PREMIÈRE PARTIE

ETUDE D'UN FAISCEAU LASER

I.- Modèle à onde plane

I.1 Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants.

I.2 En déduire les équations de propagation pour le champ électrique $\vec{E}$ et pour le champ magnétique $\vec{B}$.

Un faisceau laser peut être modélisé par une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le vide et dans le sens des z croissants. Le champ électrique de l'onde en un point M de cote z est donné par :

$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp\left[i(kz - \omega t)\right] \vec{e}_x$, *où* E_0 *est un réel positif et i le nombre complexe de module unité et d'argument* $+\pi/2$.

I.3.a Donner la relation entre k et ω (relation de dispersion) et déterminer le champ magnétique de l'onde.

I.3.b Rappeler la définition du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(t)$. Déterminer sa moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}\rangle$ pour l'onde étudiée.

I.3.c Quelle est l'expression de la puissance moyenne qui traverse une surface S perpendiculaire à l'axe *Oz* ? En déduire la densité de puissance J_L (puissance moyenne par unité de surface).

I.3.d Un laser YAG-Nd^{3+} possède une densité de puissance J_L = $4{,}0.10^4$ W.cm^{-2}. Calculer l'amplitude E_0 du champ électrique correspondant.

II.- Modèle du faisceau gaussien

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau du laser dont la section S est en pratique inférieure à 1 mm^2. Dans un modèle plus réaliste, l'onde électromagnétique du laser (se propageant toujours dans le vide et dans le sens des z croissants) peut être représentée comme une onde de profil gaussien, dont le champ électrique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut être mis sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z) \exp\left[i(kz - \omega t)\right] \vec{e}_x$$

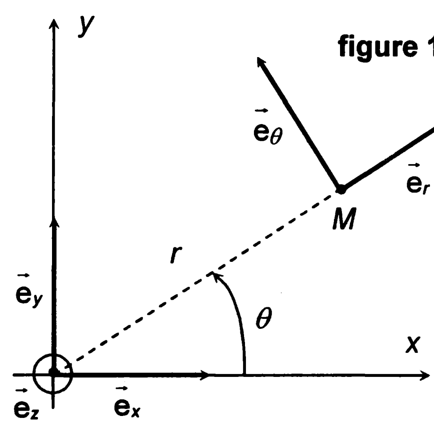

figure 1.

avec k = $2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde. Dans cette expression, l'amplitude complexe $\underline{E}(r, z)$ du champ électrique dépend de r et de z et s'écrit :

$$\underline{E}(r,z) = E_0 \frac{i z_0}{z + i z_0} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + i z_0)}\right),$$

où z_0 est une constante positive appelée distance de Rayleigh et E_0 un réel positif.

II.1.a Montrer que le carré du module de $\underline{E}(r, z)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$|\underline{E}(r,z)|^2 = A^2(z)\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \qquad \text{(E1)}$$

avec $w(z) = w_0\sqrt{1+z^2/z_0^2}$. Déterminer la constante w_0 ($w_0 > 0$) en fonction de z_0 et λ, puis montrer que : $A(z)\,w(z) = E_0\,w_0$.

II.1.b Représenter les graphes des fonctions $A(z)$ et $w(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

II.1.c Représenter les graphes du module $|\underline{E}(r, z)|$ du champ électrique en fonction de r lorsque $z = 0$, puis pour une valeur fixée $z > 0$. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$?

En pratique, l'amplitude complexe du champ électrique est une fonction lentement variable de r et z, ce qui signifie qu'à l'échelle de la longueur d'onde λ, les variations de $\underline{E}(r, z)$ sont négligeables.

II.2.a Justifier que cela revient à écrire : $|\partial\underline{E}/\partial r| \ll k|\underline{E}|$ et $|\partial\underline{E}/\partial z| \ll k|\underline{E}|$.

II.2.b Compte tenu de l'approximation précédente, montrer à l'aide des équations de Maxwell que le champ magnétique de l'onde peut se mettre sous la forme approchée :

$$\vec{\underline{B}}(M,t) \approx \frac{\underline{E}(r,z)}{c}\exp\left[i(kz-\omega t)\right]\vec{e}_y \qquad \text{(E2)}$$

On pourra utiliser les formules d'analyse vectorielle rassemblées en fin d'énoncé.

II.3.a Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle\vec{\Pi}\rangle$ et déterminer la densité de puissance de cette onde $J(r, z) = \left\|\langle\vec{\Pi}\rangle\right\|$.

Etudions la répartition de $J(r, z)$ dans un plan perpendiculaire à Oz et situé à la cote z et notons $J_{max}(z)$ la valeur maximale de J dans ce plan. Le rayon $R(z)$ du faisceau laser à la cote z est défini comme la valeur de r pour laquelle $J = J_{max}(z) / e^2$, où e est la base du logarithme népérien.

II.3.b Déterminer l'expression de ce rayon en fonction de $w(z)$.

II.3.c Montrer que lorsque $z \gg z_0$ le faisceau a la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β, qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0, puis en fonction de w_0 et λ.

L'angle β est appelé divergence du faisceau laser.

II.3.d Application numérique : dans le cas d'un laser YAG-Nd^{3+}, possédant pour caractéristiques : $w_0 = 0{,}50$ mm et $\lambda = 1{,}06$ µm, déterminer z_0 et β en degrés. Reproduire le même calcul pour un laser CO_2 possédant le même w_0 mais de longueur d'onde $\lambda = 10{,}6$ µm. Conclure.

III.- Absorption de l'énergie du laser dans un milieu métallique

L'interaction d'une onde électromagnétique avec un métal se fait essentiellement par l'intermédiaire des électrons de conduction. Dans cette partie, nous modéliserons un métal homogène et électriquement neutre ($\rho_{él} = 0$) comme un milieu ayant les mêmes propriétés que le vide (permittivité ε_0 et perméabilité μ_0) et constitué d'un ensemble d'électrons de conduction, de charge – e, de masse m et de densité uniforme N (nombre d'électrons par unité de volume). Ce métal est fixe par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

Etant donné un électron de vitesse $\vec{v}$, son interaction avec le milieu métallique est modélisée par une force de frottement fluide de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} \text{ , où } \tau \text{ est un coefficient positif.}$$

Supposons que le métal soit soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω, de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(-i\omega t) \text{ , où } \underline{\vec{E}}_0 \text{ est un vecteur complexe constant.}$$

III.1 Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron de conduction. Quelle est la dimension de τ ?

En régime sinusoïdal permanent, la vitesse d'un électron s'écrit, en notation complexe :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{V}}(i\omega)\exp(-i\omega t)$$

III.2.a Déterminer l'expression de $\underline{\vec{V}}(i\omega)$ en fonction de $i\omega$, e, τ, m et de $\underline{\vec{E}}_0$.

III.2.b En déduire le vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}}$ (en notation complexe) sous la forme :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}(i\omega)\underline{\vec{E}}_0 \exp(-i\omega t) \qquad \text{(E3)}$$

et expliciter la grandeur complexe $\underline{\sigma}(i\omega)$ en fonction des données du problème. Quelle est la nature de ce milieu (du point de vue des propriétés électromagnétiques) ? Que représente physiquement $\underline{\sigma}(\omega)$?

Etudions maintenant la propagation d'une onde électromagnétique dans ce milieu. Supposons que ce métal remplit tout le demi-espace z > 0 et que le champ électrique de l'onde peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{f}(z)\exp(-i\omega t)\vec{e}_x \text{ , où } \underline{f}(z) \text{ est une fonction complexe à}$$

déterminer.

En tout point du métal existe une densité de courant de conduction reliée au champ électrique par l'équation (E3).

III.3.a Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu. En déduire l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par le champ électrique.

III.3.b Montrer que la fonction $\underline{f}(z)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2\underline{f}}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{n}^2 \underline{f} = 0 \qquad \text{(E4)}$$

où $\underline{n}$ est une grandeur complexe telle que :

$$\underline{n}^2 = 1 + \frac{i(\tau\omega_p)^2}{\tau\omega(1 - i\tau\omega)} \text{ ,} \qquad \text{(E5)}$$

en introduisant la pulsation $\omega_p = \sqrt{\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_o m}}$ (appelée pulsation plasma).

Quelle est la signification physique de $\underline{n}$?

III.3.c Calculer la valeur numérique de ω_p, en prenant l'exemple de l'aluminium pour lequel : $N = 1{,}81.10^{29}\ m^{-3}$ et $\tau = 8{,}0.10^{-15}$ u.S.I.

Dans la suite du problème, nous poserons $\underline{n} = n' + i\ n''$, où n' et n' sont deux nombres réels (n' > 0) et $k = \omega / c$.

III.3.d Déterminer la solution complète de l'équation (E4) sachant que l'onde se propage dans le sens des z croissants et en posant $\underline{A}_o = \underline{f}(z = 0)$.
Quel est le phénomène physique généré par l'existence de n" ?
Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ de cette onde.

III.3.e Déterminer numériquement $\underline{n}^2$, puis calculer la valeur numérique de n' sachant que n" = 13,41 dans le cas de l'aluminium et pour la longueur d'onde du laser YAG-Nd^{3+} ($\lambda = 1{,}06\ \mu m$). Commenter ce résultat.

III.4 Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.

III.5.a En déduire la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
Quelle est la puissance moyenne qui traverse une surface S perpendiculaire à *Oz* et située à la cote $z > 0$?
Ecrire cette puissance sous la forme : $P(z) = P_0 \exp(-\alpha z)$, en donnant l'expression de P_0 en fonction de μ_o, c, $|\underline{A}_o|^2$, n' et S, puis celle du paramètre réel α (appelé coefficient d'absorption) en fonction de k et n".

III.5.b Déterminer la valeur numérique de α pour l'aluminium et une pulsation ω correspondant au laser YAG-Nd^{3+}. En déduire un ordre de grandeur de la profondeur de pénétration de l'énergie de ce laser dans un échantillon d'aluminium. Commenter ce résultat.

La puissance moyenne P_o transmise à travers la surface S située en z = 0 est entièrement absorbée par le métal. Si P_L désigne la puissance moyenne du faisceau laser incident à travers la même surface S perpendiculaire à la direction de propagation et P_R la puissance moyenne réfléchie par la surface métallique, la réflectivité R et l'absorptivité A de la surface métallique sont définis par les relations :

$$R = \frac{P_R}{P_L} \quad \text{et} \quad A = \frac{P_o}{P_L}$$

Ces coefficients dépendent de la longueur d'onde λ du rayonnement utilisé.

III.6 Quelle est la relation liant les deux coefficients R et A ?

Données numériques générales

Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
Masse de l'électron :	$m = 9{,}11.10^{-31}$ kg
Charge de l'électron :	$e = 1{,}60.10^{-19}$ C

Formulaire

Gradient (en coordonnées cylindriques) pour un champ scalaire f :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Relations entre opérateurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{A}\right) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A}$$

Laplacien (en coordonnées cylindriques) pour un champ scalaire f :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \text{r}}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel (en coordonnées cartésiennes) :

$$\Delta\vec{A} = (\Delta A_x)\,\vec{e}_x + (\Delta A_y)\,\vec{e}_y + (\Delta A_z)\,\vec{e}_z$$

Valeur moyenne du produit vectoriel de deux fonctions vectorielles sinusoïdales de même pulsation (notation complexe) :

$$<\vec{a}\wedge\vec{b}> = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{\vec{a}}\wedge\underline{\vec{b}}^*\right)$$, $\underline{\vec{b}}^*$ représentant le complexe conjugué de $\underline{\vec{b}}$

FIN DE L'EPREUVE