Mines Ponts MP - 2024 - Physique 2

Q1 - $[k] = \dfrac{[j_{th}]}{[T - T_0]} = \dfrac{[j_{th}]}{\Theta}$

dimension

en $W.m^{-2}$

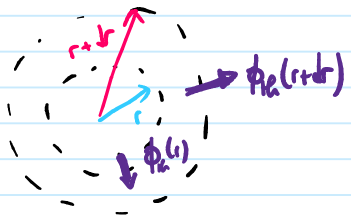
donc $\boxed{k \text{ s'exprime en } W.m^{-2}.K^{-1}}$

De plus, la loi de Fourier donne :

$$[\lambda] = \frac{[j]}{[\overrightarrow{grad}\, T]}$$

donc λ est en $\dfrac{W.m^{-2}}{K.m^{-1}} = W.m^{-1}.K^{-1}$

cas 1D sphérique : $T = T(r,t)$ et $\vec{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}\vec{u_r}$



système Σ { volume entre les sphères de rayons r et $r+dr$ }

1er pp sur Σ entre t et $t+dt$

transformation isochore

$$d(\delta U) = \delta Q + \cancel{\delta W}$$

$$\delta m\, c\, dT = [\Phi_{th}(r) - \Phi_{th}(r+dr)]\, dt$$

$$\rho\, \delta\tau\, c\, dT = -\frac{\partial \Phi_{th}}{\partial r}\, dr\, dt$$

$$\rho 4\pi r^2 dr\, c\, dT = -\frac{\partial}{\partial r}\left(j_{th}(r)\, 4\pi r^2\right) dr\, dt$$

$T(r,t+dt) - T(r,t) = \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

$$\rho\, \cancel{4\pi} r^2 c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(j_{th}\, \cancel{4\pi} r^2\right)$$

La loi de Fourier donne $j_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)}$$

Q2) $\boxed{D_{th} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\lambda}{\rho c}}$

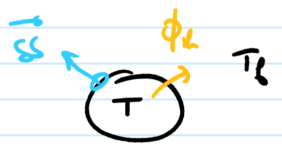
La longueur caractéristique du matériau est $l_c = R$.
Le temps caractéristique associé au phénomène de diffusion est $\tau = \frac{R^2}{D_{th}}$

La température dans le matériau pourra être considérée comme uniforme si la diffusion a le temps d'opérer, càd $\tau \ll \Delta t \iff \boxed{\frac{R^2}{D_{th}} \ll \Delta t}$

Q3)

$$C_{th} = m_{boule} * c$$

$$\boxed{C_{th} = \rho * \frac{4}{3}\pi R^3 * c}$$



$$R_{th} \overset{def}{=} \frac{T - T_f}{\Phi_{th}}$$

avec $\Phi_{th} = \iint_{S\ extérieur} \vec{j}_{th} \cdot \vec{\delta S}$

$$= \iint \underbrace{k(T - T_f)}_{uniforme} \vec{u_r} \cdot \delta S \, \vec{u_r}$$

$$= k(T - T_f) * 4\pi R^2$$

d'où $\boxed{R_{th} = \frac{1}{4\pi R^2 k}}$

Q4) Dans le fluide, l'équation de diffusion s'écrit $\rho' c' \frac{\partial T_f}{\partial t} = \frac{\lambda'}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r}\right)$

or " on néglige c' " annule le terme de gauche.

d'où $\frac{\lambda'}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r}\right) = 0$

soit $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r}\right) = 0$

D'où $r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r} = K(t)$

$\iff \frac{\partial T_f}{\partial r} = \frac{K(t)}{r^2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial T_f}{\partial r} = \frac{K(t)}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_f(r,t) = -\frac{K(t)}{r} + Q(t)$$

or • $\lim\limits_{r \to +\infty} T_f(r,t) = T_0 \quad \forall t$ donne $Q(t) = T_0$

• en $r = R^+$; $T_f(r,t) = T_s(t)$

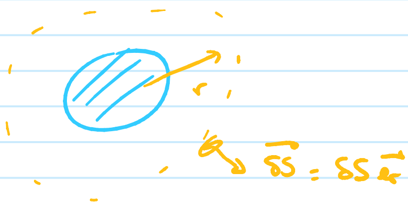
ce n'est pas clair dans l'énoncé mais on le voit sur la FIGURE 1

d'où $-\frac{K(t)}{R} + T_0 = T_s(t)$

soit $K(t) = -R\,(T_s(t) - T_0)$

D'où $\boxed{T_f(r,t) = T_0 + \frac{R}{r}\,(T_s(t) - T_0)}$

Q5) Calculons le flux thermique ϕ_{th} à travers une sphère de rayon r dans le fluide



$$\phi_{th} = \iint_{\substack{\text{sphère}\\ \text{de rayon } r}} \vec{j} \cdot \vec{\delta S}$$

$$= \iint -\lambda' \frac{\partial T_f}{\partial r}\,\vec{e_r} \cdot \delta S\,\vec{e_r}$$

$$= \lambda' \iint \underbrace{\frac{R\,(T_s(t) - T_0)}{r^2}}\,\delta S$$

r est sur sphère

d'où $\phi_{th} = \lambda' \frac{R\,(T_s(t) - T_0)}{r^2} \underbrace{\iint \delta S}_{4\pi r^2}$

$$\boxed{\phi_{th} = 4\pi\lambda' R\,(T_s(t) - T_0)}$$

→ on remarque que ϕ_{th} est indépendant de r, comme en régime permanent (on est ici en ARQS)

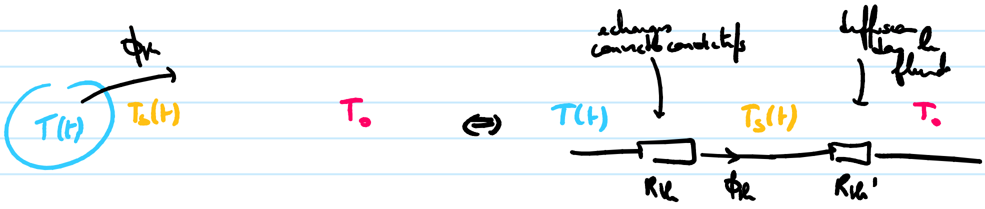
→ on remarque que ϕ_{th} est proportionnel à $T_s - T_0$

De ces 2 remarques, il semble licite de décrire les transferts thermiques en terme de résistance thermique.

$$\boxed{R'_{th} \overset{\text{def}}{=} \frac{T_s(t) - T_0}{\phi_{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda' R}}$$

Q6) on peut donc représenter le schéma équivalent de la situation ...

Q6) on peut donc représenter le schéma équivalent de la situation



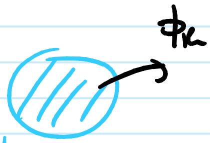
Ainsi $R_{th,eq} = R_{th} + R_{th}' = \frac{1}{4\pi R^2 k} + \frac{1}{4\pi\lambda' R}$

$$= \frac{1}{4\pi\lambda' R}\left(1 + \frac{\lambda'}{Rk}\right)$$

$$\boxed{R_{th,eq} \underset{\lambda' \gg Rk}{\simeq} \frac{1}{4\pi R^2 k}}$$

système {boule solide}

1er principe entre t et $t+dt$



$$dU = \delta Q + \cancel{\delta W}$$

transformation isochore.

$$\underbrace{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{masse de la boule}} \times c \times dT = -\Phi_{th}\, dt = -\frac{T(t) - T_0}{R_{th,eq}}\, dt$$

d'où $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_{th,eq} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c} T = \frac{T_0}{R_{th,eq} \times 4/3 \pi R^3 c}$

or $\frac{1}{R_{th,eq} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c} = \frac{\cancel{4\pi R^2} k}{\frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3 \rho c} = \frac{3k}{\rho R c} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau}$

Ainsi $\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}}$

Q7) et donc $T = Ae^{-t/\tau} + T_0$

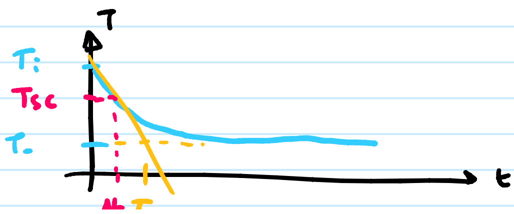
solution particulière

solution équation homogène associée

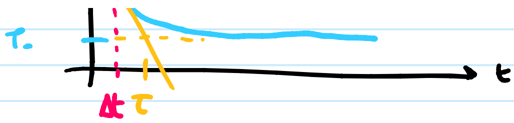
avec

$T(0) = T_i = A + T_0$, on obtient

$$\boxed{T = (T_i - T_0)\, e^{-t/\tau} + T_0}$$



La transition $c \to sc$ débute lorsque $T = T_{sc}$



Ainsi

$$T_{sc} = (T_i - T_0)\, e^{-\Delta t/\tau} + T_0$$

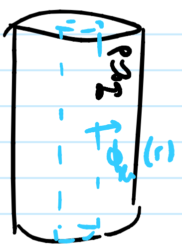
$$\boxed{\Delta t = -\tau \ln \frac{T_0 - T_{sc}}{T_i - T_0}}$$

Q8)

$$P_s(r) = \overbrace{\iiint_{\substack{\text{cylindre} \\ \text{de rayon } r \\ \text{de hauteur } H}} p_u}^{\text{uniforme}} \,\delta\tau = \boxed{p_u \,\pi r^2 H = P_s(r)}$$

Q9) en régime établi considérons le système

Σ = { cylindre de rayon r et de hauteur H }



Le 1er ppe entre t et t+dt donne

$$\cancel{dU} = \delta Q + \cancel{\delta W}$$

transformation isochore.

0 en RP

$$0 = \underbrace{-\phi_{th}(r)\, dt}_{\text{évacué à travers la frontière}} + \underbrace{P_s(r)\, dt}_{\text{produit dans le système}}$$

D'où $\phi_{th}(r) = P_s(r)$

$$\iint_{S_{lat}(r)} \vec{j}_{th}(r) \cdot \vec{\delta S}$$

$$\underbrace{\iint}_{\text{on est sur la surface latérale}} j_{th}(r)\, \vec{e_r} \cdot \delta S\, \vec{e_r} = j_{th}(r) \times 2\pi r H$$

D'où $j_{th}(r) = \dfrac{P_s(r)}{2\pi r H} = \dfrac{p_u \pi r^2 H}{2\pi r H}$

Ainsi $\boxed{j_{th}(r) = \dfrac{p_u\, r}{2}}$

Q10) en $r = R$, la continuité de j_{th} donne

$$j_{th}(r = R^+) = j_{th}(r = R^-)$$

$$j_{th}(r = R^+) = j_{th}(r = R^-)$$

conductio convectif $\quad \| \quad \| \quad$ diffusion (Q9)

$$k(T_s - T_0) = p_m \frac{R}{2}$$

$$\boxed{T_s = T_0 + \frac{p_m R}{2k}}$$

Q11) c'est en $r = 0$ que T est max [le plus loin du liquide de refroidisst].

or $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{p_m r}{2}$ donne

loi de Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{p_m r}{2\lambda}$$ [on retrouve bien que T décroît avec r]

RP $\quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dT}{dr}$

d'où $$\int_0^R dT = -\frac{p_m}{2\lambda}\int_0^R r\,dr$$

$$T_s - T_{max} = -\frac{p_m R^2}{4\lambda}$$

$$\boxed{T_{max} = T_s + \frac{p_m R^2}{4\lambda} = T_0 + \frac{p_m R}{2k} + \frac{p_m R^2}{4\lambda}}$$

Le phénomène de quench ne se produit pas si

$T_{max} < T_{sc}$

$$\Leftrightarrow \quad T_0 + p_m\left(\frac{R}{2k} + \frac{R^2}{4\lambda}\right) < T_{sc}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p_m < \frac{T_{sc} - T_0}{R/2k + R^2/4\lambda}}$$