

Corrigé UPS proposé par B. Hallé (Lycée Châtelet, Douai) et S. Laurette (Lycée Wallon, Valenciennes)  
Librement distribuable aux élèves.

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$  qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad}(T)$$

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur  $dx$  de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \quad (I.1)$$



écrire  $\Sigma$  de puissance d'ailette entre  $x$  et  $x+dx$

1<sup>er</sup> principe sur  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t+dt$ , en régime permanent:

$$d(\Sigma) = \Sigma_{\text{ent}} + \Sigma_{\text{ext}} = \Sigma_Q(x) - \Sigma_Q(x+dx) - \Sigma_{\text{conv}} dt$$

*0 en régime permanent*      *0 car transformation isotherme*

$$d'au \quad \Phi_{\text{in}}(x) dt - \Phi_{\text{in}}(x+dx) dt - \Phi_{\text{ext}} dt = 0$$

$$j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt - h(T(x)-T_a) S dt = 0$$

$$d'au \quad -\frac{dj_Q}{dx} dx \pi a^2 - 2T_a \frac{dx}{dx} h(T(x)-T_a) = 0 \quad \text{(surface latérale de } \Sigma)$$

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} a - 2h(T(x)-T_a) = 0$$

$$\frac{dT}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a$$

$\frac{1}{\delta^2}$

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre  $\delta$  introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon  $a = 1$  mm.

d'une part, on déduit de  $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

que  $\left[ \frac{d^2 T}{dx^2} \right] = \left[ \frac{T}{\delta^2} \right]$

*dimension*      "

$$\frac{\text{K}}{\text{m}^2} = \frac{\text{K}}{[\delta]^2} \quad \text{d'au} \quad [\delta] = L$$

d'autre part,  $[\delta] = \sqrt{\frac{[Da]}{[2h]}}$

$$a \quad [a] = \frac{[j_Q]}{[c_{\text{grad}} T]} = \frac{[j_Q]}{\text{K} \cdot \text{L}^{-1}}$$

$$[h] = \frac{[j_Q]}{[T]} \quad \text{car} \quad j_{Q,\text{lat}} = h(T(x)-T_a)$$

donc  $\frac{[a]}{[h]} = L$  d'au  $\frac{[Da]}{[2h]} = L^2$  et d'au

$$[\delta] = L$$

AN  $\delta = 2 \text{ cm}$

pour  $h = "h_n"$  (air naturel) en présence de ventilateurs *cohérent*

**NB**  $\delta = 1,6 \text{ cm}$  avec  $225$

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température  $T(x)$  en  $x = 0$  et en  $x = b$ .

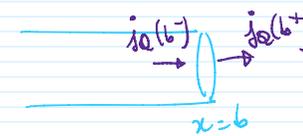
en  $x = 0$ , le contact parfait impose  $T(x=0) = T_a$

en  $x = b$ , l'énoncé est moins explicite sur la modélisation retenue.

• de plus, au regard de "Figure 2" plus bas,  $T(x=b)$  ne semble pas être imposée à  $T_a$  (car on voit que  $T(x=b)$  dépend de  $b/\delta$ ).

→ pas de "contact parfait" entre l'ailette et l'air en  $x = b$

→ utilisons alors la continuité du flux thermique:



*dans le matériau / dans l'air à*  
 $\Rightarrow$  loi de Fourier /  $\downarrow$  l'interface  
 $j_Q(b^-) = j_Q(b^+) \Rightarrow$  loi de Newton

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} = h(T(x=b)-T_a)$$

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de  $T(x)$  dans le cas où  $b \gg \delta$ . Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

$\delta =$  "distance caractéristique d'atténuation de la température"

$\ast \quad b \gg \delta$  alors  $T(x)$  ne varie quasiment plus au voisinage de  $x = b$

d'au  $j_Q(x=b^-) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} \rightarrow 0$

d'au  $h(T(x=b)-T_a) \rightarrow 0$

d'où  $T(x=b) = T_a$  si  $b \gg \delta$

Répondre donc le problème.

$$\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(0) = T_d \\ T(b) = T_a \end{cases}$$

Equation homogène associée

$$\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = 0$$

Equation caractéristique  $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$

soit  $r = \pm \frac{1}{\delta}$

donc  $T_{hom} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

solution particulière recherchée sous forme de cette (car 2<sup>nd</sup> membre est)  $\frac{dT_{part}}{dx^2} - \frac{T_{part}}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

donc  $T_{part} = T_a$

donc  $T = T_{hom} + T_{part} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} + T_a$

condition limite

$$\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_d \\ T(x=b) = A e^{-b/\delta} + B e^{b/\delta} + T_a \approx B e^{b/\delta} + T_a = T_a \end{cases} \quad \begin{matrix} [*] \\ [**] \end{matrix}$$

$b/\delta \gg 1$

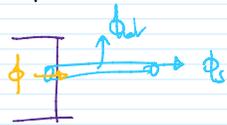
d'où  $[**]$  donne  $B=0$  et  $[*]$  :  $A = T_d - T_a$

d'où :  $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

d'où  $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} = e^{-x/\delta}$  ; qui semble cohérent avec le tracé de la figure 2 pour  $b/\delta = 10$ .

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport  $b/\delta$ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de  $R_{th}$  commune aux différents matériaux lorsque  $b \ll \delta$  ; justifier sa valeur numérique.

si  $b \ll \delta$ , on voit d'après la figure 2 (pour  $b/\delta = 0,1$ ) que  $T$  est uniforme dans la barre. Autrement dit le transfert thermique latéral est négligeable devant le transfert thermique à l'extrémité de l'ailette



(car  $\delta$  est la distance caractéristique d'atténuation de  $T$ , due au flux latéral in:  $b \ll \delta$  : le flux latéral impacte peu le champ de  $T$ )

d'où  $\phi = \phi_{lat} + \phi_e = \phi_e = h S (T(x=b) - T_a) = h S (T_d - T_a)$

d'où  $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h S}$

d'où  $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h S}$

$T(x)$  uniforme si  $b \ll \delta$   
si le me dépend peu de la nature du métal / semi-conducteur (Si) ; ce que semblent suggérer les données à la fin de l'exercice, alors on a bien  $R_{th}$  indépendant du matériau lorsque  $b \ll \delta$

AN avec substitutions ( $h = \frac{1}{R_{th}}$ )

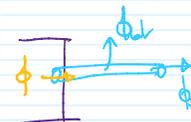
$$R_{th} = \frac{1}{h_r \pi a^2} = 1 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

on retrouve la valeur du graphique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette en silicium dans le cas où  $b \gg \delta$ .

si  $b \gg \delta$ , on a  $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

à  $\phi = \phi(x=0) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_d - T_a) S$



d'où  $R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S} = 0,03 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

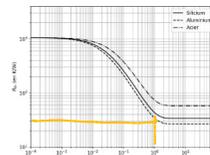
$\uparrow$  cohérent avec figure 3 quand  $b \gg \delta$   
 $= 3,4 \cdot 10^1 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  avec 2CS.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à  $b = 2$  cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon  $a = 1$  mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède pas 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Pour l'Aluminium, on trouve  $\delta = 2$  cm

et donc  $\frac{b}{\delta} = 1$

La figure 3 nous indique alors que



$R_{th} \approx 3,4 \text{ K/W} = \frac{T_d - T_a}{\phi}$

où  $\phi$  est la puissance évacuée par 1 ailette.

En, avec  $N$  ailettes et une puissance totale à évacuer

$\phi_{tot} = 200 \text{ W}$  ; on a  $\phi_{tot} = N \phi = N \frac{T_d - T_a}{R_{th}}$

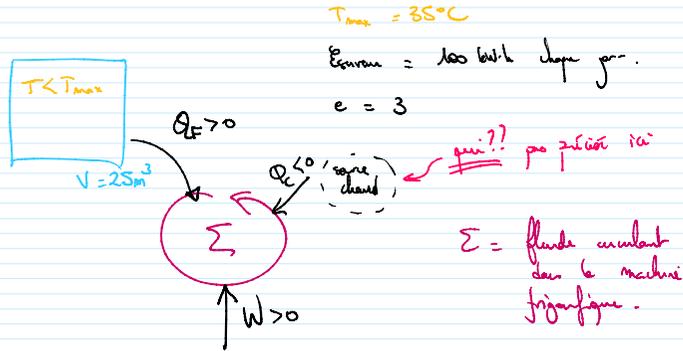
S:  $T_d < 60^\circ\text{C}$ , et en supposant  $T_a = 20^\circ\text{C}$

on a  $N = \frac{P_{\text{ext}} R_{\text{th}}}{T_d - T_a} > \frac{200 \times 30}{40} = 150$

150 ailettes paraissent nécessaires, ce qui semble être -  
 Mais leur rayon est de 1mm, c'est  
 mesurable -

*NB je suis obligé  
 de mettre 30S  
 ici alors que depuis  
 le début, on a 1mm  
 je travaillais avec  
 1CS.  
 On pouvait travailler  
 avec 20S depuis le  
 début aussi, ce qui  
 serait un meilleur  
 compromis ...*

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.



La puissance constante donc ici la source froide de la machine frigorifique représentée ci-dessus.

Par définition  $e = \frac{Q_F}{W}$

Sur une année  $W^{an} = \frac{Q_F^{an}}{e} = \frac{365 \times E_{chauffage}}{e}$

faisant l'hypothèse qu'il faut évacuer toute l'énergie thermique apportée par les occupants (de sorte que la température de la pièce reste constante).

Soit un coût annuel  $ca = p \times W^{an} = 0,17 \times \frac{365 \times 100}{3}$

$ca = 2,1 \text{ k€}$

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température  $T_{\text{max}}$ . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique  $\rho_{\text{air}}$  de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air  $D_m$ , en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

loi de gaz parfait :  $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

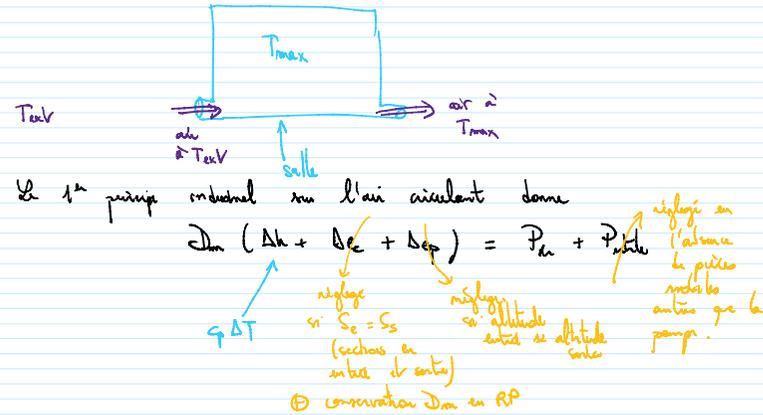
Donc  $\rho_{\text{air}} = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \approx \rho = 0,2 M_{\text{O}_2} + 0,8 M_{\text{N}_2} = 29 \text{ g/mol}$

d'où  $\rho_{\text{air}} = \frac{1 \times 10^5 + 29 \cdot 10^3}{8,31 \times (273 + 35)} \text{ kg/m}^3 = 1,1 \text{ kg/m}^3$

Le plus  $D_m = \rho_{\text{air}} D_r = 0,84 \cdot 10^3 \text{ kg/s} = 0,26 \text{ kg/s}$

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de free-cooling est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de free-cooling dans cette salle informatique.

Modélisons le système « free-cooling » par de l'eau à la température  $T_{\text{ext}}$  renvoyée dans la salle (température  $T_{\text{max}}$ ) et sachant que la température  $T_{\text{max}}$  :



Le 1<sup>er</sup> principe appliqué sur l'air circulant donne

$D_m (\Delta h + \Delta e + \Delta ep) = P_{\text{ch}} + P_{\text{perte}}$

d'où  $D_m c_p (T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}) = \frac{P_{\text{ch}}}{\rho c_p}$

*cas physique caractéristique:  
 → chaque degré de liberté  
 quadratique (5 par 1/2 d'atome)  
 compte pour R/2 dans C\_v, molaire  
 ⇒ C\_v,m = 5R/2  
 ⇒ C\_p,m = C\_v,m + R = 7R/2*

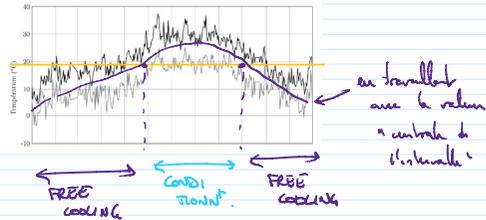
*puissance thermique  
 captée par l'eau ...  
 ... et donc émise  
 par le free cooling.*

$$\Rightarrow \gamma = \frac{7R}{2M} \text{ (massique)} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$\text{or } P_{th} = \frac{100 \text{ kW.h}}{24 \text{ h}} = 4,2 \text{ kW} \text{ à évaluer. (} \gg \text{ } \mathcal{P}_r \text{ dans hypothèse Pointe réfrigérée etc.)}$$

d'où  $T_{max} - T_{min}$  doit être supérieur à  $\frac{P_{th}}{2m\gamma} = 16^\circ\text{C}$ .

$$\text{soit } T_{min} < 15^\circ\text{C}$$



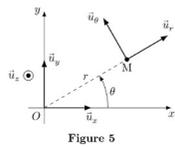
Donc pendant 8 mois : free cooling  $\text{cost} = p \cdot P_r \cdot \Delta t = 0,17 + 0,06 + 0,8 \cdot 30$   
 4 mois : conditionnement  $\text{cost} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{3} = 700 \text{ €}$

$$\text{soit } \text{cost} = 0,8 \text{ k€}$$

donc  $\frac{\text{cost (avec free cooling)}}{\text{cost (sans free cooling)}} = 0,4$  : ça vaut le coup.

$$\text{gain en euros } \approx 1 \text{ k€}$$

Q 12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.



$i \cdot i = 1$ , d'après l'énoncé

$$r = R_T + h = \text{cste}$$

on a donc un mouvement circulaire.

ajout de point M/p référentiel géocentrique support galiléen 2<sup>ème</sup> loi de Newton.

$$m_0 \vec{a} = \vec{F}_{grav} = -\frac{G m_0 M_T}{r^2} \vec{ur}$$

$$\text{or } \vec{OM} = r \vec{ur} \quad \text{donc } \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 r \vec{ur}$$

$$\text{d'où } m_0 r \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G m_0 M_T}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui donne  $\ddot{\theta} = 0$ , d'où  $\dot{\theta} = \text{cste}$  et  $v = r \dot{\theta} = \text{cste}$

Le mouvement du satellite est donc uniforme.

Q 13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite  $v_0$  sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle  $G$  et des paramètres  $M_T$ ,  $R_T$  et  $h$ .

sur  $\vec{ur}$ , la 2<sup>ème</sup> loi de Newton donne

$$m_0 \dot{v}_0^2 = \frac{G M_T m_0}{r^2}$$

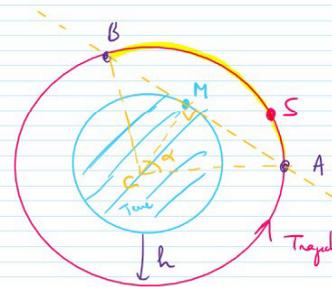
$$\text{d'où } v_0 = \sqrt{\frac{G M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

Q 14. Évaluer numériquement la vitesse  $v_0$ , ainsi que la période de révolution  $T_0$  correspondante.

$$v_0 = 7,58 \text{ km/s} = \frac{2\pi R}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_0} = 5,89 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Q 15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».



La communication entre un point M fixe sur le sol et le satellite S n'est possible que lorsque S est dans la portion de trajectoire comprise entre A et B (surlignée en jaune)

Le durée pendant laquelle reste le satellite dans cette zone est

$$\Delta t = \frac{\widehat{AB}}{v_0} \text{ où } \widehat{AB} \text{ est la longueur de l'arc}$$

$$\widehat{AB} = (R_T + h) \alpha$$

$$\text{or dans le triangle OSA : } \cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{R_T}{R_T + h}$$

$$\text{donc } \widehat{AB} = 2(R_T + h) \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$$

$$\text{et donc } \Delta t = \frac{2(R_T + h) \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)}{\sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}} = 13 \text{ min avec les données.}$$

mais il faudra d'avoir une émission/réception isolée en M. si l'antenne en M est directionnelle, elle réduit la zone de point de vue du satellite pour avoir une communication ; et donc