

Correction du DM n°11 : étude d'un faisceau LASER

e3a PC 2005

I.1

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 ; \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

I.2 Question de cours classique. On obtient :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

I.3.a Dans le vide : $\omega = kc$. On utilise ensuite la relation de structure car on a affaire à une OPPS électromagnétique (dans le vide) se propageant dans le sens $+\vec{e}_z$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_y$$

I.3.b Par définition :

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On en déduit, en utilisant le formulaire en fin d'énoncé :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}[\vec{E} \wedge \vec{B}^*] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

I.3.c

$$\langle P \rangle = \iint_S \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{e}_z dS = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S$$

et on en déduit :

$$J_L = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

I.3.d

$$E_0 = \sqrt{2 J_L \mu_0 c} \quad \text{donc} \quad E_0 = 5,5 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$$

II. Modèle du faisceau gaussien

II.1.a

$$\begin{aligned} |\underline{E}(r, z)|^2 &= E_0^2 \frac{z_0^2}{|z + iz_0|^2} \left| \exp\left(-ik \frac{r^2(z - iz_0)}{2(z^2 + z_0^2)}\right) \right|^2 \\ &= E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-\frac{r^2 k z_0}{z^2 + z_0^2}\right) \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$A(z) = E_0 \frac{z_0}{\sqrt{z^2 + z_0^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}}$$

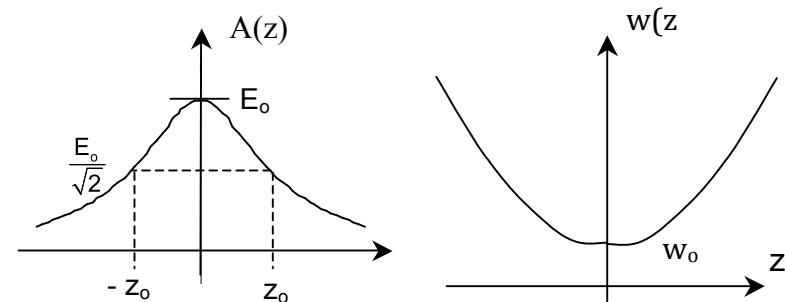
et par identification :

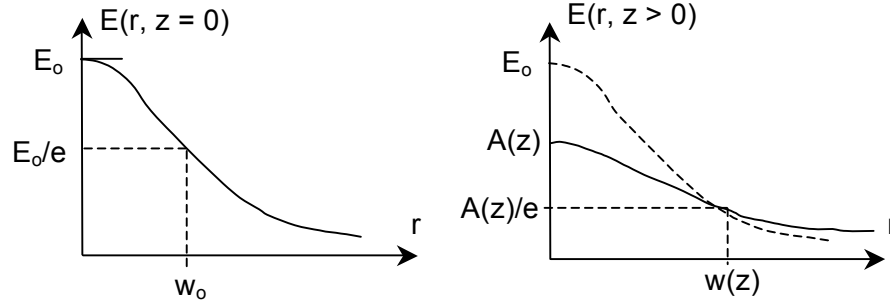
$$w(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \quad \text{avec} \quad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$$

On a donc :

$$A(z) w(z) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} = E_0 w_0$$

II.1.b



II.1.c


$w(z)$ représente la longueur caractérisant l'étalement transversal du faisceau.

II.2.a D'après le théorème des accroissements finis (ou théorème de Taylor-Young à l'ordre 1) :

$$\underline{E}(r + \lambda, z) \approx \underline{E}(r, z) + \lambda \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}(r, z)$$

donc

$$\left| \frac{\underline{E}(r + \lambda, z) - \underline{E}(r, z)}{\underline{E}(r, z)} \right| = \frac{\lambda}{|\underline{E}(r, z)|} \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}(r, z) \right| \ll 1$$

soit :

$$\frac{1}{k |\underline{E}(r, z)|} \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}(r, z) \right| \ll \frac{1}{2\pi} < 1 \implies \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}(r, z) \right| \ll k |\underline{E}(r, z)|$$

C'est la même démonstration pour l'autre composante.

II.2.b

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \exp(-i\omega t) \vec{\text{rot}} (\underline{E}(r, z) \exp(ikz) \vec{e}_x)$$

donc :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \exp(-i\omega t) \left\{ \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \exp(ikz) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x + \left[\frac{\partial \underline{E}}{\partial z} + ik \underline{E} \right] \exp(ikz) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \right\}$$

Comme :

$$\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}(r, z) \right| \ll k |\underline{E}(r, z)| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial z}(r, z) \right| \ll k |\underline{E}(r, z)|$$

on obtient, après simplification et en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} \approx \exp(-i\omega t) \{ ik \underline{E} \exp(ikz) \vec{e}_y \} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où

$$\vec{B} \approx \frac{k}{\omega} \underline{E}(r, z) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_y = \frac{\underline{E}(r, z)}{c} \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_y$$

II.3.a

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{B}^*] = \frac{|\underline{E}(r, z)|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

d'où :

$$J(r, z) = \|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \frac{|\underline{E}(r, z)|^2}{2\mu_0 c}$$

II.3.b

$$J(r, z) = \frac{A^2(z)}{2\mu_0 c} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \Rightarrow J_{max} = \frac{A^2(z)}{2\mu_0 c} \quad \text{pour } r = 0$$

$$J(R(z), z) = J_{max}(z) \exp\left(-\frac{2R(z)^2}{w^2(z)}\right) = \frac{J_{max}(z)}{e^2} \Rightarrow R(z) = w(z)$$

II.3.c On en déduit :

$$R(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \approx w_0 \frac{z}{z_0} \quad \text{si } z \gg z_0$$

Dans la zone $z \gg z_0$, le rayon R est donc une fonction linéaire de z . Le faisceau LASER a donc bien la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β tel que :

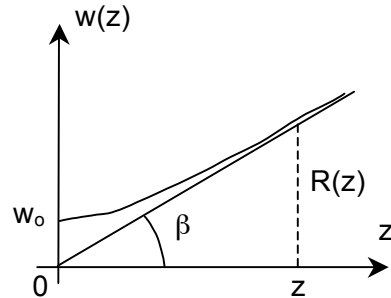
$$\tan \beta = \frac{R(z)}{z} = \frac{w_0}{z_0}$$

et comme :

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \Rightarrow z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

on obtient :

$$\tan \beta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$



II.3.d Applications numériques : pour un laser Nd-YAG on calcule $z_0 = 74$ cm donc $\tan \beta = 6,7 \cdot 10^{-4}$ ce qui donne $\beta = 0,039^\circ$. Pour un laser CO_2 , $z_0 = 7,4$ cm donc $\tan \beta = 6,7 \cdot 10^{-3}$ d'où $\beta = 0,39^\circ$.

En conclusion, les deux faisceaux restent très directifs mais le laser Nd-YAG est beaucoup moins divergent

III. Absorption de l'énergie du laser dans un milieu métallique

III.1

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

τ est homogène à un temps.

III.2.a On transpose l'équation dans le domaine complexe, avec $\vec{v} = \text{Re}[\vec{V}(i\omega) \exp(-i\omega t)]$. On obtient :

$$-i\omega m \vec{V}(i\omega) = -e \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{V}(i\omega)$$

donc :

$$\vec{V}(i\omega) = \frac{\tau e}{i\omega\tau - 1} \vec{E}_0$$

III.2.b Comme $\vec{j} = -e N \vec{v}$, on trouve :

$$\vec{j} = \frac{Ne^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$$

Le métal se comporte comme un conducteur ohmique de conductivité complexe $\underline{\sigma}$.

III.3.a Dans le domaine complexe :

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = 0 ; \text{div } \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} ; \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\sigma} \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = -\mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

et comme :

$$\overrightarrow{\text{rot rot}} \underline{\vec{E}} = \overrightarrow{\text{grad div}} \underline{\vec{E}} - \Delta \underline{\vec{E}} = -\Delta \underline{\vec{E}}$$

on obtient :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

III.3.b On a :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \frac{d^2 f}{dz^2} \exp(-i\omega t) \vec{e}_x ; \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}}$$

d'où :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -i\omega \mu_0 \sigma f - \frac{\omega^2}{c^2} f$$

En réarrangeant les termes, on trouve le résultat de l'énoncé. \underline{n} est l'indice complexe du milieu.

III.3.c Application numérique : $\omega_P = 2,40.10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$.

III.3.d

$$\underline{f}(z) = \underline{A}_0 \exp(i k \underline{n} z) + \underline{B}_0 \exp(-i k \underline{n} z)$$

Comme $\underline{n} = n' + in''$ avec $n' > 0$ et $n'' > 0$, le deuxième terme est "explosif" et il convient de prendre : $\underline{B}_0 = 0$. Il reste :

$$\underline{f}(z) = \underline{A}_0 \exp(i k \underline{n} z) = A_0 \exp(-n'' k z) \exp(i k n' z)$$

n'' est responsable de l'atténuation exponentielle de l'onde dans le milieu. D'autre part, la vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{n' k} = \frac{c}{n'}$$

III.3.e Application numérique : $\underline{n}^2 = -180 + 13i = a + ib$ (a et b respectivement parties réelle et imaginaire). Comme $\underline{n}^2 = (n' + in'')^2 = (n'^2 - n''^2) + i 2n'n''$, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} n'^2 - n''^2 = a \\ 2n'n'' = b \end{cases}$$

d'où :

$$n' = \frac{b}{2n''} = 0,47$$

$n' < 1$ donc la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

III.4 Comme $\underline{\vec{E}} = \underline{A}_0 \exp[i(k \underline{n} z - \omega t)] \vec{e}_x$, un calcul symbolique dans le domaine complexe donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = i k \underline{n} \vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}$$

et

$$\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

d'où, d'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{n} \frac{k}{\omega} \underline{A}_0 \exp(-n'' k z) \exp[i(k n' z - \omega t)] \vec{e}_y$$

III.5.a

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[\frac{k}{\omega} \underline{n}^* |\underline{A}_0|^2 \exp(-2n'' k z) \vec{e}_z \right]$$

d'où, sachant que $\omega = k c$:

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{n'}{2\mu_0 c} |\underline{A}_0|^2 \exp(-2n'' k z) \vec{e}_z$$

$P(z)$ est le flux du vecteur de Poynting moyen à travers une surface S orthogonale à \vec{e}_z , donc :

$$P(z) = \frac{n'}{2\mu_0 c} |\underline{A}_0|^2 \exp(-2n''kz) S$$

d'où :

$$P_0 = \frac{n'}{2\mu_0 c} |\underline{A}_0|^2 S \quad \text{et} \quad \alpha = 2n''k$$

III.5.b Application numérique : $\alpha = 1,59 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ d'où une profondeur de pénétration $\delta = 1/\alpha = 6,29 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Au delà de 5δ la puissance transmise est négligeable. Le champ électromagnétique reste donc confiné à la surface du métal.

III.6 La conservation de l'énergie impose :

$$R + A = 1$$