

## I. Production du dihydrogène.

- Il s'agit de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction de formation à la température  $T$ , d'une mole d'une espèce à partir des éléments constitutifs de cette espèce, pris dans leur état standard de référence à la température  $T$ .

$\Delta_f H^0(\text{H}_{2(g)}) = 0$  car c'est l'enthalpie standard associée à la réaction :  $\text{H}_{2(g)} = \text{H}_{2(g)}$  qui est nulle.

- On calcule  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r G^0$  en utilisant la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4) - \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = 205,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} > 0$$

la réaction est donc endothermique, et

$$\Delta_r G^0(298 \text{ K}) = \Delta_f G^0(\text{CO}) - \Delta_f G^0(\text{CH}_4) - \Delta_f G^0(\text{H}_2\text{O}) = 141,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On en déduit :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298 \text{ K})}{298} = 214,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$\Delta_r S^0 > 0$  car le désordre augmente dans le sens direct (augmentation du nombre de moles de gaz).

- D'après la loi de modération de Le Châtelier, toute augmentation isotherme de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le *sens indirect*.

Selon la loi de modération de Van't Hoff, toute augmentation isobare de température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens endothermique qui est le *sens direct* ici.

- À 1223 K,  $\Delta_r G^0(1223 \text{ K}) = \Delta_r H^0 - 1223 \Delta_r S^0 = -57 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ . On en déduit :

$$K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(1223 \text{ K})}{R \times 1223}\right) = 2,73 \cdot 10^2$$

On s'attend donc à ce que la réaction soit avancée thermodynamiquement, sans pour autant qu'elle soit totale.

- L'avancement à l'équilibre vaut :  $\xi = n_0 \alpha$ . On peut en déduire le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_{4(g)}$	+	$\text{H}_2\text{O}_{(g)}$	$\rightleftharpoons$	$\text{CO}_{(g)}$	+	$3 \text{H}_{2(g)}$	total gaz
état initial	$n_0$		$n_0$		0		0	$2n_0$
état final	$n_0 - \xi$		$n_0 - \xi$		$\xi$		$3\xi$	$2n_0 + 2\xi$
état final	$n_0(1 - \alpha)$		$n_0(1 - \alpha)$		$\alpha n_0$		$3\alpha n_0$	$2n_0(1 + \alpha)$

On en déduit les fractions molaires, sachant que le nombre total de moles de gaz vaut :  $n_g = 2n_0 + 2\xi = 2n_0(1 + \alpha)$ , et donc :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n_0 - \xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$$

et

$$x(\text{H}_2) = \frac{3\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{3\alpha}{2(1 + \alpha)} \quad \text{et} \quad x(\text{CO}) = \frac{\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}$$

La loi d'action des masses conduit alors à :

$$K^0 = \frac{x(\text{CO}) x^3(\text{H}_2)}{x(\text{CH}_4) x(\text{H}_2\text{O})} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2$$

et donc, avec  $P = 10 P^0$ , il vient :

$$K^0 = 100 \frac{27 \alpha^4}{4(1+\alpha)^2 (1-\alpha)^2} \implies \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \sqrt{\frac{4K^0}{2700}} = 0,636$$

On obtient directement :

$$\boxed{\alpha \approx 0,62}$$

On notera que cette valeur est cohérente avec la remarque faite pour la valeur de  $K^0$ .

6. La pression partielle d'un gaz  $A$  étant :  $P(A) = x(A) P$ , on en déduit :

$$\boxed{P(\text{CH}_4) = P(\text{H}_2\text{O}) = 1,17 \text{ bar} \quad P(\text{CO}) = 1,91 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P(\text{H}_2) = 5,74 \text{ bar}}$$

7. Reprenons l'expression du quotient réactionnel dans l'état d'équilibre ( $E_1$ ) obtenu à la fin de la question 6. En introduisant les nombres de moles de chaque constituant gazeux et en appelant  $n_g$  le nombre total de moles de gaz, nous obtenons (avec  $T = 1223 \text{ K}$ ) :

$$Q_1 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) n(\text{H}_2\text{O}) n_g^2} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2 = K^0(T)$$

puis, juste après l'ajout de  $dn$  moles d'eau (état hors équilibre) :

$$Q_2 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) [n(\text{H}_2\text{O}) + dn] [n_g + dn]^2} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2 < Q_1$$

On en déduit que, dans cet état ( $E_2$ ) :

$$\Delta_r G_2 = RT \ln \left( \frac{Q_2}{K^0(T)} \right) < 0$$

Ainsi, l'équilibre chimique est déplacé en sens direct  $\xrightarrow{1}$ . Ce sens d'évolution est cohérent avec la loi de modération de Le Châtelier puisqu'on consomme l'eau ajoutée.

8. Pour  $T = 1223 \text{ K}$  :

$$\boxed{\Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0(T) + RT \ln \left( \frac{P(\text{CO}_2) P^0}{P(\text{CO})^2} \right) = -2,15 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

et

$$\boxed{\Delta_r G_4 = \Delta_r G_4^0(T) + RT \ln \left( \frac{P(\text{H}_2)^2}{P(\text{CH}_4) P^0} \right) = 9,26 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

9.  $\Delta_r G_3 < 0$  donc l'évolution de [3] se fait dans le sens  $\xrightarrow{1}$  d'après le critère d'évolution : du carbone graphite va donc se déposer. En revanche,  $\Delta_r G_4 > 0$  et l'évolution de [4] se fait dans le sens  $\xleftarrow{2}$  et le carbone graphite va au contraire disparaître. deux cas, la réaction est endothermique.

## II. Ondes de Schumann. Centrale TSI 2011

**I.B.1)**  $R_T = 6400$  km et  $h = 100$  km. Le rayon de la Terre est donc très supérieur à la distance entre les deux parois conductrices, ce qui permet localement d'assimiler les surfaces à deux plans parallèles.

**I.B.2)** Une onde électromagnétique correspond à la propagation simultanée de champs électrique et magnétique.

Dans le cas d'une onde plane, les surfaces où l'onde prend la même valeur à chaque instant  $t$  sont des plans. Dans le cas étudié, cela se traduit par le fait que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne dépendent que de  $x$  et de  $t$ .

Une onde progressive se propage dans le sens des  $x$  croissants.

Une onde monochromatique ne contient qu'une seule fréquence. Elle est de la forme :

$$s(x, t) = S_m \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

**I.B.3)** L'intérieur de la cavité étant supposée vide de charges et de courants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}_n^+ &= 0 & \operatorname{div} \vec{E}_n^+ &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}_n^+ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_n^+}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{E}_n^+ &= -\frac{\partial \vec{B}_n^+}{\partial t} \end{aligned}$$

En utilisant ces équations et le formulaire, on peut écrire :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}_n^+ = -\Delta \vec{B}_n^+ = \operatorname{rot} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_n^+}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_n^+}{\partial t^2}$$

On en déduit par projection sur l'axe  $Oy$  avec

$$\vec{B}_n^+ = B_n^+(x, t) \vec{e}_y : -\frac{\partial^2 B_n^+}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_n^+}{\partial t^2}$$

On obtient alors  $k_n^2 = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2$ .

**I.B.4)** Il faut pour tout  $x$  que  $\vec{B}_n^+(x_+) = \vec{B}_n^+(x_-)$ . Cela suppose donc que la circonférence de la cavité soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde :  $2\pi R_T = n\lambda_n$

$f_1 = 7,46$  Hz ;  $f_2 = 14,9$  Hz ;  $f_3 = 22,4$  Hz ; on trouve des valeurs proches de celles mesurées expérimentalement.

**I.B.5)** L'onde étudiée est une onde plane se propageant dans la direction de l'axe  $Ox$  avec :

$$\vec{B}_n^+ = B_n^+(x, t) \vec{e}_y$$

Le champ électrique est donc de la forme  $\vec{E}_n^+ = E_n^+(x, t) \vec{e}_z$ .

La projection de  $\operatorname{rot} \vec{E}_n^+ = -\frac{\partial \vec{B}_n^+}{\partial t}$  sur l'axe  $Oy$  permet d'écrire :

$$\vec{E}_n^+ = -c B_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_z$$

**I.B.6)** a)  $\vec{B}_n^-(x, t) = B_{0n} \cos(\omega_n t + k_n x) \vec{e}_y$

b) On a alors :

$$\vec{B}_n(x, t) = \vec{B}_n^+(x, t) + \vec{B}_n^-(x, t) = 2B_{0n} \cos(\omega_n t) \cos(k_n x) \vec{e}_y$$

en utilisant la relation de trigonométrie donnée.

De même :

$$\begin{aligned} \vec{E}_n(x, t) &= \vec{E}_n^+(x, t) + \vec{E}_n^-(x, t) \\ &= -cB_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_z + cB_{0n} \cos(\omega_n t + k_n x) \vec{e}_z \\ &= -2cB_{0n} \sin(\omega_n t) \sin(k_n x) \vec{e}_z \end{aligned}$$

en utilisant la relation de trigonométrie donnée.

L'onde résultante est une onde stationnaire de longueur d'onde  $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$  et de période  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$

**I.B.7)** À l'interface entre deux milieux 1 et 2 :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$  et  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ .

L'ionosphère et la Terre sont considérées comme étant parfaitement conductrices. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  y sont donc nuls.

On obtient alors en  $z = 0$  :  $\vec{E}_n = \frac{\sigma_n(z=0)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_n = \mu_0 \vec{j}_{sn}(z=0) \wedge \vec{e}_z$ .

On en déduit  $\vec{j}_{sn}(x, z=0, t) = -\frac{B_n}{\mu_0} \vec{e}_x$

De même en  $z = h$  :  $\vec{E}_n = -\frac{\sigma_n(z=h)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_n = -\mu_0 \vec{j}_{sn}(z=h) \wedge \vec{e}_z$ .

On en déduit  $\vec{j}_{sn}(x, z=h, t) = \frac{B_n}{\mu_0} \vec{e}_x$

## I.C Facteur de qualité de la cavité atmosphérique

**I.C.1)** L'énergie électromagnétique volumique a pour expression

$$u_{em} = \frac{4B_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) \cos^2(k_n x)}{\mu_0}$$

Sa valeur moyenne temporelle vaut donc :  $\langle u_{em} \rangle = \frac{2B_{0n}^2 \cos^2(k_n x)}{\mu_0}$ .

L'énergie de la tranche considérée s'obtient alors par intégration :

$$\langle \mathcal{E}_n \rangle = \iiint_{\text{tranche}} \langle u_{em} \rangle dx dy dz$$

On obtient :

$$\boxed{\langle \mathcal{E}_n \rangle = \frac{B_{0n}^2 b h \lambda_n}{\mu_0}}$$

**I.C.2)** a) La densité volumique de courant  $J_n$  s'exprime en  $A.m^{-2}$  et la densité surfacique de courant  $j_{sn}$  en  $A.m^{-1}$  donc  $\delta_{tn}$  est bien homogène à une longueur.

b)  $p_J = \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma}$

c) L'énergie dissipée dans la Terre est dissipée dans une couche d'épaisseur  $\delta_{tn}$ , la densité volumique de courant étant nulle pour une profondeur supérieure.

La puissance dissipée par effet Joule dans la tranche terrestre considérée s'obtient alors par intégration de  $p_{Jt}$  dans l'espace :

$$\begin{aligned} P_{Jtn} &= \iiint_{\text{tranche}} \frac{4B_{0n}^2}{\mu_0^2 \delta_{tn}^2 \gamma} \cos^2(\omega_n t) \cos^2(k_n x) d\tau \\ &= \frac{4B_{0n}^2}{\mu_0^2 \delta_{tn}^2 \gamma} \cos^2(\omega_n t) \delta_{tn} b \int_0^{\lambda_n} \cos^2(k_n x) dx \\ &= \frac{2B_{0n}^2}{\mu_0^2 \delta_{tn} \gamma} \cos^2(\omega_n t) \lambda_n b \end{aligned}$$

L'énergie dissipée par effet Joule sur une période est l'intégrale sur le temps :

$$W_{Jtn} = \int_0^{T_n} P_{Jtn} dt = \frac{2B_{0n}^2}{\mu_0^2 \delta_{tn} \gamma} b \lambda_n \frac{T_n}{2} = \frac{B_{0n}^2}{\mu_0^2 \delta_{tn} \gamma} \frac{\lambda_n 2\pi b}{\omega_n}$$

On obtient finalement, en utilisant l'expression de la conductivité donnée dans l'énoncé :  $\gamma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2}$  :

$$W_{Jtn} = \frac{B_{0n}^2 \delta_{tn} b \pi \lambda_n}{\mu_0}$$

d) De même :  $W_{Jin} = \frac{B_{0n}^2 \delta_{in} b \pi \lambda_n}{\mu_0}$

e)  $W_{Jn} = W_{Jtn} + W_{Jin}$

**I.C.3)** On obtient alors  $Q_n = \frac{2h}{\delta_{in} + \delta_{tn}}$ . A.N. :  $Q_1 = 10^3$  et  $Q_2 = 1,5 \cdot 10^3$ .

Ces deux facteurs de qualité sont suffisamment élevés pour que l'on puisse considérer les pertes énergétiques dans la Terre et l'ionosphère comme des perturbations et donc utiliser les expressions des champs déterminées dans la partie I.B.

### III. Excitation d'ondes de surface - X PC 1994

#### A. Réponse du métal en présence du champ électromagnétique

1) Équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

- 3) La densité volumique de courants vaut  $\vec{j} = -ne\vec{v}$  donc :

$$m \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{m}{\tau} \vec{j} = ne^2 \vec{E}$$

- 4) On prend la divergence de l'équation précédente en remarquant que  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et que  $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et on obtient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0$$

avec  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ .

En particulier, si la force d'amortissement est négligeable,  $\tau \rightarrow +\infty$  et on obtient une équation d'oscillateur harmonique à la pulsation  $\omega_p$  :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho = 0$$

- 5) Pour Na,  $\omega_p = 9,18 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_p = 9,68 \times 10^{-19} \text{ J} = 6,05 \text{ eV}$ ,  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 205 \text{ nm}$ . Ce rayonnement est dans le proche ultraviolet.

Pour Al,  $\omega_p = 2,40 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_p = 2,53 \times 10^{-18} \text{ J} = 15,8 \text{ eV}$ ,  $\lambda_p = 78,5 \text{ nm}$ . Ce rayonnement est dans l'ultraviolet lointain.

- 6) Partant de l'équation obtenue à la question 3), on obtient en passant dans le domaine complexe :

$$\left(m(-i\omega) + \frac{m}{\tau}\right) \underline{\vec{j}} = ne^2 \underline{\vec{E}}$$

On en déduit immédiatement  $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}}$  avec :

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{-i\omega + 1/\tau}$$

- 7) Partons de l'équation de Maxwell-Ampère dans le domaine complexe et appliquons-lui l'opérateur  $\overrightarrow{\text{rot}}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \underline{\vec{B}} - \Delta \underline{\vec{B}} = -\Delta \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\gamma} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

compte tenu de l'équation de Maxwell-Faraday. Il vient :

$$\Delta \underline{\vec{B}} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Or  $\underline{\vec{B}}$  est nécessairement de la forme  $\underline{\vec{B}}_0 \exp[i(\underline{k}x - \omega t)]$ . Les règles de calcul dans le domaine complexe conduisent donc à :

$$\left(-\underline{k}^2 + \mu_0 \underline{\gamma} i\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \underline{\vec{B}} = \vec{0}$$

Cette équation impose :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma} i \omega$$

relation de dispersion pour l'onde étudiée ici.

8) On utilise encore les règles de calcul dans le domaine complexe :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \iff \left( -\underline{k}^2 + \varepsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = \vec{0}$$

Comme  $\vec{E} \neq \vec{0}$ , cela impose :

$$\varepsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma} i \omega$$

d'après la question précédente. On en déduit que :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i \mu_0 c^2 \underline{\gamma}}{\omega} = 1 - \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0 i \omega}$$

En remplaçant  $\underline{\gamma}$  par son expression, on obtient bien :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}}$$

## B. Étude des plasmons de surface

9) L'équation de d'Alembert vérifiée par  $\vec{E}_1$  dans le vide s'écrit :

$$\Delta \vec{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Or :

$$\Delta \vec{E}_1 = \frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}_1(z)}{dz^2} \exp[i(kx - \omega t)] - k^2 \vec{\mathcal{E}}_1(z) \exp[i(kx - \omega t)]$$

et

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{\mathcal{E}}_1(z) \exp[i(kx - \omega t)]$$

ce qui implique :

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}_1(z)}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{\mathcal{E}}_1(z) = \vec{0}$$

10) On veut une solution exponentielle (et non pas sinusoidale) pour chacune des deux composantes  $\underline{\mathcal{E}}_{1x}$  et  $\underline{\mathcal{E}}_{1z}$  ce qui impose  $(\omega^2/c^2 - k^2) < 0$  et donc :

$$\omega^2 - c^2 k^2 < 0$$

11) La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\vec{\mathcal{E}}_1(z) = \vec{\mathcal{E}}_{-m1+} \exp(\alpha_1 z) + \vec{\mathcal{E}}_{-m1-} \exp(-\alpha_1 z)$$

avec  $\alpha_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ . Cette solution ne diverge pas lorsque  $z \rightarrow +\infty$  si que si  $\vec{\mathcal{E}}_{-m1} = \vec{0}$ .

12) On a :

$$\operatorname{div} \vec{E}_1 = 0 \iff ik \underline{\mathcal{E}}_{1x}(z) + \frac{d\underline{\mathcal{E}}_{1z}(z)}{dz} = 0$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\forall z > 0, ik \underline{\mathcal{E}}_{1x}(z) = \alpha_1 \underline{\mathcal{E}}_{1z}(z)}$$

13) Dans l'espace  $z < 0$ ,  $\vec{E}_2$  vérifie l'équation obtenue à la question 8, avec  $\varepsilon_r(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  réel. En suivant la même démarche on obtient :

$$\frac{d^2 \underline{\mathcal{E}}_2(z)}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{\mathcal{E}}_2(z) = 0$$

Pour avoir une solution exponentielle on veut :

$$\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - k^2 < 0 \iff \boxed{\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 < 0}$$

On remarque que si la condition imposée à la question 10 est vérifiée alors la condition précédente est réalisée automatiquement.

14) On a comme ci-dessus :

$$\underline{\mathcal{E}}_2(z) = \underline{\mathcal{E}}_{m2} \exp(\alpha_2 z)$$

avec  $\alpha_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ .

15) Là encore, la divergence nulle du champ électrique impose :

$$\boxed{\forall z < 0, ik \underline{\mathcal{E}}_{2x}(z) = -\alpha_2 \underline{\mathcal{E}}_{2z}(z)}$$

16) D'après les relations de passage, seule la composante tangentielle  $\underline{E}_x$  est continue à l'interface des deux milieux. En ce qui concerne  $\vec{B}$ , toutes ses composantes sont continues en l'absence de courants de surface  $\vec{j}_S$ .

17) La continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  en  $z = 0$  entraîne :

$$\boxed{\underline{\mathcal{E}}_{1x}(0^+) = \underline{\mathcal{E}}_{2x}(0^-)}$$

On calcule ensuite  $\vec{B}$  à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \left( ik \underline{\mathcal{E}}_z(z) - \frac{d\underline{\mathcal{E}}_x(z)}{dz} \right) \exp[i(kx - \omega t)] \vec{e}_y$$

et donc :

$$\vec{B} = - \left( \frac{k}{\omega} \underline{\mathcal{E}}_z(z) + \frac{i}{\omega} \frac{d\underline{\mathcal{E}}_x(z)}{dz} \right) \exp[i(kx - \omega t)] \vec{e}_y$$

La continuité de  $\vec{B}$  en  $z = 0$  entraîne alors :

$$\frac{k}{\omega} \underline{\mathcal{E}}_{1z}(0^+) + \frac{i}{\omega} \frac{d\underline{\mathcal{E}}_{1x}}{dz}(0^+) = \frac{k}{\omega} \underline{\mathcal{E}}_{2z}(0^-) + \frac{i}{\omega} \frac{d\underline{\mathcal{E}}_{2x}}{dz}(0^-)$$

soit :

$$k \underline{\mathcal{E}}_{1z}(0^+) - i\alpha_1 \underline{\mathcal{E}}_{1x}(0^+) = k \underline{\mathcal{E}}_{2z}(0^-) + i\alpha_2 \underline{\mathcal{E}}_{2x}(0^-)$$

ou encore, compte-tenu des questions 12 et 15 :

$$\left(\frac{ik^2}{\alpha_1} - i\alpha_1\right) \underline{\mathcal{E}}_{1x}(0^+) = \left(\frac{-ik^2}{\alpha_2} + i\alpha_2\right) \underline{\mathcal{E}}_{2x}(0^-)$$

L'équation  $\underline{\mathcal{E}}_{1x}(0^+) = \underline{\mathcal{E}}_{2x}(0^-)$  implique donc :

$$\frac{k^2}{\alpha_1} - \alpha_1 = \frac{-k^2}{\alpha_2} + \alpha_2 \iff \boxed{k^2 = \alpha_1\alpha_2}$$

En élevant cette équation au carré, on obtient :

$$k^4 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}\right)$$

soit, après développement et simplification :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Cette expression n'est acceptable si on a à la fois  $k^2 > 0$  et :

$$\omega^2 - c^2k^2 = \frac{\omega^4}{2\omega^2 - \omega_p^2} < 0$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}}$$

18) La relation de dispersion s'écrit encore

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}}$$

la courbe est tracée sur la figure 1. Elle est comparée à la relation analogue pour une propagation dans le vide.

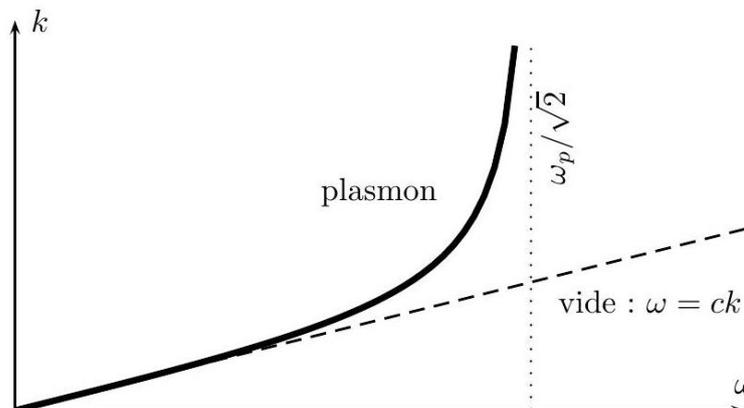


Figure 1 - Relation de dispersion pour un plasmon de surface

La vitesse de phase sera supérieure à  $c$  si et seulement si  $\frac{k^2}{\omega^2} < \frac{1}{c^2}$  soit  $\omega^2 - \omega_p^2 < 2\omega^2 - \omega_p^2$ , ce qui est toujours vrai : la courbe correspondant au plasmon a, sur la figure 1, une pente toujours supérieure à celle correspondant à la propagation dans le vide.

19) On a ici  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$  et  $\lambda_s = \frac{2\pi}{k}$  d'où :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\omega}{ck} = \sqrt{\frac{2\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

La distance demandée concerne une atténuation d'un facteur 10 d'une exponentielle, c'est à dire  $\exp(-\alpha_1 d_1) = 1/10$  et  $\exp(-\alpha_2 d_2) = 1/10$ , ce qui donne :

$$d_1 = \frac{\ln 10}{\alpha_1} = \frac{\ln 10}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_s^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\ln 10}{\alpha_2} = \frac{\ln 10}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_s^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_p^2}}}$$

en posant  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$ .

20) Pour l'aluminium, avec  $\omega = 2,40 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  donc  $\lambda_0 = 785,4 \text{ nm}$ ,  $\lambda_s = 781,4 \text{ nm}$  et  $\lambda_p = 78,5 \text{ nm}$ , on obtient :

$$d_1 = 2,84 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad d_2 = 29 \text{ nm}$$

On remarque donc que ces ondes sont très localisées au voisinage de la surface.