

DM n°15

Révisions d'optique géométrique. Diagrammes E - pH
Pour le mardi 4 mars 2025

L'objectif de ce devoir est de vous faire réviser soigneusement deux parties importantes du programme de MPSI, à savoir :

- l'optique géométrique à travers 3 exercices qui permettent de balayer la plupart des points importants à connaître ;
- les diagrammes potentiels - pH qui tombent de façon très fréquente à tous les concours. Outre votre cours de MPSI, vous trouverez un document complémentaire traitant de ce sujet sur le site de la classe MP1.

1 Diagramme E - pH du mercure

La figure 1 représente le diagramme E - pH de l'élément mercure à 25°C. Il est tracé avec les conventions suivantes :

- La concentration de tracé est $C_{\text{tra}} = 10 \text{ mmol.L}^{-1}$. La frontière entre espèces dissoutes correspond à l'égalité des concentrations en atome de mercure.
- En ne considérant que les quatre espèces chimiques suivantes : $\text{Hg}(\ell)$ (liquide pur), $\text{HgO}(\text{s})$ (oxyde de mercure), $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+}$ et $\text{Hg}_{2(\text{aq})}^{2+}$.

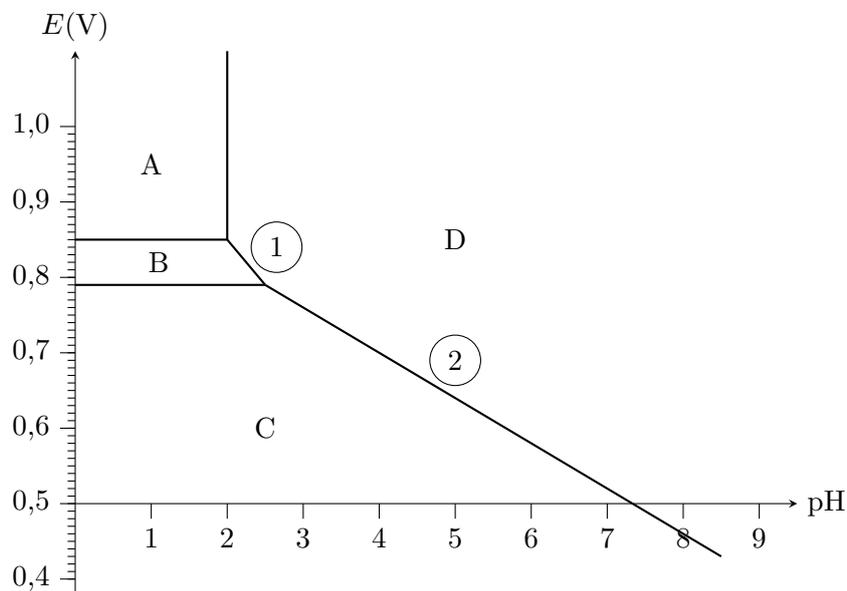


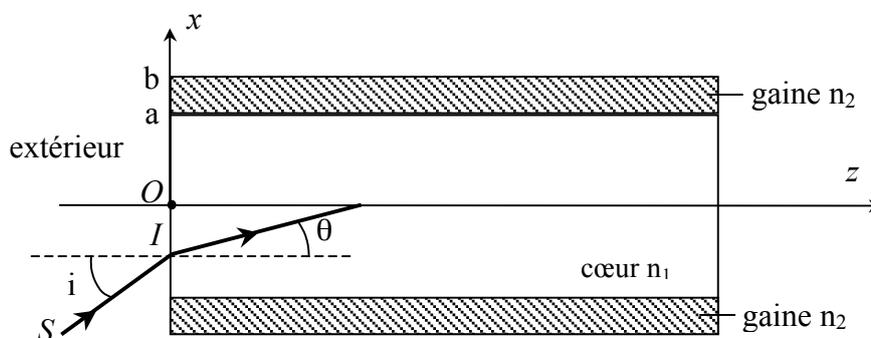
FIGURE 1 – Diagramme potentiel - pH du mercure

1. Identifier chacun des domaines repérés de A à D, en précisant s'il s'agit d'un domaine de prédominance ou d'un domaine d'existence.
2. Déterminer à l'aide du diagramme les potentiels standards E_1^0 et E_2^0 des couples $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Hg}_{2(\text{aq})}^{2+}$ et $\text{HgO}(\text{s})/\text{Hg}(\ell)$.

3. Déterminer l'équation - bilan de la réaction $A \rightarrow D$ (que l'on équilibrera avec des ions OH^-) et déterminer le produit de solubilité correspondant.
4. Quelles sont les pentes des segments 1 et 2? Vérifier la concordance sur le diagramme.
5. On donne $E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$ et $E^0(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$. Représenter les deux droites limitant le domaine de stabilité de l'eau. Le mercure est-il stable en solution aqueuse?

2 Transmission par fibre optique

Soit une fibre optique F constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 , entouré d'une gaine d'indice $n_2 < n_1$ et de rayon extérieur b . Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires au cylindre d'axe Oz formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 . Pour les applications numériques, on supposera que $n_0 = 1,00$.

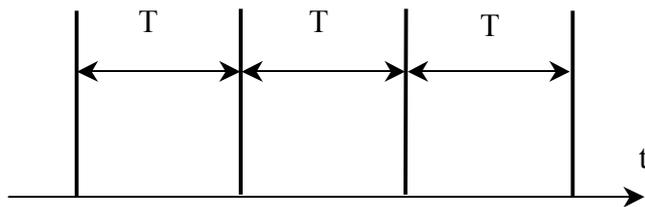


1. Un rayon lumineux SI contenu dans le plan xOz arrive en un point I sur la face d'entrée de la fibre. On appelle i l'angle d'incidence et θ l'angle de réfraction sur la face d'entrée.
 - a) Déterminer en fonction de n_0 , n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur, c'est à dire ne sorte pas de la fibre. La valeur maximale de i sera notée i_a (angle d'acceptance).
 - b) Calculer i_a pour une fibre d'indices $n_1 = 1,456$ et $n_2 = 1,410$.

Un problème qui se pose lorsqu'on veut transmettre des signaux lumineux dans les fibres est celui de leur élargissement temporel. On considère la fibre précédente et on suppose que la lumière incidente qui véhicule le signal définit un cône convergent de sommet O et de demi-angle au sommet égal à i_a .

2.
 - a) Calculer la différence $\delta\tau_{\max}$ des durées extrémales de propagation dans le cœur en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1 et n_2 et de c (vitesse de la lumière dans le vide).
 - b) Calculer la différence $\delta\tau_{\max}$ pour $L = 1,0 \text{ km}$, $n_1 = 1,456$ et $n_2 = 1,410$. On prendra $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

On envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses très brèves avec une période T .



3. Quelle est la valeur minimale de T pour que les impulsions soient séparées à la sortie ? En transmission numérique, on exprime le résultat en nombre maximum d'éléments binaires (présence ou absence d'impulsion = bit) qu'on peut transmettre par seconde. Que vaut le débit (en bits par seconde) de cette fibre ? Le comparer au standard du téléphone Numéris (63 kb/s) et au standard télévision (100 Mb/s).

3 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Donnée (dérivée de arcsin) : $\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel. On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 2.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 2) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

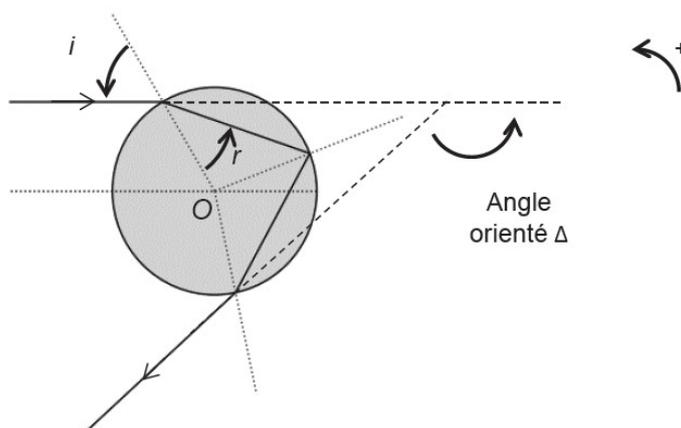


FIGURE 2 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions

1. Rappeler les trois lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. Donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

2. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent. Afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé c'est à dire l'angle orienté Δ .

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$. Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.

Montrer que $\Delta = f(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

3. Justifier à l'aide de la figure 3 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction Δ_m correspondant à x_m .

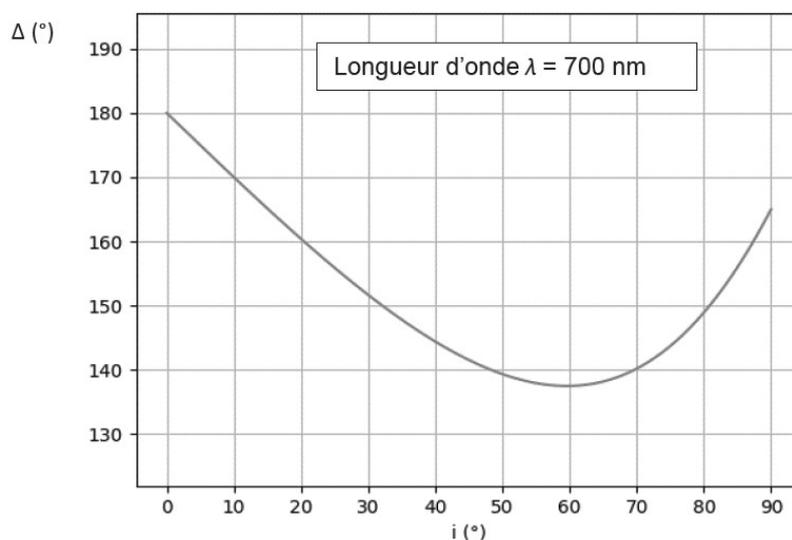


FIGURE 3 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence

4. Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400$ nm, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1,330$).
5. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

4 Étude de lentilles minces

Les lentilles minces étudiées seront utilisées dans l'approximation de Gauss.

- Définir l'approximation de Gauss.
- On vise un objet placé à grande distance d'une lentille (L) et nous voyons une image inversée de l'objet. La lentille (L) est-elle convergente ou divergente? Justifier votre réponse.
- Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

- a) Reproduire et construire l'image $\overline{A'B'}$ de \overline{AB} à l'aide de deux rayons issus du point B pour les lentilles minces suivantes : • Lentille (L_1) de centre optique O_1 et de foyers objet F_1 et image F_1' (Figure 9). • Lentille (L_2), de centre optique O_2 et de foyers objet F_2 et image F_2' (Figure 10).
- b) Donner la nature et la position de l'image $\overline{A'B'}$ d'un objet \overline{AB} ainsi que le grandissement transversal γ pour les lentilles (L_3) et (L_4) suivantes :
- La lentille (L_3) est convergente, de distance focale image $+30$ cm. Le positionnement de \overline{AB} est tel que $\overline{O_3A} = 15$ cm. La position de A' sera donnée par la valeur de $\overline{F_3'A'}$.
 - La lentille (L_4) est divergente, de distance focale image -30 cm. Le positionnement de \overline{AB} est tel que $\overline{AF_4'} = 20$ cm. La position de A' sera donnée par la valeur de $\overline{O_4A'}$.

4. Une lunette de Galilée comprend :

- un objectif assimilable à une lentille mince (L_1), de centre O_1 et de distance focale image $f_1' = 200$ mm,
 - un oculaire assimilable à une lentille mince (L_2), de centre O_2 et de distance focale image $f_2' = -50$ mm.
- a) La lunette est du type "afocal". Préciser la position relative des deux lentilles, la valeur de la distance $d = \overline{O_1O_2}$ et l'intérêt d'une lunette afocale.
- b) Dessiner, dans les conditions de Gauss, la marche d'un rayon lumineux incident, issu d'un point objet à l'infini, faisant un angle θ avec l'axe optique et émergeant sous l'angle θ' .
- c) En déduire le grossissement (ou grandissement angulaire) de cette lunette en fonction des angles θ et θ' , puis des distances focales f_1' et f_2' . Faire l'application numérique.
- d) Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (diamètre : 96 km) et Clavius (diamètre : 240 km).

Donnée : distance Terre – Lune $D_{TL} = 384\,000$ km.

L'astronome voit-il ces deux cratères lunaires à l'œil nu ? (acuité visuelle angulaire : 3×10^{-4} rad). Les voit-il à l'aide de cette lunette ? Justifier vos réponses.

La planète Vénus, de 12 150 km de diamètre, occultera Jupiter (de diamètre 145 800 km) le 22 novembre 2065. Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé), pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ? Dans cette configuration, la distance Terre – Vénus sera $D_{TV} = 45 \times 10^6$ km.

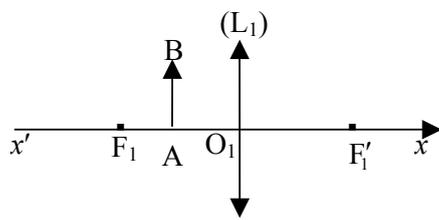


Figure 9

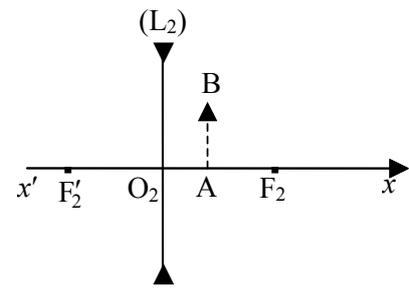


Figure 10