Correction - DS n°6 (CCINP-e3a)

PROBLÈME 1 - Production du dihydrogène.

1. Il s'agit de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction de formation à la température T, d'une mole d'une espèce à partir des éléments constitutifs de cette espèce, pris dans leur état standard de référence à la température T.

   $\Delta_f H^0(H_{2(g)}) = 0$ car c'est l'enthalpie standard associée à la réaction : $H_{2(g)} = H_{2(g)}$ qui est nulle.

2. On calcule $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r G^0$ en utilisant la loi de Hess :

$$\boxed{\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(CO) - \Delta_f H^0(CH_4) - \Delta_f H^0(H_2O) = 205{,}7 \text{ kJ.mol}^{-1}} > 0$$

   la réaction est donc endothermique, et

$$\boxed{\Delta_r G^0(298\,\text{K}) = \Delta_f G^0(CO) - \Delta_f G^0(CH_4) - \Delta_f G^0(H_2O) = 141{,}7 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

   On en déduit :

$$\boxed{\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298\,\text{K})}{298} = 214{,}8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

   $\Delta_r S^0 > 0$ car le désordre augmente dans le sens direct (augmentation du nombre de moles de gaz).

3. D'après la loi de modération de Le Châtelier, toute augmentation isotherme de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le *sens indirect*.

   Selon la loi de modération de Van't Hoff, tout augmentation isobare de température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens endothermique qui est le *sens direct* ici.

4. À 1223 K, $\Delta_r G^0(1223K) = \Delta_r H^0 - 1223\,\Delta_r S^0 = -57$ kJ.mol^{-1}. On en déduit :

$$\boxed{K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(1223\text{K})}{R \times 1223}\right) = 2{,}73.10^2}$$

   On s'attend donc à ce que la réaction soit avancée thermodynamiquement, sans pour autant qu'elle soit totale.

5. L'avancement à l'équilibre vaut : $\xi = n_0\alpha$. On peut en déduire le tableau d'avancement :

	$CH_{4(g)}$ +	$H_2O_{(g)}$ ⇌	$CO_{(g)}$ +	$3\ H_{2(g)}$	total gaz
état initial	n_0	n_0	0	0	$2n_0$
état final	$n_0 - \xi$	$n_0 - \xi$	ξ	3ξ	$2n_0 + 2\xi$
état final	$n_0(1-\alpha)$	$n_0(1-\alpha)$	αn_0	$3\alpha n_0$	$2n_0(1+\alpha)$

   On en déduit les fractions molaires, sachant que le nombre total de moles de gaz vaut : $n_g = 2\,n_0 + 2\xi = 2n_0\,(1+\alpha)$, et donc :

$$x(CH_4) = x(H_2O) = \frac{n_0 - \xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}$$

   et

$$x(H_2) = \frac{3\xi}{n_0 + 2\xi} = \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad x(CO) = \frac{\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}$$

La loi d'action des masses conduit alors à :

$$K^0 = \frac{x(\mathrm{CO})\, x^3(\mathrm{H_2})}{x(\mathrm{CH_4})\, x(\mathrm{H_2O})} \left(\frac{P}{P^0}\right)^2$$

et donc, avec $P = 10\, P^0$, il vient :

$$K^0 = 100\, \frac{27\, \alpha^4}{4(1+\alpha)^2\, (1-\alpha)^2} \implies \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \sqrt{\frac{4K^0}{2700}} = 0{,}636$$

On obtient directement :

$$\boxed{\alpha \approx 0{,}62}$$

On notera que cette valeur est cohérente avec la remarque faite pour la valeur de K^0.

6. La pression partielle d'un gaz A étant : $P(A) = x(A)\, P$, on en déduit :

$$\boxed{P(\mathrm{CH_4}) = P(\mathrm{H_2O}) = 1{,}17 \text{ bar} \quad P(\mathrm{CO}) = 1{,}91 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P(\mathrm{H_2}) = 5{,}74 \text{ bar}}$$

7. Reprenons l'expression du quotient réactionnel dans l'état d'équilibre ($\mathrm{E_1}$) obtenu à la fin de la question 6. En introduisant les nombres de moles de chaque constituant gazeux et en appelant n_g le nombre total de moles de gaz, nous obtenons (avec $T = 1223$ K) :

$$Q_1 = \frac{n(\mathrm{CO})\, n(\mathrm{H_2})^3}{n(\mathrm{CH_4})\, n(\mathrm{H_2O})\, n_g^2} \left(\frac{P}{P^0}\right)^2 = K^0(T)$$

puis, juste après l'ajout de dn moles d'eau (état hors équilibre) :

$$Q_2 = \frac{n(\mathrm{CO})\, n(\mathrm{H_2})^3}{n(\mathrm{CH_4})\, [\, n(\mathrm{H_2O}) + \mathrm{d}n\,]\, [\, n_g + \mathrm{d}n\,]^2} \left(\frac{P}{P^0}\right)^2 < Q_1$$

On en déduit que, dans cet état ($\mathrm{E_2}$) :

$$\Delta_r G_2 = RT \ln\left(\frac{Q_2}{K^0(T)}\right) < 0$$

Ainsi, l'équilibre chimique est déplacé en sens direct $\xrightarrow{1}$. Ce sens d'évolution est cohérent avec la oi de modération de Le Châtelier puisqu'on consomme l'eau ajoutée.

8. Pour $T = 1223\ K$:

$$\boxed{\Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0(T) + RT \ln\left(\frac{P(\mathrm{CO_2}) P^0}{P(\mathrm{CO})^2}\right) = -2{,}15 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

et

$$\boxed{\Delta_r G_4 = \Delta_r G_4^0(T) + RT \ln\left(\frac{P(\mathrm{H_2})^2}{P(\mathrm{CH_4}) P^0}\right) = 9{,}26 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

9. $\Delta_r G_3 < 0$ donc l'évolution de [3] se fait dans le sens $\xrightarrow{1}$ d'après le critère d'évolution $\Delta_r G d\xi < 0$: du carbone graphite va donc se déposer. En revanche, $\Delta_r G_4 > 0$ et l'évolution de [4] se fait dans le sens $\underset{2}{\leftarrow}$ et le carbone graphite va au contraire disparaître.

PROBLÈME 2 - Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière (d'après e3a-MP-2024).

I Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

Q1. Dans un milieu sans charges ni courants, la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant $\vec{j}$ sont nulles. Ainsi, les équations de Maxwell sont :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \quad \text{Maxwell-Gauss} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-flux} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

Q2. On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$$

Ensuite, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss ainsi :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

À partir de l'équation de d'Alembert

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

on identifie la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$$

Q3. On considère la forme complexe du champ électrique correspondant à une onde progressive monochromatique se propageant dans la direction $+\vec{e_z}$:

$$\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = \underline{\vec{E_0}}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = 0$$

comme $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t)$ ne dépend que de la coordonnée z :

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -\mathrm{j}k\underline{E}_{0z}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$$

Ainsi, on a forcément $\underline{E}_{0z} = 0$: la composante longitudinale du champ électrique est nulle, autrement dit **le champ électrique est transverse.**
On réalise le même raisonnement sur le champ magnétique en considérant l'équation de Maxwell-flux et $\underline{\vec{B}}(\mathrm{M},t) = \underline{\vec{B_0}}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$: on obtient que **le champ magnétique est également transverse.**

Q4. Le champ électrique est polarisé rectilignement suivant $\overrightarrow{e_x}$: $\overrightarrow{\underline{E_0}} = \underline{E_0}\overrightarrow{e_x}$. Donc :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(\mathrm{M},t) = \underline{E_0}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]\overrightarrow{e_x}$$

avec $\underline{E_0} = E_0 e^{\mathrm{j}\varphi}$:

$$\overrightarrow{\underline{E}}(\mathrm{M},t) = E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right]\overrightarrow{e_x}$$

D'où, comme $\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t) = \Re\left(\overrightarrow{\underline{E}}(\mathrm{M},t)\right)$:

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t) = E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}}$$

Q5. On utilise l'équation de d'Alembert. On évalue d'une part :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\overrightarrow{e_x}$$

car $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de z et n'a de composante que selon $\overrightarrow{e_x}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = -k^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}$$

Ainsi :

$$-k^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Q6. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\overrightarrow{e_y} = kE_0\sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = -kE_0\sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}$$

Soit :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t) = \frac{k}{\omega}E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{B_c}$$

Le champ magnétique étant de moyenne nulle ; et comme $\omega/k = c$:

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t) = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}}$$

Q7. On a :

$$\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t) = \frac{\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)\wedge\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)}{\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_z}}$$

Q8. On a

$$w(\mathrm{M},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)^2 + \frac{\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)^2}{2\mu_0}$$

Avec ce que l'on a montré :

$$w(\mathrm{M},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right) + \frac{1}{2\mu_0 c^2}E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)$$

Comme $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$:

$$\boxed{w(\mathrm{M},t) = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)}$$

Q9. Comme $\left\langle\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\rangle_T = 1/2$:

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t)\right\rangle_T = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_z} = c\frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\overrightarrow{e_z} = c\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\overrightarrow{e_z}$$

De même :

$$\langle w(\mathrm{M},t)\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$\boxed{\left\langle\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t)\right\rangle_T = c\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\overrightarrow{e_z} = c\,\langle w(\mathrm{M},t)\rangle\,\overrightarrow{e_z}}$$

III Pression de radiation

Q21. Le champ électromagnétique correspondant à l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, et se propage dans le sens des z décroissants : $\overrightarrow{E_r} = E_r \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}$. Ainsi :

$$\vec{E}\left(z=0^-\right) = \vec{E_i}\left(z=0^-\right) + \vec{E_r}\left(z=0^-\right) = E_0 \cos(\omega t+\varphi)\,\overrightarrow{e_x} + E_r \cos(\omega t+\varphi)\,\overrightarrow{e_x} = (E_0+E_r)\cos(\omega t+\varphi)\,\overrightarrow{e_x}$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{E}\left(z=0^+\right) = 0$. Ainsi :

$$\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\vec{E}\left(z=0^+\right) - \vec{E}\left(z=0^-\right)\right) = -\left(E_0+E_r\right)\cos(\omega t+\varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

On utilise la relation de passage $\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\vec{E}\left(z=0^+\right) - \vec{E}\left(z=0^-\right)\right) = \vec{0}$. Comme la relation est vraie quelque soit t :

$$E_r = -E_0$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{E_r} = -E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}}$$

Q22. On procède comme à la question **Q6** en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E_r} = \frac{\partial E_{rx}}{\partial z}\overrightarrow{e_y} = kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \overrightarrow{B_r}}{\partial t} = -kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

Le champ magnétique réfléchi étant de moyenne nulle également ; et on utilise $\omega/k = c$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_r} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}}$$

Q23. Par ailleurs :

$$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi)\,\vec{e_y}$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(z=0^-) = \vec{B_i}(z=0^-) + \vec{B_r}(z=0^-) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_y}}$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{B}(z=0^+) = 0$. On utilise la relation de passage :

$$\mu_0\vec{j_s} = \vec{e_z} \wedge \left(\vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-)\right) = \vec{e_z} \wedge \left(-\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_y}\right) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_x}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{j_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_x}}$$

Q24. La force de Laplace par unité de surface est d'après l'énoncé :

$$\vec{f_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_x} \wedge \left(\frac{E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_y}\right) = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t + \varphi)\,\vec{e_z}$$

La force de Laplace sur une surface S est $\vec{f_s}S$; et comme $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$:

$$\boxed{\vec{F_L} = 2\varepsilon_0 S E_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\,\vec{e_z}}$$

Q25. La moyenne sur une périod de cette force est, comme $\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi)\right\rangle_T = 1/2$: :

$$\boxed{\left\langle \vec{F_L}\right\rangle_T = \varepsilon_0 S E_0^2\,\vec{e_z}}$$

La pression de radiation est :

$$p = \frac{\left\langle \vec{F_L}\right\rangle_T \cdot \vec{e_z}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p = \varepsilon_0 E_0^2}$$

Q26. D'après la **Q9**, on a $c\varepsilon_0 E_0^2/2 = I$ ainsi :

$$\boxed{p = \frac{2I}{c}}$$

Application numérique :
— pour $I_1 = 1\ \mathrm{kW\cdot m^{-2}}$: $p = 6{,}7 \times 10^{-6}\ \mathrm{Pa}$;
— pour $I_1 = 1\ \mathrm{GW\cdot m^{-2}}$: $p = 6{,}7\ \mathrm{Pa}$.

Q27. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, les photons contenus à t dans le cyclindre de surface S et de longueur $c\mathrm{d}t$ vont frapper la surface S. Ils sont au nombre de $n_\gamma^* Sc\mathrm{d}t$, leur énergie est :

$$n_\gamma^* Sc\mathrm{d}t \times E_\gamma$$

Cette énergie est également $IS\mathrm{d}t$ donc :

$$n_\gamma^* Sc\mathrm{d}t E_\gamma = IS\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{n_\gamma^* = \frac{I}{cE_\gamma}}$$

Application numérique : $n_\gamma^* = 1{,}0 \times 10^{19}\ \mathrm{photons\cdot m^{-3}}$.

Q28. La quantité de mouvement d'un photon est :

$$\vec{p_\gamma} = \hbar\vec{k} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e_z} = \frac{h}{\lambda}\vec{e_z}$$

Comme $E_\gamma = hc/\lambda$, on a :

$$\boxed{\vec{p_\gamma} = \frac{E_\gamma}{c}\vec{e_z}}$$

Q29. Lorsqu'il rebondit, sa quantité de mouvement passe de $\vec{p_\gamma}$ à $-\vec{p_\gamma}$, la variation de quantité de mouvement du photon est :

$$\boxed{\Delta\vec{p_\gamma} = -\frac{2E_\gamma}{c}\vec{e_z}}$$

Q30. L'ensemble des photons contenus dans le cylindre de surface S et de largeur $c\mathrm{d}t$ rebondissent, la variation de quantité de mouvement totale est :

$$\Delta\overrightarrow{p_{\mathrm{d}t}} = -n_\gamma^* S c\mathrm{d}t \frac{2E_\gamma}{c}\overrightarrow{e_z} \qquad \text{soit, d'après } \textbf{Q27} \qquad \boxed{\Delta\overrightarrow{p_{\mathrm{d}t}} = -\frac{2I}{c}S\mathrm{d}t\overrightarrow{e_z}}$$

Q31. La force exercée par les photons sur la plaque est l'opposée de la force exercée par la plaque sur les photons, cette dernière étant $\Delta\overrightarrow{p_{\mathrm{d}t}}/\mathrm{d}t$ d'après le principe fondamental de la dynamique. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{2I}{c}S\overrightarrow{e_z}}$$

On retrouve, en identifiant p à partir de $\overrightarrow{F} = pS\overrightarrow{e_z}$:

$$\boxed{p = \frac{2I}{c}}$$

IV Notion de force pondéromotrice

Q32. La force subie par l'électron est de norme $\left\|\overrightarrow{F_e}\right\| = eE_0$. Son poids est de norme $m_e g$. Pour négliger le poids de l'électron, il faut que :

$$\boxed{E_0 \gg \frac{m_e g}{e} = 5{,}6 \times 10^{-11}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}}$$

Q33. On a :

$$\left\langle\overrightarrow{F}\right\rangle_T = \langle -eE_m(x)\cos(\omega t)\rangle_T\,\overrightarrow{e_x} = -eE_m(x)\,\langle\cos(\omega t)\rangle_T\,\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$$

La force est bien de moyenne nulle.

Q34. On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel du laboratoire galiléen. Le poids est négligeable, la seule force s'exerçant sur l'électron est $\overrightarrow{F} = -eE_m(x)\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$. D'après le PFD appliqué à l'électron :

$$m_e\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -eE_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$$

On note $v = \dot{x}$ la composante x de la vitesse. On projette le PFD sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m_e\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -eE_0\cos(\omega t)$$

En RSF, on considère $\underline{v}(t) = V_m\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t + \varphi\right)\right] = \underline{V}_m\exp\left(\mathrm{j}\omega t\right)$. Ainsi :

$$\mathrm{j}\omega m_e\underline{V}_m = -eE_0 \qquad \text{donc} \qquad \underline{V}_m = -\frac{eE_0}{\mathrm{j}\omega m_e} = \mathrm{j}\frac{eE_0}{m_e\omega}$$

L'amplitude de $v(t)$ est $|\underline{V}_m|$ et la phase est $\arg\left(\underline{V}_m\right)$:

$$\boxed{V_m = \frac{eE_0}{m_e\omega}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\varphi_v = \frac{\pi}{2}}$$

Q35. $\underline{V}_m = \mathrm{j}\omega\underline{X}_m$ donc :

$$\underline{X}_m = \frac{eE_0}{m_e\omega^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{X_m = |\underline{X}_m| = \frac{eE_0}{m_e\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\varphi_x = 0}$$

La position de l'électron et le champ électrique sont en phase.

Q36. Le champ électrique s'exprime en $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ dans les unités du système international, x en mètres donc α **s'exprime en** $\mathrm{V\cdot m^{-2}}$ **dans les unités S.I.**
Ensuite :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\left(E_0 + \alpha x\right)^2\right) = 2\alpha\left(E_0 + \alpha x\right)\overrightarrow{e_x}$$

Le gradient est dans la direction $\overrightarrow{e_x}$ (il indique la zone de champ électrique fort). Dans la limite où $|\alpha x| \ll E_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right) = 2\alpha E_0\overrightarrow{e_x}}$$

Q37. À gauche, la situation où $x = X_m$: le champ électrique ressenti est vers la droite (car en phase avec la position), donc la force vers la gauche. À droite, la situation où $x = -X_m$: la force vers la droite par le même argument, d'amplitude moindre car $\left\|\vec{E}\left(X_m\right)\right\| > \left\|\vec{E}\left(-X_m\right)\right\|$.

La somme de ces deux forces est vers la gauche : la force moyenne est donc non nulle est orientée dans la direction $-\vec{e_x}$.

Q38. On exprime la force ressentie par l'électron :

$$\vec{F} = -eE_m(x)\vec{e_x} = -e\left(E_0\cos\left(\omega t\right) + \alpha\frac{eE_0}{m_e\omega^2}\cos^2\left(\omega t\right)\right)\vec{e_x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left\langle\vec{F}\right\rangle_T = -\alpha\frac{e^2E_0}{2m_e\omega^2}\vec{e_x}}$$

Q39. On substitue $\alpha E_0\vec{e_x}$ par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right)/2$ dans l'expression ci-dessus (d'après **Q36**). On a bien :

$$\boxed{\vec{f_p} = -\frac{e^2}{4m_e\omega^2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right)/2}$$

Q40. Le travail de la force motrice est, d'après le TEC, en négligeant toute autre force :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{f_p}\right) = \Delta E_c$$

avec $\Delta E_c = 2$ GeV et $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{f_p}\right) = f_pD$ ($D = 2$ cm). Ainsi :

$$\boxed{f_p = \frac{\Delta E_c}{D} = 1{,}6\times10^{-8}\ \mathrm{N}}$$

Q41. L'intensité est le rapport de la puissance du faisceau sur sa surface :

$$I = \frac{4P}{\pi d^2}$$

où $d = 0{,}1$ mm est le diamètre du faisceau. Or $I = \varepsilon_0cE_0^2/2$ donc :

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{8P}{\pi d^2\varepsilon_0c}} = 9{,}8\times10^{12}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{2m_e\omega^2f_p}{e^2E_0}} = 1{,}7\times10^{8}\ \mathrm{V\cdot m^{-2}}}$$

PROBLÈME 3 - Communication avec un satellite relais (d'après CCS-MP-2022).

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

MG $\quad \text{div}(\vec{E}) = 0$ car $\rho = 0$

MT $\quad \text{div}(\vec{B}) = 0$

MA $\quad \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car $\vec{j} = \vec{0}$

MF $\quad \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

or $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$\vec{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\,\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(M,t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

$\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{u_y}$

donc $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{\vec{E}}$

de plus, $\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$

L'équation d'onde devient alors $k^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 \underline{\vec{E}}$

soit $k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2$ d'où $k = \pm\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega$

Ici a priori, $k > 0$ car on s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x croissants

donc $\boxed{k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega \text{ est la relation de dispersion attendue.}}$

$1/c$

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ associé au champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t)$.

On a vu que $\vec{E}$ qui est une Onde Plane Progressive Harmonique, on peut donc utiliser la relation de structure

$\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \dfrac{k}{\omega}\, \vec{u_x} \wedge E_0 e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{u_y}$

$\boxed{\underline{\vec{B}} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\, E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{u_z}}$

$1/c$

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Dans le vide, $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$ d'après la question précédente.

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q

$$\frac{\|\vec{f}_{mag}\|}{\|\vec{f}_{elec}\|} = \frac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \# \frac{\cancel{q}\,\|\vec{v}\|\times\|\vec{B}\|}{\cancel{q}\,\|\vec{E}\|} \# \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1 \text{ car } \|\vec{v}\| \ll c$$

ordre de grandeur

(particules non relativistes)

Donc $\boxed{\|\vec{f}_{mag}\| \ll \|\vec{f}_{elec}\|}$

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\underline{\vec{v}}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\vec{v}_c\|$ par rapport à $\|\vec{v}_e\|$?

système {électron}
référentiel géocentrique galiléen
2ème loi de Newton

$$m_e\vec{a} = \sum \vec{f}_{ext} = \vec{f}_{elec} = -e\vec{E}$$

donc $m_e \frac{\partial \underline{\vec{v}_e}}{\partial t} = -e\underline{\vec{E}}$

or, en régime sinusoïdal forcé : $\frac{\partial \underline{\vec{v}_e}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{v}_e}$

D'où $m_e i\omega \underline{\vec{v}_e} = -e\underline{\vec{E}}$

$$\boxed{\underline{\vec{v}_e} = \frac{-e}{m_e i\omega}\underline{\vec{E}}}$$

Pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c, la même démarche donne $\boxed{\underline{\vec{v}_c} = \frac{+e}{m_c i\omega}\underline{\vec{E}}}$

$m_c \gg m_e$ donne $\boxed{\|\underline{\vec{v}_c}\| \ll \|\underline{\vec{v}_e}\|}$

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\underline{\vec{j}}(M,t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i\frac{n_e e^2}{m_e\omega}.$$

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{cations} = \rho_e\vec{v_e} + \rho_{ions}\vec{v}_{ions}$$

$= n_e$

$$= -n_e e\vec{v_e} + n_c e\vec{v_c}$$

$$= -n_e e(\vec{v_e} - \vec{v_c}) \simeq -n_e e\vec{v_e} \text{ car } \|\vec{v_c}\| \ll \|\vec{v_e}\|$$

D'où $\boxed{\underline{\vec{j}} = \dfrac{+n_e e^2}{m_e i\omega}\underline{\vec{E}} = \underbrace{-i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}}_{\underline{\gamma}}\underline{\vec{E}}}$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

$$\langle p_v \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}\cdot\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underbrace{\|\underline{\vec{E}}\|^2}_{\in\mathbb{R}} * \underline{\gamma}\right) = 0$$

imaginaire pur

$\langle p_v \rangle = 0$

Aucune puissance n'est dissipée dans le plasma.

Cela est dû au fait que les charges vibrent en quadrature par rapport au champ électrique (comme dans une inductance ou une capacité).

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le plasma.

plasma neutre.

MG : $\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

MT : $\mathrm{div}(\underline{\vec{B}}) = 0$

MF : $\vec{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{E}}) = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$

MA : $\vec{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{B}}) = \mu_0\underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}$(MF) : $\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}\right) = \vec{\mathrm{grad}}\left(\cancel{\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}}\right) - \Delta\underline{\vec{E}}$ (0)

$\vec{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = -\mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

D'où $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}}$

Q 24. En déduire l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c, e, ε_0, m_e et n_e.

$$\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\,\vec{u_y}$$

d'où $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -\underline{k}^2\underline{\vec{E}}$

$\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}}$ et $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$

L'équation d'onde en RSF devient alors

$$-\underline{k}^2 \cancel{\vec{\underline{E}}} = \mu_0 \underline{\gamma}\, i\omega \cancel{\vec{\underline{E}}} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \cancel{\vec{\underline{E}}}$$

$\underline{\gamma} = -i \dfrac{n_e e^2}{m_e \omega}$

Donc $-\underline{k}^2 = \mu_0 \dfrac{n_e e^2}{m_e} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$

soit $\underline{k}^2 = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \left(\omega^2 - \underbrace{\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}_{\stackrel{\text{déf}}{=} \omega_p^2}\right)$ donc $\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec } \omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$

Q 25. Expliciter l'expression de $\underline{k}$ et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω, ω_p et c.

ici $\omega < \omega_p$ donc $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k} = \pm i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$

donc $\vec{\underline{E}} = E_0 e^{i\left(\omega t \mp i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x\right)} \vec{u_y}$

$= E_0 e^{\pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{i\omega t} \vec{u_y}$

$\underline{k} = +i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}$ mène donc à un champ $\underline{E}$ qui diverge lorsque $x \to \infty$, ce qui est une solution non physiq^t acceptable.

⇝ on garde donc $\boxed{\underline{k} = -i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$

(NB le signe de $\mathrm{Im}(\underline{k})$ était de plus imposé par l'énoncé : la justificat° n'était donc pas nécessaire)

On déduit $\boxed{\vec{E} = \mathrm{Re}(\vec{\underline{E}}) = E_0 e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \cos(\omega t)\, \vec{u_y}}$

$e^{-x/\delta}$ avec $\boxed{\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}$

(NB) onde stationnaire spatialement amortie ⇒ "onde évanescente"

$\vec{\underline{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k} x)} \vec{u_y}$ étant une pseudo OPPM ($\underline{k} \in \mathbb{C}$), on peut utiliser la relation de structure dans $\mathbb{C}$:

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\underline{k} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} = \frac{-i/\delta\, \vec{u_x} \wedge E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u_y}}{\omega}$$

$$\vec{\underline{B}} = \underbrace{-\frac{i}{\omega\delta}}_{e^{-i\pi/2}} E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u_z} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} \vec{u_z}$$

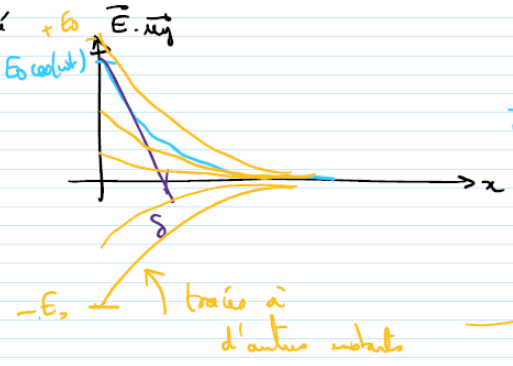
d'où $\vec{B} = \mathrm{Re}(\vec{\underline{B}}) = \dfrac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \pi/2)\, \vec{u_z}$

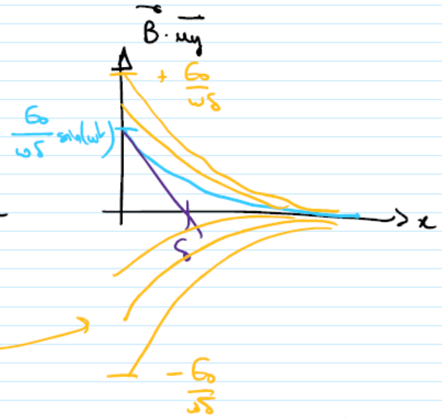
$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} \sin(\omega t)\, \vec{u_z}}$$

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\, e^{-x/\delta}\, \vec{u_y}$$

A t fixé





En un point donné, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent sinusoïdalement, en quadrature.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue.

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t}\,\vec{u_y} \wedge \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - \pi/2)}\,\vec{u_z}}{\mu_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underbrace{\frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta} e^{-2x/\delta} \underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}\, \vec{u_x}}_{\text{imaginaire pur}}\right) = \boxed{0 = \langle\vec{\Pi}\rangle}$$

Pas de déplacement de puissance dans le milieu (on retrouve le caractère stationnaire de l'onde évanescente).

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de $\underline{k}$. En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} > 0 \longrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$$

On s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x ↗ alors on garde $k>0$ (car $v_\varphi = \frac{\omega}{k} > 0$)

d'où $\boxed{k = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}}$

Donc $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}x\right)}\, \vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_y}}$$

OPPH $\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega c} \vec{u_x} \wedge E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega c} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_z}.}$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\mu_0 \omega c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_x}$$

d'où $\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 \omega c} \sqrt{\omega^2-\omega_p^2}\, \vec{u_x}}$

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p, ω et c. Tracer v_g et v_φ en fonction de ω. Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

$\boxed{v_\varphi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}}$ dépend de ω $\rightarrow$ $\boxed{\text{milieu dispersif.}}$

$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ or $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$ donc $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$

$\downarrow$ differentions.

$$\cancel{2} k\, dk\, c^2 = \cancel{2}\omega\, d\omega$$

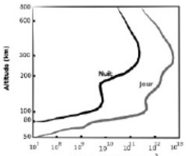
d'où $\dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{k}{\omega} c^2 = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$

$$\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega}}$$

on a donc $\boxed{v_g v_\varphi = c^2 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} v_\varphi > c \\ v_g < c \end{array}}$

v_φ étant la vitesse d'une OPPH, et celle-ci n'ayant pas de réalité physique (extensions temporelle et spatiale ∞), il n'est pas gênant d'avoir $v_\varphi > c$.
La vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse d'un paquet d'onde, est bien inférieure à c.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?



- L'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km (extrait article "Le Monde"). (et résultat classique d'examen)

- or n_e dépend de l'altitude donc ω_p dépend de l'altitude.

Pour communiquer avec le satellite, il faut traverser la ionosphère $\forall$ altitude $h \leqslant 36000$ km

donc il faut que la pulsation ω de l'onde vérifie

$$\omega > \omega_p(h) \quad \forall h \leqslant 36000 \text{ km}.$$

soit
$$\boxed{\omega > \omega_p^{max} = \sqrt{\frac{n_e^{max} e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$$

avec $n_{e,max} \simeq 0{,}8 \cdot 10^{13}$ m^{-3} (300 km le jour sur figure 6)

AN
$$\boxed{\omega > 0{,}2 \cdot 10^9 \text{ rad/s} \quad \text{soit } f > 0{,}03 \text{ GHz}.}$$

cohérent (radio AM $\simeq$ 100 kHz ne traverse pas ionosphère, FM $\simeq$ 100 MHz traverse)