

Correction - DS n°5 - Partie Physique - Ondes électromagnétiques

Samedi 27 janvier 2024 – Durée 4 heures

1 La chasse au périto (d'après Centrale-Supélec-MP-2023)

I.A — Un miroir pour les ondes électromagnétiques

Q 1. Équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thomson $\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$

Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$

Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left(\vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \right)$

Dans une région vide de charges, elles deviennent :

Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E}(M, t) = 0$

Maxwell-Thomson $\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$

Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$

Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$

Q 2. Comme $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on a

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t}$$

par permutation des dérivées spatiale et temporelles (théorème de Schwarz).

De plus $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ dans le vide.

Avec l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient donc

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

d'où, comme $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Q 3. Le direction de propagation de l'onde de la forme $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ est selon l'axe Ox .

En considérant $k > 0$, l'onde se propage selon \vec{u}_x .

L'onde est polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

Écrivons que le champ vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0 \cos(\omega t - kx) = 0, \quad \forall (x, t).$$

Comme $E_0 \neq 0$, on en déduit la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Q 4. Le conducteur parfait correspond au cas théorique limite d'une conductivité électrique infinie : $\gamma \rightarrow \infty$.

À l'intérieur d'un conducteur idéal, le champ électrique est nul : $\vec{E}(M, t) = \vec{0}$.

1. La relation de passage s'écrit à l'interface, c'est-à-dire en $x = 0$.

Q 5. Écrivons la relation de passage en ne prenant en compte que le champ incident donné. Le milieu (1) est le vide, le milieu (2) le conducteur (donc $\vec{E}_2 = \vec{0}$, et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_x$, d'où¹

$$\vec{0} - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

En projetant selon \vec{u}_y , on obtient

$$E_0 \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t.$$

Comme $E_0 \neq 0$, cette condition ne peut être vérifiée.

Le champ électrique donné ne vérifie pas le relation de passage.

Il existe donc un champ $\vec{E}_r(M, t)$, tel que le champ total $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t)$ vérifie la relation de passage.

À l'interface $x = 0$, on a donc

$$\vec{0} - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y - \vec{E}_{0r} \cos(\omega' t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

En projetant selon \vec{u}_x , on obtient

$$-\vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_x \cos(\omega' t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

On peut *a priori* écrire

$$\vec{E}_r = E_{0r,x} \cos(\omega' t + k' x) \vec{u}_x + E_{0r,y} \cos(\omega' t + k' x) \vec{u}_y$$

Dans le vide, on a alors d'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = -E_{0r,x} k' \sin(\omega t + k' x) = 0 \quad \forall t, x$$

ce qui impose $E_{0r,x} = 0$, et donc $\sigma = 0$ à la surface du conducteur. On a donc $E_{0r,y} = E_{0r}$ et la relation de passage s'écrit en projection selon \vec{u}_y

$$0 - E_0 \cos(\omega t) - E_{0r} \cos(\omega' t) = 0 \quad \forall t.$$

On en déduit $E_{0r} = -E_0$ et $\omega' = \omega$. La relation de dispersion donne $k' = \omega' / c = \omega / c = k$.

On a finalement $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$.

Cette onde se propage dans le sens des x décroissants et est polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

Q 6. Le champ électrique résultant est donné par

$$\vec{E}(M, t) = (E_0 \cos(\omega t - kx) - E_0 \cos(\omega t + kx)) \vec{u}_y$$

soit

$$\vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y.$$

On obtient le champ \vec{B} avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial x} \vec{u}_z = -2E_0 k \cos(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_z.$$

On intègre par rapport à t , en prenant nulle la constante d'intégration (un terme constant n'a pas de caractère ondulatoire) :

$$\vec{B}(M, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

soit comme $\omega = kc$

$$\vec{B}(M, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z .$$

L'onde correspondante est une **onde stationnaire**, les champs électrique et magnétique étant en quadrature spatiale et temporelle.

Q 7. La tension mesurée s'annule quand $\vec{E} = \vec{0}$, $\forall t$, soit aux points tels que $\sin(kx) = 0$. Les abscisses correspondantes vérifient donc $kx = n\pi$, avec $n \in \mathbf{Z}$. Entre deux annulations successives, on a, comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} .$$

Entre 4 annulations, on mesure

$$4 \frac{\lambda}{2} = (42,8 - 37,3) \text{ cm} = 5,5 \text{ cm},$$

d'où $\lambda = 2,75 \text{ cm}$. De $f = c/\lambda$ on déduit $f = 10,9 \text{ GHz}$.

Q 8. On a déduit λ de la mesure des positions x_0 et x_4 des annulations extrêmes sur la courbe expérimentale.

La graduation est de 1 mm, d'où une incertitude relative $u(x_0) = u(x_4) = \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$.

On en a déduit la longueur $L = x_4 - x_0$, d'où l'incertitude correspondante :

$$u(L)^2 = u(x_0)^2 + u(x_4)^2$$

soit

$$u(L) = \sqrt{2} u(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 0,5 \text{ mm} = 0,41 \text{ mm} .$$

On en a déduit la longueur d'onde $\lambda = 2L/4 = L/2$, d'où

$$u(\lambda) = \frac{u(L)}{2} = 0,21 \text{ mm} .$$

La fréquence est donnée par $f = \frac{c}{\lambda}$, d'où

$$\frac{u(f)}{f} = \frac{u(\lambda)}{\lambda} .$$

On en déduit

$$u(f) = u(\lambda) \frac{f}{\lambda} = 0,21 \frac{10,9}{27,5}$$

soit $u(f) = 0,08 \text{ GHz}$.

L'écart normalisé entre la valeur mesurée et celle donnée par le constructeur est donné par

$$\sigma = \frac{11,0 - 10,9}{\sqrt{(0,6)^2 + (0,08)^2}} = 0,17 .$$

La condition $\sigma < 2$ est largement vérifiée : la valeur mesurée est bien compatible avec la valeur du constructeur.

cas n° 3 : On considère les vecteurs unitaires \vec{u}_\perp perpendiculaire aux barreaux et \vec{u}_\parallel parallèle aux barreaux.

On peut donc écrire

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\perp + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\parallel$$

En reprenant les deux cas précédents, on conclut que la composante parallèle aux rayons est réfléchi, tandis que la composante normale aux rayons est transmise, d'où pour $x > 0$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\perp .$$

► Avec $\vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}_y}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}$, on peut écrire pour $x > 0$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kx) [\vec{u}_y + \vec{u}_z].$$

Q 12. On a déterminé le champ magnétique en $x < 0$:

$$\vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Le champ étant nul dans le conducteur, la relation de passage en $x = 0$ s'écrit

$$\vec{0} - \vec{B}(x = 0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

soit

$$-\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x .$$

Les courants surfaciques sont contenus dans le plan $x = 0$, donc de la forme

$$\vec{j}_s(t) = j_{sy} \vec{u}_y + j_{sz} \vec{u}_z .$$

La relation de passage s'écrit alors

$$-\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = -\mu_0 j_{sy} \vec{u}_z + j_{sz} \vec{u}_y$$

On a donc $j_{sz} = 0$ et $j_{sy} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t)$, soit

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y .$$

Ces courants surfaciques sont la source du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$.

Q 13. On a vu que quand un onde arrive sur un conducteur, il apparaît des courants surfaciques dans le sens de \vec{E} , qui donne naissance à l'onde réfléchi; il n'y a alors pas d'onde après l'interface².

cas n° 1 : les barreaux sont parallèles à \vec{E} . Les courants peuvent s'y développer et la grille est vue comme un plan conducteur. On a $\vec{E} = \vec{0}$ pour $x > 0$.

cas n° 2 : les barreaux sont perpendiculaires à \vec{E} . Les courants ne peuvent donc pas s'y développer. Le champ n'interagit donc pas avec la grille, et continu son chemin. On a donc $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ pour $x > 0$.

2. Les courants surfaciques sont source de l'onde réfléchi dans le milieu $x < 0$, mais ils sont aussi source d'une onde dans le milieu $x > 0$. Cette onde est opposée à \vec{E}_i , ce qui conduit à un champ électrique total nul pour $x > 0$ (dans le conducteur).

Q 14. La grille se comporte comme un **polariseur** pour les ondes centimétriques.

Q 15. Nous avons vu qu'un conducteur métallique se comporte comme un miroir pour les ondes centimétriques. On peut donc utiliser une surface métallique parabolique pour réaliser le miroir du télescope. Une telle structure est cependant très lourde.

D'après l'étude de la grille, on peut utiliser une grillage métallique à mailles carrées, de côtés petits devant la longueur d'onde. On peut décomposer le champ électrique incident en deux composantes parallèles aux barreaux du grillage : chaque composante est alors réfléchi, comme avec une surface métallique.

Ci-dessous le radio-télescope de Parkes :



I.B — Lénigme des péritions

Q 16. Avec l'expression de $\vec{E}(M, t)$ proposée, on a $\text{div } \vec{E} = 0$ car \vec{E} n'a pas de composante selon \vec{u}_x et ne dépend que de x . D'après l'équation de Maxwell-Gauss, on a donc $\rho = 0$: le plasma est localement neutre.

On a

$$\rho = n_c e - n_e e = 0$$

d'où $n_e = n_c$.

Les cations étant immobiles, on a constamment $n_c = n$. On en déduit $n_e = n$.

Q 17. On applique la seconde loi de Newton à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}.$$

En régime harmonique, la notation complexe donne

$$i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$$

d'où

$$\vec{v} = -\frac{e}{im\omega} \vec{E}.$$

La densité volumique de courant est donnée par

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E}.$$

En identifiant avec $\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$ on en déduit la conductivité complexe

$$\underline{\theta}_B = \frac{ne^2}{im\omega}.$$

La conductivité électrique est imaginaire pure.

Q 18. De l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on déduit

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t}.$$

On a d'une part

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

car $\text{div } \vec{E} = 0$ compte tenu de la neutralité du plasma.

D'autre part

$$\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

En notation complexe, on a donc

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

soit

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \underline{\theta}_B \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Avec $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}x)]$ on obtient après simplification

$$-\underline{k}^2 = i\omega \mu_0 \underline{\theta}_B - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ane^2}{m\epsilon_0 c^2}.$$

On a donc

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}.$$

► La vitesse de groupe dépend de la densité électronique n du milieu, qui n'a aucune raison d'être constante le long du trajet de l'onde.

On peut aussi obtenir la relation de dispersion sans établir l'équation d'onde, en utilisant la notation complexe pour l'onde plane pseudo-harmonique.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$-i\underline{k} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

soit

$$\underline{k} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}.$$

Le rotationnel donne alors

$$-i\underline{k} \vec{u}_x \wedge [\underline{k} \vec{u}_x \wedge \vec{E}] = -i\underline{k} \vec{u}_x \wedge \omega \vec{B} = \underline{k}(\vec{u}_x \cdot \vec{E}) \vec{u}_x - \underline{k} \vec{E} (\vec{u}_x)^2 = -\underline{k} \vec{E}$$

comme $\vec{u}_x \cdot \vec{E} = 0$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss (neutralité locale).

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$-i\underline{k} \vec{u}_x \wedge \vec{B} = -i \frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} \vec{E} + i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

soit

$$\underline{k} \vec{u}_x \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} \vec{E} - \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

Avec l'expression précédente, on obtient

$$-\frac{\underline{k}^2}{\omega} \vec{E} = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} - \frac{\omega}{c^2} \right) \vec{E}$$

d'où la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m}.$$

Q 19. L'onde peut se propager si \underline{k} est réel, c'est-à-dire si $\underline{k}^2 > 0$. Il faut donc $\omega > \omega_p$.

Q 20. Dans le cas où l'onde se propage, on a $\underline{k} = k \in \mathbf{R}$. La vitesse de groupe est alors donnée par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Différentions la relation de dispersion :

$$2k dk = \frac{2\omega}{c^2} d\omega,$$

d'où

$$v_g = c \frac{k}{\omega} = c^2 \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega c}$$

soit

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

Q 21. La densité électronique n n'a a priori aucune raison d'être constante le long du trajet de l'onde.

Il en est donc de même de la vitesse de groupe, dépendant de ω_p elle-même fonction de n . On ne peut donc considérer v_g comme une constante dans l'intégrale, ce qui ne permet pas d'écrire $t(\omega) = L/v_g$.

Q 22. Comme

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_g = c$$

on a

$$t(\infty) = \int_0^L \frac{d\ell}{c} = \frac{L}{c}.$$

C'est la durée que mettrait l'onde pour parcourir la distance L en se propageant dans le vide.

Q 23. On remarque que

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c.$$

On a donc

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g} > \int_0^L \frac{d\ell}{c} = t(\infty).$$

On a donc $\tau(\omega) > 0$.

Cette grandeur représente le retard temporel que prend une onde de pulsation ω par rapport à sa propagation dans le vide (pour parcourir la même longueur L).

Q 24. La pulsation plasma est

$$\omega_p = \sqrt{\frac{10^2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}} = 5,6 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour des fréquences de l'ordre du gigahertz, on a $\omega \approx 6 \times 10^9 \text{ GHz}$.

On a donc

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \approx 9 \times 10^{-23} \ll 1.$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \tau(\omega) = t(\omega) - t(\infty) &\approx \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) d\ell - \frac{L}{c} = \int_0^L \frac{ne^2}{2m\epsilon_0\omega^2} d\ell \\ &= \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega^2} \int_0^L n d\ell = \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega^2} \text{DM}. \end{aligned}$$

Avec $\omega = 2\pi f$, on obtient

$$\tau(f) = A \frac{\text{DM}}{f^2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{e^2}{8\pi^2 m c \epsilon_0}.$$

Q 25. On calcule $A = 1,34 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Q 26. D'après la relation $\tau(f) = A \frac{\text{DM}}{f^2}$, les signaux de fréquence plus élevée présentent un retard plus petit lors de leur propagation; ils sont donc reçus en premier, comme on peut le constater sur l'enregistrement :

Le signaux de fréquence plus élevées arrivent en premier, par rapport aux signaux de fréquence plus basse qui présentent un retard de propagation plus important. C'est bien en accord avec les enregistrements, où les hautes fréquences sont reçues en premier :

— la fréquence $f_1 = 1480 \text{ MHz}$ est reçue à la date $t_1 = 200 \text{ ms}$;

— la fréquence $f_2 = 1320 \text{ MHz}$ est reçue à la date $t_2 = 400 \text{ ms}$.

► Il ne faut pas interpréter la « forme » de la courbe en lisant comme $t = A \frac{\text{DM}}{f^2}$, car l'abscisse représente la date de réception, qui n'a rien à voir avec le retard dû à la propagation.

Q 27. On repère deux instants de réception pour deux valeurs de la fréquences : $t_1 = 200 \text{ ms}$ pour $f_1 = 1480 \text{ MHz}$ et $t_2 = 400 \text{ ms}$ pour $f_2 = 1320 \text{ MHz}$.

On en déduit $\tau(f_2) - \tau(f_1) = t(f_2) - t(f_1) = A \times \text{DM} \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right)$, d'où

$$\text{DM} = \frac{t(f_2) - t(f_1)}{A \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right)}.$$

On calcule $\text{DM} = 1,27 \times 10^{25} \text{ m}^{-2}$.

Compte tenu de la précision de lecture, on retient

$$\text{DM} = 1,3 \times 10^{25} \text{ m}^{-2}.$$

Conversion : $1 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m} \times 10^6 \text{ m}^{-3}$; d'où

$$\text{DM} = \frac{1,3 \times 10^{25}}{3,086 \times 10^{22}} = 4,2 \times 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

La mesure de dispersion vaut $\text{DM} = 4,2 \times 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q 28. L'ordre de grandeur de la mesure de dispersion du signal ne permet pas d'exclure une origine extragalactique.

I.C — Le four à micro-ondes

Q 29. Le champ électrique étant nul dans les parois métalliques, la continuité de sa composante tangentielle (relation de passage) implique la nullité de cette composante sur les parois du four.

Compte tenu de la forme du champ, cette condition est déjà vérifiée pour les parois $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

Sur la paroi $x = a$, on doit avoir

$$E_y(x = a, y, z, t) = 0 \quad \text{et} \quad E_z(x = a, y, z, t) = 0 \quad \forall y, z, t$$

soit

$$E_2 \sin(k_x a) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall y, z, t$$

et

$$E_3 \sin(k_x a) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall y, z, t.$$

On en déduit $\sin(k_x a) = 0$, soit $k_x a = m\pi$ avec $m \in \mathbf{N}$.

► ou $E_2 = 0$ et $E_3 = 0$.

De même sur la paroi $y = b$, on doit avoir

$$E_x(x, y = b, z, t) = 0 \quad \text{et} \quad E_z(x, y = b, z, t) = 0 \quad \forall x, z, t$$

soit

$$E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y b) \sin(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, z, t$$

et

$$E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y b) \cos(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, z, t.$$

On en déduit de même $\sin(k_y b) = 0$, soit $k_y b = n\pi$ avec $n \in \mathbf{N}$.

Enfin sur la paroi $z = d$ on doit avoir

$$E_x(x, y, d, t) = 0 \quad \text{et} \quad E_y(x, y, d, t) = 0 \quad \forall x, y, t$$

soit

$$E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z d) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, y, t$$

et

$$E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z d) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, y, t.$$

On en déduit de même $\sin(k_z d) = 0$, soit $k_z d = \ell \pi$ avec $\ell \in \mathbb{N}$.

On conclut donc par

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}}, \quad \boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}} \quad \text{et} \quad \boxed{k_z = \frac{\ell\pi}{d}} \quad \text{avec} \quad (m, n, \ell) \in \mathbb{N}^3.$$

Q 30. On calcule

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 E_x = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_x.$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 E_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2 E_z.$$

Le champ \vec{E} vérifie l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit

$$-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2\right] \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}.$$

La pulsation du mode (m, n, ℓ) est donc donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{m,n,\ell} &= c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2} \\ &= c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}. \end{aligned}$$

Avec $\omega_{n,m,\ell} = 2\pi f_{n,m,\ell}$ on en déduit la fréquence du mode (n, m, ℓ) :

$$\boxed{f_{m,n,\ell} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}}.$$

Q 31. Les zones bleues correspondent aux zones où l'eau s'est évaporée, c'est-à-dire aux points chauds, où le champ a cédé le plus d'énergie à la matière. La puissance cédée étant proportionnelle à $\langle \vec{E}^2 \rangle$ (moyenne temporelle), **ces zones correspondent au maximum de $\langle \vec{E}^2 \rangle$.**

La dépendance selon x du champ quadratique est, selon la composante du champ, sous la forme

$$\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)$$

ou

$$\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right).$$

Elle est donc sinusoïdale avec une période a/m .

On voit sur les figure 8.a) et 8.c) qu'il y a 3 périodes selon x , d'où $\boxed{m=3}$.

On suit le même raisonnement pour les deux autres variables :

— les figures 8.b) et 8.d) indiquent qu'il y a 2 période selon z , d'où $\boxed{n=2}$.

— les figures 8.a) et 8.b) indiquent qu'il y a 3 période selon z , d'où $\boxed{\ell=3}$.

Le mode observé est donc $\boxed{(m, n, \ell) = (3, 2, 3)}$.

La fréquence de ce mode est

$$f_{323} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{0,36}\right)^2 + \left(\frac{2}{0,24}\right)^2 + \left(\frac{3}{0,265}\right)^2}$$

soit $\boxed{f_{323} = 2,45 \times 10^9 \text{ Hz}}$, en accord avec les données.

La figure 8.b) correspond à $x = a/2$; on a donc $\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) = -1$

et $\cos\left(\frac{3\pi x}{b}\right) = 0$. Le champ s'écrit alors

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_z = -E_3 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Le champ quadratique moyen est

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{E_2^2}{2} \cos^2\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{3\pi z}{d}\right) + \frac{E_3^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi z}{d}\right).$$

Paroi $y = 0$.

Sur cette paroi, le champ s'écrit

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E_2 \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

et le champ quadratique moyen

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{E_2^2}{2} \sin^2\left(\frac{3\pi z}{d}\right).$$

Le champ électrique n'est pas nul en tout point de la paroi $y = 0$, mais il est normal à cette paroi ($E_y \neq 0$). Sa composante tangentielle à la paroi est bien nulle, en accord avec les relations de passage (on peut déduire de la relation de passage qu'il existe une charge surfacique sur la paroi).

Du fait de sa dépendance en

$$\sin^2\left(\frac{3\pi z}{d}\right) = 1 - \cos\left(2\pi \frac{z}{d/3}\right),$$

le champ quadratique moyen est de période spatiale $d/3$. Il présente donc 3 maxima selon z , visualisés par les 3 taches (points chauds) au contact de la paroi.

Paroi $z = 0$.

Sur cette paroi, le champ s'écrit

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = -E_3 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos(\omega t) \end{cases}$$

et le champ quadratique moyen

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi y}{b}\right).$$

D'après la figure 8.b, il n'y a pas de point chaud sur la paroi $z = 0$. Le champ quadratique moyen doit donc y être nul en tout point, ce qui implique $E_3 = 0$.

Finalement, pour le mode considéré, le champ n'a de composantes que selon \vec{u}_x et \vec{u}_y .

Q 32. Avec $\vec{E} = E(x, t)\vec{u}_y$, l'équation de Maxwell-Faraday donne

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z.$$

La relation de dispersion, obtenue à partir de l'équation de d'Alembert, donne $\omega = \frac{nc\pi}{a}$, d'où

$$\vec{B} = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{E_0}{c}.$$

Q 33. La densité volumique d'énergie dans la cavité est

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2(x, t)}{2} + \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t)$$

soit

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right].$$

L'énergie totale est

$$\begin{aligned} W(t) &= \int \frac{dW}{d\tau} d\tau = \int_0^a \frac{dW}{d\tau} S dx \\ &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \int_0^a \left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right] dx \\ &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \left[\frac{a}{2} \sin^2(\omega t) + \frac{a}{2} \cos^2(\omega t) \right] \end{aligned}$$

soit

$$W = \frac{B_0^2 Sa}{4\mu_0}.$$

L'énergie totale dans la cavité est constante au cours du temps. Ce résultat est attendu car il n'y a aucun phénomène dissipatif pris en compte avec un conducteur parfait.

Q 34. Si E_0 est l'amplitude du champ électrique, l'amplitude du courant de conduction est donnée par

$$j_0 = \sigma E_0$$

et l'amplitude du courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donnée par

$$j_{d,0} = \omega \epsilon_0 E_0 = 2\pi f \epsilon_0 E_0.$$

Le courant de déplacement peut être négligé devant le courant de conduction si

$$\frac{j_{d,0}}{j_0} = \frac{2\pi \epsilon_0 f}{\sigma} \ll 1.$$

Avec $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, on peut négliger le courant de déplacement si

$$f \ll \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0} = 2,7 \times 10^{16} \text{ Hz}.$$

Cette condition est largement vérifiée dans le four à micro-ondes où $f = 2,45 \times 10^9 \text{ Hz}$.

Q 35. En négligeant le courant de déplacement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

On en déduit

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{rot } \vec{j} = \mu_0 \text{rot } \vec{E}.$$

Avec

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \Delta \vec{E}$$

et l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

on obtient

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Il s'agit d'une **équation de la diffusion**. Sa non invariance par renversement du temps (changement de variable $t' = -t$), du fait de la dérivée temporelle d'ordre impair en t (premier ordre ici), traduit l'irréversibilité du phénomène.

Une telle équation régit l'évolution de la température dans un milieu siège d'un phénomène de conduction thermique.

Q 36. Écrivons que le champ proposé vérifie l'équation précédente :

$$\frac{df}{dx} e^{i\omega t} = \mu_0 \sigma i \omega \underline{f}(x) e^{i\omega t} \quad \forall x, t$$

soit comme $e^{i\omega t} \neq 0$,

$$\frac{df}{dx} - i\omega \mu_0 \sigma \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire homogène du second ordre est

$$r^2 - i\omega \mu_0 \sigma = 0,$$

soit

$$r^2 = i\omega \mu_0 \sigma = \omega \mu_0 \sigma \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right).$$

Ses racines sont

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1 + i) = \pm \frac{1 + i}{\delta}$$

en posant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

homogène à une longueur.

On en déduit la solution générale de l'équation différentielle

$$\underline{f}(x) = \underline{A}_1 e^{(1+i)x/\delta} + \underline{A}_2 e^{-(1+i)x/\delta}.$$

Le champ magnétique (et donc $\text{Re}(f)$) ne peut diverger pour $x \rightarrow +\infty$, donc $\underline{A}_1 = 0$.

En $x = 0$, la continuité du champ magnétique impose

$$\underline{\vec{B}}(x=0, t) = B_0 e^{i\omega t} \underline{\vec{u}}_z = \underline{f}(0) e^{i\omega t} \underline{\vec{u}}_z$$

d'où

$$\underline{f}(0) = \underline{A}_1 = B_0.$$

On a donc

$$\underline{f}(x) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta}.$$

Q 37. Le champ magnétique est donné par la partie réelle de

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta} e^{i\omega t} \underline{\vec{u}}_z = B_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \underline{\vec{u}}_z$$

soit

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \underline{\vec{u}}_z.$$

Le champ magnétique se propage dans le conducteur dans le sens des x croissants, avec une amplitude qui décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique δ , d'autant plus petite que la pulsation est élevée (c'est l'effet de peau; δ est alors appelée épaisseur de peau).

Q 38. La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à un conducteur ohmique a pour expression

$$p(M, t) = \underline{\vec{j}}(M, t) \cdot \underline{\vec{E}}(M, t) = \sigma \underline{\vec{E}}(M, t)^2 = \frac{\underline{\vec{j}}(M, t)^2}{\sigma}.$$

Q 39. Le vecteur densité de courant électrique est donné par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{j}}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \underline{\vec{B}} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \underline{\vec{u}}_y \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \underline{\vec{u}}_y \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]^2 \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[\cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[1 - 2 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]. \end{aligned}$$

La puissance volumique moyenne (temporelle) est donc donnée par

$$\langle p(x) \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta}.$$

On considère une section S de paroi, dans le demi-espace $x > 0$ (avec les données relatives au four, on calcule une épaisseur de peau $\delta = 8,3 \mu\text{m}$, très faible devant l'épaisseur des

plaques métalliques des parois, ce qui justifie de pouvoir les considérées comme semi-infinies). La puissance moyenne dissipée vaut

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{+\infty} \langle p(x) \rangle S dx = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2x/\delta} dx \\ &= \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \left[-\frac{\delta}{2} e^{-2x/\delta} \right]_0^{+\infty} = \frac{SB_0^2}{2\mu_0^2 \sigma \delta}. \end{aligned}$$

En prenant en compte les deux parois, on obtient la puissance moyenne totale dissipée $P = 2P_1$, soit

$$P = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \sigma \delta}.$$

On élimine σ à partir de l'expression de l'épaisseur de peau, soit

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2},$$

d'où

$$P = \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}.$$

Q 40. On a établi à la question 33 l'expression de l'énergie totale portée par le champ électromagnétique dans la cavité :

$$W = \frac{B_0^2 Sa}{4\mu_0}.$$

On suppose cette expression toujours valable malgré la conductivité finie des parois³.

L'énergie dissipée dans les parois pendant une période $T = 2\pi/\omega$ s'exprime en fonction de la puissance P dissipée :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = PT = \frac{2\pi}{\omega} P = \frac{2\pi}{\omega} \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}.$$

Le facteur de qualité vaut donc

$$Q = 2\pi \frac{W}{\mathcal{E}_{\text{diss}}} = 2\pi \frac{B_0^2 Sa}{4\mu_0} \frac{\omega}{2\pi} \frac{2\mu_0}{SB_0^2 \omega \delta}$$

soit

$$Q = \frac{a}{2\delta}.$$

Q 41. On calcule $\delta = 8,3 \mu\text{m}$ pour le four, d'où

$$Q = 2,2 \times 10^4.$$

On remarque que $Q \gg 1$: l'atténuation est faible.

3. Dans le cas d'une conductivité infinie, on a le champ électrique est nul sur les parois.

Dans le cas d'une conductivité finie, le champ sur la paroi $x = 0$ s'écrit d'après Q 39 : $\underline{\vec{E}}(0, t) = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \underline{\vec{u}}_y$ et a pour amplitude $E_0 = \frac{B_0}{\mu_0 \delta \sqrt{2}} = \frac{B_0}{\mu_0 \sigma \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \frac{B_0}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0 \sigma}}$. On a vu que nous sommes dans le cas où $f\epsilon_0 \ll \sigma$, soit $\frac{\omega}{\sigma} \ll \frac{1}{\epsilon_0}$; on a donc $E_0 \ll \frac{B_0}{\mu_0 \epsilon_0} = B_0 c$. Dans le cas du conducteur parfait, l'amplitude du champ électrique dans la cavité, superposition de deux ondes planes, a pour ordre de grandeur $E_{0,\text{cav}} \approx B_0 c$, et est nul sur les parois.

Ici, le champ sur les parois est négligeable devant le champ dans la cavité; on peut donc considérer qu'en première approximation, le champ dans la cavité est peu perturbé par la conductivité finie des parois.

Q 42. En l'absence de rayonnement, la variation de l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité est donnée par l'énergie absorbée dans les parois. Entre t et $t + T$, le bilan d'énergie pour la cavité s'écrit donc

$$W(t + T) - W(t) = -\mathcal{E}_{\text{diss}} = -2\pi \frac{W(t)}{Q}$$

Comme $Q \gg 1$, la variation relative d'énergie sur une période est très faible et on peut assimiler le taux de variation à une dérivée :

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{W(t + T) - W(t)}{T} = -2\pi \frac{W(t)}{QT}$$

Avec $T = 2\pi/\omega$, on obtient

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega}{Q} W(t) = 0.$$

L'énergie décroît de façon exponentielle selon la loi

$$W(t) = W(0) e^{-t/\tau},$$

avec une constante de temps

$$\tau = \frac{Q}{\omega}.$$

Q 43. On calcule $\tau = 1,4 \mu\text{s}$.

La décroissance du champ présent dans la cavité lorsque l'on coupe le klystron se fait avec une durée bien plus faible que la durée typique d'un périodes. Le champ restant dans la cavité après ouverture de la porte ne permet pas d'expliquer l'observation des périodes.

- Une étude plus poussée a montré que la source des périodes était le magnétron du four (source du champ magnétique) : un certain type de magnétron provoquerait l'émission des périodes. Cependant, la variation fréquentielle observée lors de l'émission reste inexplicable.