi_{eq} = 0,8 \text{ mol}$ .  
 (on obtient bien une température inférieure au cas précédent car il faut chauffer une partie des réactifs)

4) On peut reporter les figures donnant  $\xi_2$  sur le graphe de  $\xi_1$ . Le point noir correspond à l'intersection des deux courbes.

On trouve aux environs de lecture près :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{eq} \approx 0,77 \text{ mol} \\ T_F \approx 2572 \text{ K} \end{array} \right.$$



II. Equilibre de Deacon

1)  $\Delta n S^0 = - \frac{d \ln S^0}{dT} = -1305 \text{ J.K.mol}^{-1}$  et  $\Delta n H^0 = \Delta n G^0 + T \Delta n S^0$   
 donc  $\Delta n H^0 = -1155 \text{ KJ.mol}^{-1}$  réaction exothermique.

$\Delta n S^0 < 0$  car les produits (4 moles de gaz) sont moins désordonnés que les réactifs (5 moles de gaz).

2)  $K^0(T) = \exp\left(-\frac{\Delta n G^0(T)}{RT}\right) = \frac{53}{AN}$

3) De façon générale,  $\Delta n G^0(T) = RT \ln Q_I$  où  $Q_I$  est le quotient réactionnel initial :

$$Q_I = \frac{C_{CO_2}^2 C_{H_2O}^2}{C_{CO}^4 C_{O_2}} \times \left(\frac{P^0}{P}\right)^{\sum \nu_i} = \frac{n_{CO_2}^2 \times n_{H_2O}^2}{n_{CO}^4 \times n_{O_2}} \times n_{PT}^{-2}$$

$Q_I = 0$  donc  $\Delta n G^0 \rightarrow -\infty$ , la réaction va dans le sens  $\rightarrow$  (seule possible !)

4)  $4HCO(g) + O_2(g) = 2H_2O(g) + 2CO_2(g)$  |  $n_g$   
 EF  $4n_{O_2} - 4\xi_{FF} \quad n_{O_2} - \xi_{FF} \quad 2\xi_{FF} \quad 2\xi_{FF} \quad 5n_{O_2} - \xi_{FF}$

Par définition :  $\tau = \frac{4\xi_{FF}}{4n_{O_2}} = \xi_{FF}/n_{O_2}$ , donc

$$C_{H_2O} = \frac{4n_{O_2} - 4\xi_{FF}}{4n_{O_2}} = \frac{4(1-\tau)}{4n_{O_2}} \quad C_{H_2O} = C_{CO_2}$$

$$C_{CO_2} = \frac{5n_{O_2} - \xi_{FF}}{5n_{O_2} - \xi_{FF}} = \frac{1-\tau}{5-\tau} \quad = \frac{2\xi_{FF}}{5n_{O_2} - \xi_{FF}}$$

5)  $Q = \frac{(2\tau)^4 (5-\tau)}{4^4 (1-\tau)^5} = \frac{\tau^4 (5-\tau)}{16 (1-\tau)^5}$

6) a) def f(tau:float):  
 K0=5.3  
 Q=tau\*\*4\*(5-tau)/16/(1-tau)\*\*5  
 return K0-Q

b) def dichot(f, a, b, eps:float):  
 while abs(a - b) > eps:  
 m = (a + b)/2  
 if f(m) == 0:  
 return m  
 elif f(a)\*f(m) > 0:  
 a = m  
 else:  
 b = m  
 return m

7) En utilisant la calculatrice, on obtient par résolution avec  $Q_{eq} = K^0 = 5,3$ :  
 $\xi_{eq} \approx 0,62$ .

Corrigé partie physique

### 1 À propos du champ magnétique (d'après Centrale PC 2010 + Centrale TSI 2011)

#### I. LES PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE

1) Forme locale :  $\text{div } \vec{B} = 0$  et forme intégrale à l'aide du théorème d'Ostrogradki :

$$\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, d\tau = 0$$

En particulier, cela signifie :

- que le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface qui s'appuie sur un contour fermé ( $\mathcal{C}$ ) ne dépend pas de la surface (pourvu qu'elle s'appuie sur le contour).
- que le flux de  $\vec{B}$  se conserve à travers chaque section d'un tube de champ magnétique.
- Carte (a) : ( $\alpha$ )  $\vec{A} = A(x, y) \vec{u}_y$  mais on remarque que  $\vec{A}$  est invariant par translation dans la direction  $Oy$ . Il en résulte que sa composante ne dépend pas de  $y$  et donc :

$$\vec{A} = A(x) \vec{u}_y \implies \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

C'est donc un champ à flux conservatif.

- Carte (b) : ( $\gamma$ )  $\vec{A} = A(r, \theta) \vec{u}_\theta$  et on voit que sa composante ne dépend pas de  $\theta$ . Elle ne dépend que de  $r$  et elle décroît si  $r$  augmente. On a alors (formulaire) :

$$\vec{A} = A(r) \vec{u}_\theta \implies \text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$$

C'est aussi un champ à flux conservatif.

- Carte (c) : ( $\beta$ ) on a ici un champ radial :  $\vec{A} = A(r, \theta) \vec{u}_r$ , où  $A(r, \theta)$  ne dépend pas de  $\theta$  ; on a donc  $A = A(r)$  et cette composante augmente avec  $r$ . Il vient (formulaire) :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A(r))}{\partial r} \neq 0$$

puisque  $r A(r)$  est croissante comme produit de deux fonctions croissantes de  $r$ . Ce champ n'est donc pas à flux conservatif.

- Carte (d) : ( $\gamma$ ) ici on a  $\vec{A} = A(r, \theta) \vec{u}_\theta$ , avec  $A(r, \theta) = k$  constante (c'est à dire indépendante de  $r$  et de  $\theta$ ). On a donc :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$$

et c'est donc un champ à flux conservatif.

- Carte (a) :  $\vec{A} = A(x) \vec{u}_y$ . On a donc :

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\partial A(x)}{\partial x} \vec{u}_z \neq \vec{0}$$

puisque  $A(x)$  varie avec  $x$ . Ce champ n'est donc pas à rotationnel nul.

- Carte (b). On utilise le formulaire :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A(r))}{\partial r} \vec{u}_z$$

Il se pourrait dans ce cas que  $\vec{A}$  soit de rotationnel nul : il faudrait que  $r A(r)$  soit constant, c'est à dire que  $A(r) = k/r$  avec  $k$  constante ; on aurait alors  $A(r)$  décroissant en  $1/r$ . Dans tous les autres cas,  $\text{rot } \vec{A} \neq \vec{0}$ .

- Carte (c). On utilise encore le formulaire et on trouve directement que  $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$ .
- Carte (d). Ici  $\vec{A} = k \vec{u}_\theta$ , avec  $k$  constante. On a donc (formulaire) :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r k)}{\partial r} \vec{u}_z = \frac{k}{r} \vec{u}_z \neq \vec{0}$$

Ce champ n'est donc pas à rotationnel nul.

4) Dans l'ARQS, le terme  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère et donc :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

On en déduit que si ( $\mathcal{C}$ ) est un contour fermé et orienté, en utilisant le théorème de Stokes il vient :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\text{orienté}} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S j \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_S(t)$$

où  $S$  est une surface quelconque qui s'appuie sur ( $\mathcal{C}$ ) et  $i_S(t)$  est l'intensité électrique qui traverse  $S$ .  $i_S$  est compté positivement s'il est en accord avec la règle de la main droite par rapport à l'orientation du contour.

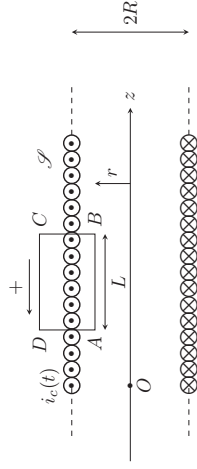
- 5) a) Il faut que la longueur  $\ell$  soit très grande devant le rayon  $R$ . En pratique, la valeur du champ magnétique calculée dans l'approximation du solénoïde infini est valable tant qu'on reste loin des extrémités de la bobine.
- b) Soit  $M(r, \theta, z)$  une point intérieur à  $\mathcal{S}$ . Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie des courants contenant  $M$ . On en déduit que :

$$\vec{B}(M, t) = (r, \theta, z, t) \vec{u}_z$$

Il y a de plus invariance par toute translation de direction  $Oz$  et par toute rotation d'axe  $Oz$  et donc :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}(r, t) \vec{u}_z$$

- c) On choisit comme contour d'Ampère un rectangle  $ABCD$  orienté disposé comme ci-dessous, le côté  $AB$  étant à la distance  $r$  de l'axe :



On a donc, en utilisant le fait que  $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$  :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) L$$

L'intensité électrique qui traverse ce contour est  $i_s(t) = \frac{N}{\ell} \times L i_c(t)$ . On en déduit que :

$$B(r, t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t) \quad \text{et donc} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t) \vec{u}_z}$$

d) Application numérique :  $\|\vec{B}\| = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 5 \text{ mT}$ , ce qui n'est pas très important.

Pour augmenter la valeur de  $\|\vec{B}\|$  il faudrait :

- augmenter le rapport  $N/\ell$  donc augmenter  $N$  pour  $\ell$  fixé mais on va être limité par le diamètre de la section du fil utilisé.
- augmenter  $i_c$  mais cela va augmenter l'effet Joule dans la résistance du fil et provoquer l'échauffement de celui-ci (cela peut aller jusqu'à faire fondre le fil).
- mettre un matériau magnétique de perméabilité magnétique  $\mu = \mu_r \mu_0$  à l'intérieur du solénoïde ( $\mu_r(\text{Fe}) \simeq 10000$ ). Cela peut évidemment empêcher de mettre un autre matériau à l'intérieur.

## II. INTERACTION ENTRE DEUX BOBINES

6) Le flux du champ magnétique créé par ( $\mathcal{S}$ ) à travers une spire de ( $\mathcal{B}$ ) est :

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{B}_{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t) \pi r_b^2$$

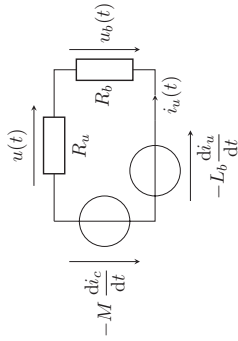
Le flux total est la somme des flux à travers chaque spire, ce qui donne :

$$\Phi = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t) \pi r_b^2 \times N_b = M i_c(t)$$

d'où :

$$\boxed{M = \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi r_b^2 \times N_b}$$

7) a) On fait un schéma électrique équivalent au circuit dans lequel est placée ( $\mathcal{B}$ ), en tenant compte de la fém induite par le champ magnétique de ( $\mathcal{S}$ ) et de la fém induite par le champ magnétique propre de ( $\mathcal{B}$ ) (inductance propre  $L_b$ ) :



Une loi des mailles conduit à :

$$-M \frac{di_c}{dt} - L_b \frac{di_a}{dt} - u_b(t) - u(t) = 0$$

avec avec  $u(t) = R_a i_a(t)$  donc  $u_b(t) = R_b i_a(t) = \frac{R_b}{R_a} u(t)$ , ce qui conduit à l'équation :

$$\frac{L_b}{R_a} \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) u = -M \frac{di_c}{dt}$$

b) On utilise les grandeurs complexes  $\underline{i}_c(t) = I_m e^{j\omega t}$  et  $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ . On en déduit que :

$$\left(\frac{jL_b\omega}{R_a} + 1 + \frac{R_b}{R_a}\right) \underline{u} = -j\omega M \underline{i}_c$$

qui, compte tenu des approximations  $R_a \gg L_b\omega$  et  $R_a \gg R_b$  se transforme en :

$$\underline{u} = -j\omega M \underline{i}_c \quad \text{d'où} \quad \boxed{U_m = |\underline{u}| = M\omega |\underline{i}_c| = M\omega I_m = 2\pi M f I_m}$$

Ainsi,  $U_m$  varie proportionnellement à la fréquence  $f$ . On fait donc une régression linéaire sur les couples  $(f, U_m)$  ; on trouve un coefficient de corrélation  $r = 0,99997 > 0,99$  ce qui valide le modèle. Le coefficient directeur de la régression est  $a = 3,97 \cdot 10^{-3}$ , ce qui donne :

$$\boxed{M = \frac{a}{2\pi f I_m} = 6,31 \cdot 10^{-4} \text{ H}}$$

On en déduit :

$$\boxed{N_b = \frac{M\ell}{\mu_0 N \pi r_b^2} \simeq 100}$$

La petite bobine possède donc 100 spires.

c) Il y a  $N_b$  spires sur une longueur  $\ell_b$ . Le diamètre de la section du fil du bobinage est donc  $D = \ell_b/N_b = 0,8 \text{ mm}$ . La longueur totale du fil de ( $\mathcal{B}$ ) est  $L = 2\pi r_b \times N_b = 12,6 \text{ m}$ . La résistance de la bobine est donc :

$$R_b = \frac{L}{\gamma_{Cu} \pi (D/2)^2} \simeq 0,42 \Omega$$

L'inductance propre de ( $\mathcal{B}$ ) peut être évaluée en faisant comme s'il s'agissait d'un solénoïde infini. Le flux propre est :

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N_b}{\ell_b} i_a(t) \times \pi r_b^2 N_b \quad \text{d'où} \quad L_b = \mu_0 \frac{N_b^2}{\ell_b} \times \pi r_b^2 \simeq 2,10 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

La plus grande fréquence de l'expérience est  $f_m = 1000 \text{ Hz}$  et donc  $L_b\omega$  est toujours inférieur à  $1,3 \Omega$ .

Il n'est donc pas très difficile de choisir une résistance  $R_a \gg R_b$  et  $R_a \gg L_b\omega$ . Dès que  $R_a \geq 100 \Omega$ , cela convient parfaitement.

8) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, le champ magnétique variable  $\vec{B}(t)$  créé par le solénoïde ( $\mathcal{S}$ ) crée un champ électrique  $\vec{E}_1^{\uparrow}$  tel que  $\text{rot} \vec{E}_1 = -\partial \vec{B} / \partial t$ .

- a) On utilise le théorème de Stokes. Soit  $(\mathcal{C})$  un contour fermé et  $(S)$  une surface quelconque orientée qui s'appuie sur  $(\mathcal{C})$ . On a :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Il s'agit de la **loi de Faraday**.

- b) Il y a invariance de l'ensemble du problème (courants et tube) par toute rotation autour de  $Oz$  et par toute translation le long de  $Oz$  :  $E(r,t)$  ne dépend donc ni de  $\theta$ , ni de  $z$ . En faisant circuler  $\vec{E}_1$  sur le cercle de rayon  $r$  et d'axe  $Oz$  (orienté positivement avec la règle de la main droite selon cet axe), on obtient :

$$2\pi r E(r,t) = - \frac{d}{dt} (B(t) \pi r^2) = - \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

et donc :

$$E(r,t) = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = - \mu_0 \frac{N}{\ell} \frac{r}{2} \frac{di_c}{dt}$$

- c) On utilise la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j}_1 = \gamma_{Al} \vec{E}_1 = - \mu_0 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{r}{2} \frac{di_c}{dt} \vec{u}_\theta$$

- 9) a) En un point  $M(r, \theta, z)$ , le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie des courants contenant  $M$  et donc :

$$\vec{B}_1(M,t) = B_1(r, \theta, z, t) \vec{u}_z$$

De plus, les courants  $\vec{j}_1$  sont invariants par toute rotation autour de  $Oz$  et toute translation le long de  $Oz$  et donc :

$$\vec{B}_1(M,t) = B_1(r,t) \vec{u}_z$$

- b) D'après le formulaire :

$$\text{rot } \vec{B}_1 = - \frac{\partial B_1}{\partial r} \vec{u}_\theta = - \mu_0 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{r}{2} \frac{di_c}{dt} \vec{u}_\theta \quad \text{si } a \leq r \leq b$$

et

$$\text{rot } \vec{B}_1 = - \frac{\partial B_1}{\partial r} \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \text{si } r < a$$

On en déduit que :

$$B_1(r,t) = \mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{r^2}{4} \frac{di_c}{dt} + C_1(t) \quad \text{si } a \leq r \leq b \quad \text{et} \quad B_1(r,t) = C_2(t) \quad \text{si } r < a$$

On utilise ensuite la continuité de  $B_1$  en  $r = b$  et  $r = a$  pour trouver  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  :

$$\mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{b^2}{4} \frac{di_c}{dt} + C_1(t) = 0 \quad \text{d'où} \quad C_1(t) = - \mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{b^2}{4} \frac{di_c}{dt}$$

et donc :

$$B_1(r,t) = \mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{(r^2 - b^2)}{4} \frac{di_c}{dt} \quad \text{si } a \leq r \leq b$$

puis (continuité en  $r = a$ ) :

$$B_1(r,t) = \mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{(a^2 - b^2)}{4} \frac{di_c}{dt} \quad \text{si } r < a$$

Remarque : il est plus simple de calculer ces expressions en utilisant le théorème d'Ampère avec deux contours d'Ampère  $C_1$  et  $C_2$  rectangulaires, à cheval autour de  $r = b$  et  $r = a$ .

- 10) a) Chaque spire de  $(\mathcal{B})$  est maintenant soumise au champ magnétique  $\vec{B}_{\text{tot}}$ . On a donc pour une spire de  $(\mathcal{B})$  :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{B}_{\text{tot}}/S) &= \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t) \pi r_b^2 - \mu_0^2 \gamma_{Al} \frac{N}{\ell} \frac{(b^2 - a^2)}{4} \pi r_b^2 \frac{di_c}{dt} \\ &= \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi r_b^2 \left( i_c(t) - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} \frac{di_c}{dt} \right) \end{aligned}$$

d'où le flux magnétique total à travers les  $N_b$  spires :

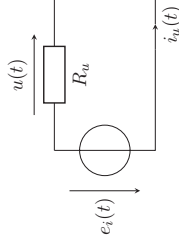
$$\Phi(\vec{B}_{\text{tot}}/S) = \underbrace{\mu_0 \frac{N}{\ell} \pi r_b^2 N_b}_{=M} \left( i_c(t) - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} \frac{di_c}{dt} \right)$$

et donc, selon la loi de Faraday :

$$e_i(t) = - \frac{d\Phi(\vec{B}_{\text{tot}}/S)}{dt} = -M \left( \frac{di_c}{dt} - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} \frac{d^2 i_c}{dt^2} \right)$$

On remarquera que le fait de négliger l'autoinduction à travers la petite bobine de détection revient à négliger un terme en  $-L_b \frac{di_c}{dt}$ .

- b) Les conditions  $R_u \gg R_b$  et  $R_u \gg L_b \omega$  reviennent à négliger la résistance et l'inductance propre de  $(\mathcal{B})$ . Le schéma électrocinétique équivalent est :



Une loi des mailles conduit donc à :

$$u(t) = e_i(t) = -M \left( \frac{di_c}{dt} - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} \frac{d^2 i_c}{dt^2} \right)$$

En régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes  $\dot{i}_c(t)$  et  $\underline{u}(t)$ . Il vient :

$$u(t) = -M \left( j\omega - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} (j\omega)^2 \right) \dot{i}_c(t) = -M j\omega \left( 1 - \frac{\mu_0 \gamma_{Al}}{4} \frac{(b^2 - a^2)}{4} j\omega \right) \dot{i}_c(t)$$

et donc :

$$U_m = |\underline{u}| = M\omega \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} I_m$$

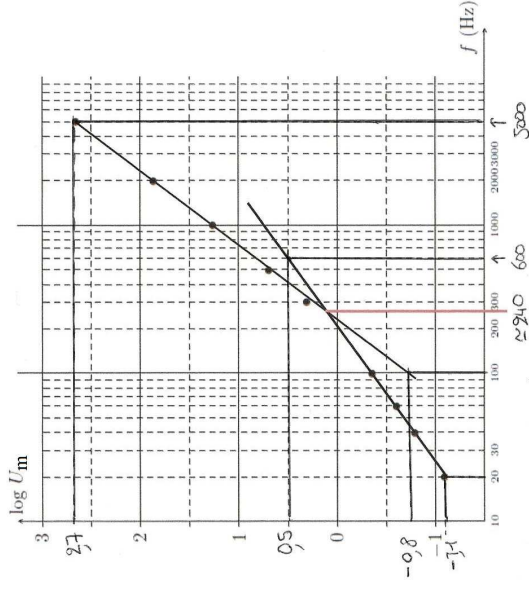
avec :

$$\omega_0 = \frac{4}{\mu_0 \gamma_{Al} (b^2 - a^2)}$$

- c) Application numérique :  $\omega_0 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ , ce qui correspond à une fréquence  $f_0 = 220 \text{ Hz}$ .

On peut proposer le code suivant pour calculer l'incertitude sur cette valeur :

```
import numpy as np
N = 10000
a_c = 3.0e-2
b_c = 3.1e-2
gamma_c = 3.77e-7
mu0 = 4*np.pi*1e-7
L = []
for i in range(N) :
    a = np.random.uniform(0.98*a_c, 1.02*a_c)
    b = np.random.uniform(0.98*b_c, 1.02*b_c)
    gamma = np.random.uniform(0.98*gamma_c, 1.02*gamma_c)
    w0 = 4/mu0/gamma/(b**2 - a**2)
    L.append(w0)
u_w0 = np.std(L, ddof = 1)
print(u_w0)
```



- d) En posant  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ , on a donc :

$$\log U_m = \log(2\pi M I_m) + \log(f) + \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right]$$

Il y a deux asymptotes :

- Asymptote basse fréquence (BF)  $f \ll f_0$  :  $\log U_m = \log(2\pi M I_m) + \log(f)$  ; c'est une droite de pente 1
- Asymptote haute fréquence (HF)  $f \gg f_0$  :

$$\log U_m = \log(2\pi M I_m) + 2 \log(f) - \log(f_0)$$

; droite de pente 2

Les deux asymptotes se coupent en :

$$\log U_m = \log(2\pi M I_m) + \log(f) = \log(2\pi M I_m) + 2 \log(f) - \log(f_0) \quad \text{donc } \boxed{f = f_0}$$

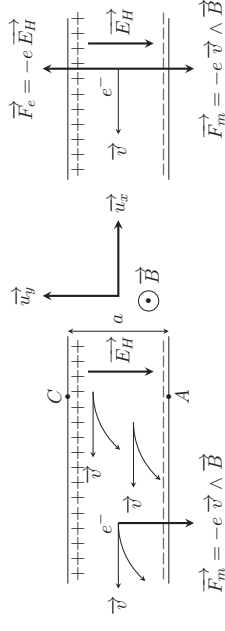
En analysant la FIGURE 5, on remarque que :

- on a bien deux droites ;
- la pente de l'asymptote BF est : 
$$p_{BF} = \frac{0,5 + 1,1}{\log(600) - \log(20)} = 1,08 \approx 1$$
- la pente de l'asymptote HF est : 
$$p_{HF} = \frac{2,7 + 0,8}{\log(5000) - \log(100)} = 2,06 \approx 2$$
- les deux asymptotes se croisent en  $f_0 \approx 240 \text{ Hz}$

En conclusion, mis à part une différence de 20 Hz sur  $f_0$ , ce qui correspond à un écart relatif de 9%, les résultats expérimentaux confirment le modèle théorique.

### III. L'EFFET HALL

- 11) a) Il crée une force de Lorentz qui fait dévier les électrons de leurs trajectoires rectilignes.



- b) Les électrons viennent s'accumuler vers la face inférieure qui se charge négativement et il y a un défaut d'électrons sur la face supérieure qui se charge donc positivement. Un champ électrique transverse  $\vec{E}_H$  est créé, dirigé des charges positives vers les charges négatives.

Ce champ crée une différence de potentiel  $V_C - V_A > 0$  puisque le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants.

- 12) a) Chaque électron de conduction est soumis à la force électrique et à la force magnétique, qui se compensent selon  $\vec{u}_y$  :

$$-e \vec{E}_H - e \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{d'où } \boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

b) On a :  $\vec{j} = -en_e \vec{v}$ .

c) Comme :

$$I = \iint_{A \times b} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j ab \text{ d'où } j = \frac{I}{ab}$$

il en résulte que :

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{j}}{en_e} \wedge \vec{B} = -\frac{jB}{en_e} \vec{u}_y = -\frac{IB}{en_e ab} \vec{u}_y = -\frac{dV}{dy} \vec{u}_y$$

et donc :

$$V(y) = \frac{IB}{en_e ab} y + C_{ste}$$

La différence de potentiel est donc :

$$V_H = V(y = a) - V(y = 0) = \frac{IB}{en_e b} \frac{R_H IB}{b} \text{ avec}$$

$$R_H = \frac{1}{en_e}$$

13) Applications numériques :

a) Il y a  $\frac{\mu N_A}{M}$  atomes par unité de volume, donc autant d'électrons de conduction.

On en déduit :

$$n_e = \frac{8,92 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{64} = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \text{ d'où } V_H = 7,4 \cdot 10^{-8} \text{ V}$$

Ce n'est pas une valeur mesurable malgré les valeurs réalistes pour  $I$  et  $B$  (bien que  $I$  soit grande, c'est une valeur tout à fait accessible).

La localisation des charges + et - sur les deux faces dépend du signe des charges des porteurs de charge mobiles et il en résulte que le signe de la tension de Hall  $V_H$  peut nous renseigner sur ces porteurs.

b) C'est parce que  $n_e$  est plus petit que dans un métal. On a :

$$B = \frac{n_e e b V_H}{I} = 340 \text{ mT}$$

C'est un champ assez important.

c) La densité de porteurs mobiles varie avec la température. Posons  $T_0 = 300 \text{ K}$ . La variation relative de  $R_H$  s'écrit :

$$\left| \frac{R_H(T_0 + 10) - R_H(T_0)}{R_H(T_0)} \right| = 1 - \exp \left[ \frac{E}{R} \left( \frac{1}{T_0 + 10} - \frac{1}{T_0} \right) \right] = 1 - \exp \left( -\frac{E}{R} \frac{10}{T_0(T_0 + 10)} \right) \approx 20\%$$

Cette variation est importante et il faut contrôler soigneusement la température pour avoir des mesures fiables.

IV. RÉALISATION D'UN WATTMÈTRE À EFFET HALL

14) a) Comme la sonde prélève un courant négligeable, (D) est traversé par un courant d'intensité  $i_c(t) = I_m \cos(\omega t)$ . Utilisons les grandeurs complexes pour traiter cette question :

$$\underline{u}_D(t) = (R + jL\omega) \underline{i}_c(t)$$

d'où :

$$|\underline{u}_D(t)| = U_m = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} I_m \text{ et } \varphi = \arg(R + jL\omega) = \arctan \left( \frac{L\omega}{R} \right)$$

A.N. :  $U_m = 95 \text{ V}$  et  $\varphi = 81^\circ = 1,41 \text{ rad}$ .

b) On a :

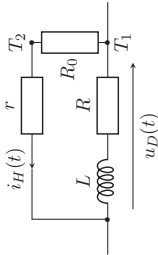
$$P(t) = u_D(t) i_c(t) = U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + 2\varphi) + \cos(\varphi)]$$

On en déduit la puissance moyenne, sachant que  $\langle \cos(2\omega t + 2\varphi) \rangle = 0$  :

$$\langle P \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} I_m^2}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{R I_m^2}{2} \approx 23 \text{ Watts}$$

C'est une puissance faible.

- 15) a) Le montage de la sonde de Hall et de la bobine peut être représenté comme sur le schéma ci-dessous :



On remarque que la tension aux bornes de l'association série  $r + R_0$  est  $u_D(t)$ .

On a donc :

$$i_H(t) = \frac{u_D(t)}{r + R_0}$$

D'autre part, le champ magnétique créé par ( $\mathcal{S}$ ) s'écrit :  $B(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_c(t)$ . La tension de Hall s'écrit donc :

$$V_H(t) = \frac{R_H i_H(t) B(t)}{b} = \frac{\mu_0 R_H N}{\ell b (r + R_0)} u_D(t) i_c(t) \quad \text{d'où} \quad \boxed{k = \frac{\mu_0 R_H N}{\ell b (r + R_0)}}$$

b) Comme :

$$V_H(t) = k U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{k U_m I_m}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + 2\varphi)]$$

Il en résulte que la puissance moyenne peut être obtenue en éliminant le terme  $\cos(2\omega t + 2\varphi)$ , ce qui se fait avec un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure  $f_c$  est très inférieure à  $2f = 100$  Hz.