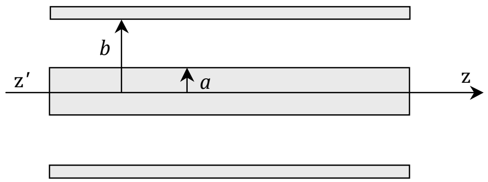
**Corrigé du TD : PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES**
**ONDES E.M. DANS LE VIDE**

# 6 Onde dans un câble coaxial

*Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique intérieur de rayon $a$ et d'une enveloppe métallique mince cylindrique, de rayon intérieur $b$ ($b > a$). On désigne par z'z l'axe de ce câble. Un point $M$ sera repéré par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$.*




*On se place en régime sinusoïdal de pulsation $\omega$. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant $i(z,t)$, dépendant à la fois de la côte $z$ et du temps $t$, tel que sa représentation complexe soit donnée par l'expression :*

$$\underline{i}(z,t) = \underline{I}(z)\,\exp(-i\omega t)$$

*où $\underline{I}(z)$ est une fonction complexe à déterminer. On suppose en outre que les représentations complexes des champs électrique et magnétique dans l'espace $a < r < b$ s'écrivent :*

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z,t)\,\overrightarrow{u_r} \text{ et } \overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \underline{B}(r,z,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

*On donne en coordonnées cylindriques :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1. *À l'aide de l'expression intégrale de l'équations de Maxwell-Ampère, établir la relation entre la composante $\underline{B}(r,z,t)$ et le courant $\underline{i}(z,t)$.*

   En régime variable, l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère (c'est à dire le théorème d'Ampère) sécrit :

$$\oint_{C_F} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_0\, i_S(t) + \frac{1}{c^2}\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

où $C_F$ est une courbe fermée orienté, $S$ est la surface délimités par $C_F$ orientée par la règle de la main droite et $i_S(t)$ le l'intensité électrique qui traverse $S$.

Ici on choisit pour $C_F$ le cercle d'axe $Oz$ et de rayon $r$ tel que $a < r < b$. On a donc :

$$\oint_{C_F} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\ell} = \int_0^{2\pi} B(r,z,t)\, r d\theta = 2\pi r\, B(r,z,t)$$

$i_s(t) = i(z,t)$ et :

$$\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \frac{\partial E}{\partial t}\overrightarrow{u_r}.dS\,\overrightarrow{u_z} = 0$$

par orthogonalité des deux vecteurs. On a donc finalement :

$$2\pi r\, B(r,z,t) = \mu_0\, i(z,t) \quad \text{d'où en complexe} \quad \boxed{\underline{B}(r,z,t) = \frac{\mu_0\, \underline{i}(z,t)}{2\pi r}}$$

2. a) *Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère permet de relier le champ électrique $\underline{E}(r,z,t)$ à la dérivée par rapport à $z$ de l'intensité du courant électrique dans le câble, soit $\partial \underline{i}/\partial z$.*

   On utilise maintenant l'équation de Maxwell-Ampère (locale) dans l'espace $a < r < b$. Or cet espace est vide de charges et de courants : $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

   d'où, à l'aide du formulaire et en projection sur $\overrightarrow{u_r}$ :

$$-\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Cette équation est aussi valable avec les représentations complexes :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -\,c^2\,\frac{\partial \underline{B}}{\partial z} = -\,\frac{\mu_0 c^2}{2\pi r}\,\frac{\partial \underline{i}(z,t)}{\partial z}} \qquad (1)$$

b) *En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, déduire une équation différentielle satisfaite par la fonction $\underline{I}(z)$.*

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\,\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

d'où, avec le formulaire et en projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\,\frac{\partial B}{\partial t}$$

qui est aussi valable en complexes :

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial z} = -\,\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\,\frac{\mu_0}{2\pi r}\,\frac{\partial \underline{i}(z,t)}{\partial t} \qquad (2)$$

Dérivons (2) par rapport à $t$ et (1) par rapport à $z$ puis utilisons le théorème de Schwarz pour permuter les dérivées partielles par rapport à $z$ et par rapport à $t$. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \underline{E}}{\partial z}\right) = -\,\frac{\mu_0}{2\pi r}\,\frac{\partial^2 \underline{i}(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) = -\,\frac{\mu_0 c^2}{2\pi r}\,\frac{\partial^2 \underline{i}(z,t)}{\partial z^2}$$

L'égalité des termes du premier membre (Schwarz) conduit à :

$$\frac{\partial^2 \underline{i}(z,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 \underline{i}(z,t)}{\partial z^2}$$

Compte-tenu de $\underline{i}(z,t) = \underline{I}(z)\,\exp(-i\omega t)$, cette équation se transforme en :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 \underline{I}(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{I}(z) = 0}$$

ce qui est l'équation cherchée.

3. *Achever la résolution de ce problème en explicitant la solution de l'équation différentielle précédente, compte tenu du fait que l'on n'envisage que des ondes se propageant selon les "z croissants" et déterminer les expressions de $i(z,t) = Re[\underline{i}(z,t)]$ ainsi que du champ électromagnétique réel dans l'espace $a < r < b$.*

Posons $k = \omega/c$. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = -k^2$$

et elle admet deux racine imaginaires pures : $r_+ = ik$ et $r_- = -\,ik$. La solution générale est donc :

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_1\,e^{ikz} + \underline{I}_2\,e^{-ikz}$$

d'où :

$$\underline{i}(z,t) = \underline{I}_1\,e^{i(kz-\omega t)} + \underline{I}_2\,e^{-i(kz+\omega t)}$$

Le premier terme est une OPPS qui se propage dans le sens $+\overrightarrow{u_z}$ tandis que le second terme est une OPPS qui se propage dans le sens $-\,\overrightarrow{u_z}$. On retient donc :

$$\boxed{\underline{i}(z,t) = \underline{I}_1\,e^{i(kz-\omega t)}}$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{\underline{B}(r,z,t) = \frac{\mu_0\,\underline{I}_1}{2\pi r}\,e^{i(kz-\omega t)}}$$

puis :

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c^2}{2\pi r}\frac{\partial \underline{i}(z,t)}{\partial z} = -\frac{\underline{I}_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\, ik\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Il reste à primittiver par rapport au temps pour trouver :

$$\boxed{\underline{E}(r,z,t) = \frac{\underline{I}_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{k}{\omega}\, e^{i(kz-\omega t)} = \frac{\underline{I}_1}{2\pi\varepsilon_0 c\, r}\, e^{i(kz-\omega t)}}$$

En posant $\underline{I}_1 = I_1 e^{i\varphi}$ on peut revenir aux grandeurs réelles :

$$\boxed{i(z,t) = I_1\, \cos(kz-\omega t+\varphi)\ \ ;\ \ B(r,z,t) = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi r}\, \cos(kz-\omega t+\varphi)}$$

et

$$\boxed{E(r,z,t) = \frac{I_1}{2\pi\varepsilon_0 c\, r}\, \cos(kz-\omega t+\varphi)}$$

# 9 Pression de radiation

On reprend les expressions du cours :

$$\overrightarrow{E}(x,t) = 2E_m \sin(kx)\sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(x,t) = 2\frac{E_m}{c}\cos(kx)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

On sait aussi que $\sigma = 0$ et $\overrightarrow{j}_S = 2\dfrac{E_m}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}$ (résultats du cours). On en déduit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{B}(0,t)\,\mathrm{d}S = \frac{2E_m^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}S$$

d'où :

$$<\overrightarrow{\mathrm{d}F}> = \frac{E_m^2}{\mu_0 c^2}\,\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}S$$

On remarque que la force est normale à la paroi et qu'elle est proportionnelle à l'élément de surface d$S$. On peut donc introduire une pression $P$ définie par $<\overrightarrow{\mathrm{d}F}> = P\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_x}$ et donc :

$$\boxed{P = \frac{E_m^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_m^2}$$

## 10 Cavité électromagnétique

Soient deux plans conducteurs réalisés dans un métal parfait, parallèles et situés en $x = 0$ et $x = a$ ($a > 0$). L'espace entre ces deux plans est le vide et nous supposons que le champ électrique entre ces deux plans peut s'écrire :

$$\overrightarrow{E} = f(x)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}$$

où $f$ est une fonction à déterminer.

1. Il s'agit d'une onde électromagnétique stationnaire et polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{e_y}$.
2. L'espace entre les deux plans étant le vide le champ électrique satisfait à l'équation de d'Alembert. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

donc :

$$f"(x)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\omega^2}{c^2}\,f(x)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{0}$$

Ceci devant être vrai pour tout $t$, on peut simplifier $\cos(\omega t)$. On projette alors sur $\overrightarrow{e_y}$ pour trouver, en posant $k = \omega/c$ :

$$f"(x) + k^2\,f(x) = 0$$

3. Les deux métaux étant parfaits, la **composante tangentielle** de $\overrightarrow{E}$ doit s'annuler à la surface du métal, c'est à dire en $x = 0$ et $x = a$. Cela conduit à :

$$\boxed{f(0) = f(a) = 0}$$

Quelle condition doit satisfaire $f(x)$ en $x = 0$ et $x = a$ ?

4. La solution de cette équation différentielle est :

$$f(x) = \lambda\cos(kx) + \mu\sin(kx)$$

avec $f(0) = \lambda = 0$ et $f(a) = \mu\sin(ka) = 0$. Si on veut $\mu \neq 0$ on doit imposer :

$$ka = n\pi \implies k = \frac{n\pi}{a} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\omega = \frac{n\pi c}{a} = \omega_n}$$

5. On a :

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = -f'(x)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z} = -k\mu\cos(kx)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où :

$$\overrightarrow{B} = -\mu\frac{k}{\omega}\cos(kx)\sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

donc (en posant $\mu = E_0$) :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(\omega_n t)\,\overrightarrow{e_z}}$$

## 11 Onde entre deux plans métalliques

1. Le milieu entre les deux plans étant le vide, le champ électrique obéit à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}=\overrightarrow{0}$$

On en déduit que :

$$-k^2 f(y)\cos(\omega t-kx)\,\overrightarrow{e_z}+f"(y)\cos(\omega t-kx)\,\overrightarrow{e_z}+\frac{\omega^2}{c^2}f(y)\cos(\omega t-kx)\,\overrightarrow{e_z}=\overrightarrow{0}$$

ce qui doit être valable pour tout $t$. En posant $k_0=\omega/c$ on en déduit que :

$$\boxed{f"(y)+(k_0^2-k^2)\,f(y)=0}$$

2. L'équation caractéristique s'écrit $r^2+(k_0^2-k^2)=0$, c'est à dire $r^2=k^2-k_0^2$. Trois cas se présentent :
   - $k^2-k_0^2>0$. La solution est :
   $$f(y)=\lambda\exp\left(\sqrt{k^2-k_0^2}\;y\right)+\mu\exp\left(-\sqrt{k^2-k_0^2}\;y\right)$$
   - $k^2-k_0^2=0$. La solution est :
   $$f(y)=\lambda y+\mu$$
   - $k^2-k_0^2<0$. La solution est :
   $$f(y)=\lambda\cos\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,y\right)+\mu\sin\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,y\right)$$

3. Les métaux étant parfaits, il y a annulation de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ en $y=0$ et en $y=a$. Cela conduit donc à $f(0)=f(a)=0$. Étudions ce qui se passe dans les trois cas de la question précédente :
   - $k^2-k_0^2>0$ : $f(0)=\lambda+\mu=0$ et donc :
   $$f(a)=\lambda\left[\exp\left(\sqrt{k^2-k_0^2}\;a\right)-\exp\left(-\sqrt{k^2-k_0^2}\;a\right)\right]=0$$
   ce qui conduit à $\lambda\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{k^2-k_0^2}\;a\right)=0$ et donc $\mu=0$ puisque le sinus hyperbolique ne peut pas s'annuler. On en déduit qu'il n'y a pas d'onde dans ce cas.
   - $k^2-k_0^2=0$ :
   $$f(0)=\mu=0\quad\text{et}\quad f(a)=\lambda a=0\quad\text{donc}\quad\lambda=0$$
   À nouveau aucune onde ne peut se propager dans ce cas.
   - $k^2-k_0^2<0$ : $f(0)=\lambda=0$ et donc :
   $$f(a)=\mu\sin\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,a\right)=0$$
   Si on veut $\mu\neq 0$ il faut imposer :
   $$\sin\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,a\right)=0\implies\sqrt{k_0^2-k^2}\,a=n\pi,\ n\in\mathbb{N}^*$$

   Dans ce cas, en posant $\mu=E_0$ on obtient :
   $$f(y)=E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

4. On a donc :
$$k_0^2-k^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\quad\text{d'où}\quad\boxed{k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

   Pour avoir une onde qui puisse se propager il faut de $k^2>0$ (pour que $k$ soit réel), ce qui impose :
$$\boxed{\omega>c\,\frac{n\pi}{a}}$$

5. La vitesse de phase est :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}}}$$

Pour calculer la vitesse de groupe on commence par exprimer $\omega$ comme une fonction de $k$ :

$$\omega = \sqrt{c^2k^2 + \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2}$$

d'où :

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2k^2 + \left(\dfrac{n\pi c}{a}\right)^2}} = \frac{c^2\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}}{\omega}}$$

On remarque que $v_\varphi \times v_g = c^2$.