

1. Structure verticale de l'atmosphère.

1) Une surface A du sol terrestre

* absorbe un flux solaire $\phi_{abs} = I \times A$

* émet un flux radiatif $\phi_{emis} = sT_o^4 \times A$

on nous dit qu'à l'équilibre, ces 2 flux sont égaux, d'où :

$$T_o = (I/s)^{1/4}$$

AN: $T_o = (220/5,67)^{1/4} \times 10^8 \approx 2,5 \times 10^2 \text{ K} \approx -23^\circ \text{C}$

(ou plutôt $-2 \times 10^1 \text{ } ^\circ \text{C}$)

Cette valeur est anormalement basse,

la température moyenne du sol terrestre étant de 15°C .

2) Le nouveau modèle est schématisé ci-contre

* l'équilibre de l'atmosphère impose :

$$sT_o^4 = 2 \times sT_a^4 \quad (1)$$

soit $T_o = 2^{1/4} \times T_a \quad (1')$

* l'équilibre du sol terrestre impose :

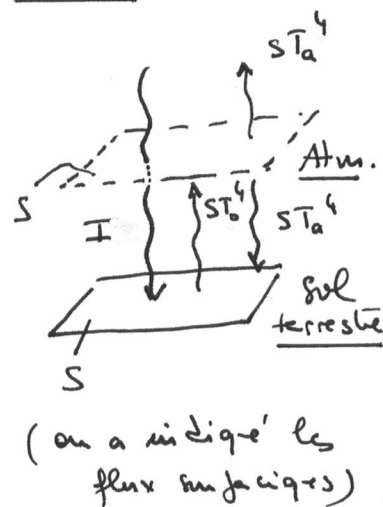
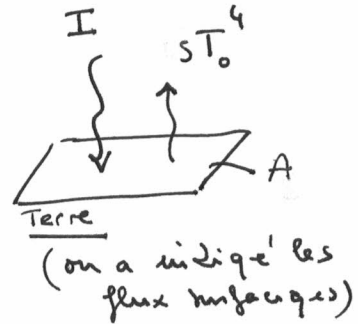
$$I + sT_a^4 = sT_o^4 \quad (2)$$

En injectant (1) dans (2) : $I + sT_a^4 = 2sT_a^4$

soit $I = sT_a^4 \rightarrow T_a = (I/s)^{1/4}$

La température de -23° obtenue qu. 1 est ici celle de l'atmosphère

Ciel



Puis avec (1') :

$$T_0 = 2^{1/4} \times \left(\frac{T}{S}\right)^{1/4}$$

AN : $T_0 \approx 1,2 \times 2,5 \cdot 10^2 \text{ K} = \underline{3,0 \cdot 10^2 \text{ K} = 27^\circ \text{C}}$
 (a plutôt $\underline{3 \cdot 10^1}^\circ \text{C}$)

R_I : la température est un peu dévalorisée avec ce modèle.

→ L'effet mis en évidence est l'effet de serre.

3) Les principaux constituants sont O₂ et N₂ en proportions ≈ 20% et 80%

D'où une masse molaire moyenne :

$$M_{\text{air}} \approx 0,2 M_{\text{O}_2} + 0,8 M_{\text{N}_2} \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

note M dans la suite

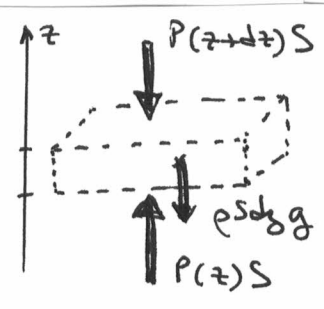
4) L'équilibre hydrostatique de l'atmosphère, se traduit par l'équation :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Preuve : on applique le théorème du centre d'inertie à une tranche $[z; z+dz]$ d'atmosphère, de base S.

À l'équilibre, il vient, en project° sur (O_z) :

$$\underbrace{P(z)S - P(z+dz)S}_{-\frac{dp}{dz}(z) dz \times S} - \underbrace{\rho S dz g}_{\text{masse de la tranche}} = 0$$



Ceci va nous permettre d'obtenir $T(z)$ car ρ dépend de T :

* Par la loi des gaz parfaits : $PV = nRT$ soit $PM = \rho RT$
 $\hookrightarrow m/M$

La relation d'équilibre devient : $\underline{\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} \times P}$ (1)

* Puis d'après l'hypothèse isentropique on a :

$TP^{\frac{1}{\gamma}-1}$ indep. de z , soit en différenciant logarithmiquement

$$\underline{\frac{dT}{T} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{dP}{P} = 0} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ donne : } \frac{dP}{P} = - \frac{Mg}{RT} dz \\ (2) \text{ donne : } \frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \end{array} \right\} \text{ d'où } \frac{dT}{dz} = - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}$$

note I
question
suivante

La température évolue donc linéairement
avec z selon la loi :

$$\boxed{T(z) = T_0 + \Gamma z}$$

$$\text{d'où } \boxed{\Gamma = - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R} < 0}$$

$$= - \frac{Mg}{C_p}$$

On effect $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R}$

↓
Relation
de Mayer

d'où $\gamma - 1 = \frac{R}{C_p - R}$

et $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{C_p}$

5

on sait que pour un gaz parfait diatomique $\boxed{C_p = \frac{7}{2} R}$

donc $\Gamma = - \frac{2}{7} \frac{Mg}{R} = - \frac{2}{7} \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{8,314} \text{ en K.m}^{-1}$

or $\frac{29}{7} \approx 4,1$ et $\frac{8,314}{2} \approx 4,1$ donc $\frac{2 \times 29}{7 \times 8,314} \approx 1$

d'où $\underline{\underline{\Gamma \approx - 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}}} \quad (-1 \cdot 10^{-2} \text{ environ})$

Rq: Cette valeur est un peu élevée (en valeur absolue), la
valeur expérimentale entre 0 et 10 km étant entre
-6 et -7 10^{-3} K.m^{-1} .

6]

Etat initial du système : $\begin{cases} T_i = T(z_i) \\ P_i = P(z_i) \end{cases}$

Etat final : $\begin{cases} T_f = ? \\ P_f = P(z_i + dz) \end{cases}$

or, l'évolution étant adiabatique et réversible, elle est isentropique, donc la relation (2) de question 4) s'applique :

$$\frac{dT}{T} + \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)}_{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{dP}{P} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{dT}{T} = \frac{T_f - T_i}{T_i} \\ \frac{dP}{P} = \frac{P_f - P_i}{P_i} \end{cases}$$

Ainsi $\left(\frac{T_f}{T_i} - 1\right) = -\frac{R}{C_p} \left(1 - \frac{P_f}{P_i}\right)$

ou encore : $\boxed{T_f = T_i \left(1 - \frac{R}{C_p} \left(1 - \frac{P_f}{P_i}\right)\right)} < T_i \text{ car } P_f < P_i$

7]

• Si $\begin{cases} T_f < T(z_i + dz) \\ P_f = P(z_i + dz) \end{cases}$ alors $\underline{P_f > P(z_i + dz)}$ ($\rho = \frac{PRT}{M}$)

or, la parcelle d'atmosphère est soumise à son poide et à la puissance d'Archimède dont la résultante s'écrit

$$d\vec{F} = (\underbrace{\rho(z_i + dz)}_{\substack{\text{masse volumique} \\ \text{du "fluide déplacé"}}} - \underbrace{\rho_f}_{\substack{\text{masse} \\ \text{volumique de la parcelle}}}) dV \vec{u}_z$$

↳ volume de la parcelle

donc $\underline{P_f > P(z_i + dz) \Rightarrow d\vec{F} \cdot \vec{u}_z < 0}$: la parcelle

redescend vers sa position z_i initiale

→ L'atmosphère est stable.

• Inversement $\underline{T_f > T(z_i + dz) \Rightarrow P_f < P(z_i + dz)}$
donc $\underline{d\vec{F} \cdot \vec{u}_z > 0}$

la particule continue son ascension et l'atmosphère est INSTABLE.

Rq: on peut répondre à cette question sans faire référence à la poussée d'Archimède mais en reprenant la démo de l'équilibre hydrostatique faite question 4).

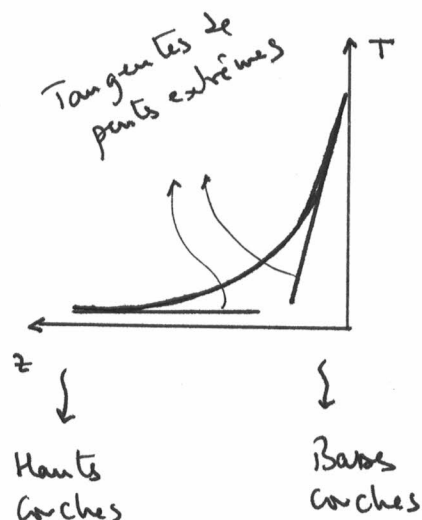
À l'altitude $z_i + dz$, l'atmosphère a une masse volumique $\rho(z_i + dz)$ qui pousse exactement au poids d'équilibre les forces pressantes. Si la parcelle étudiée possède une masse volumique $\rho_F > \rho(z_i + dz)$, son poids est plus intense que la résultante des forces pressantes et elle descend. (QFD).

8) Dans le cas marginalement stable où $T_F = T_i(z + dz)$, le gradient Γ est exactement celui calculé dans les q. 4) et 5).

Le cas d'une atmosphère isentropique étudiée plus haut est donc un cas limite en termes de stabilité.

→ Un modèle d'atmosphère tel que $|\Gamma| < |\Gamma_{\text{isentropique}}|$ est stable, tandis qu'un modèle tel que $|\Gamma| > |\Gamma_{\text{isentropique}}|$ est instable.

9) Je trouve plus facile de visualiser le gradient en "tournant" le graphique de 90° afin d'avoir T en fonction de z



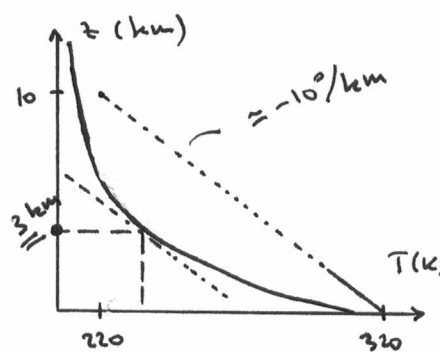
→ Basses courbes: Fort gradient de T, en valeur absolue, que j'évalue à $\approx 23^\circ/\text{km}$

→ Hauts courbes: Très faible gradient de T, en valeur absolue, que j'évalue à quelque chose d'inférieur à $0,1^\circ/\text{km}$

Rq: un modèle d'atmosphère isentropique est donc stable!

→ la partie basse de l'atmosphère est donc instable
tandis que la partie haute est stable.

Si on veut être quantitatif, il faut tracer une droite de pente $\approx -10^\circ/\text{km}$ qui correspond à $T_{\text{isentrope}}$ et utiliser les résultats de la qv. 8]



(on peut par ex tracer une droite entre $(10 \text{ km}, 220 \text{ K})$ et $(0 \text{ km}, 320 \text{ K})$ puis la parallèle à cette droite qui est tangente au graphique, ce qui donne le point limite tq $T = T_{\text{isentr.}}$)

→ L'atm est stable au dessus de 3 km, instable en dessous.

10] on constate qu'entre 0 et $\approx 11 \text{ km}$, le gradient est constant et $\approx -7^\circ/\text{km}$, ce qui est de l'ordre de $T_{\text{isentr.}}$, mais légèrement plus faible en valeur absolue, comme indiqué dans le texte.

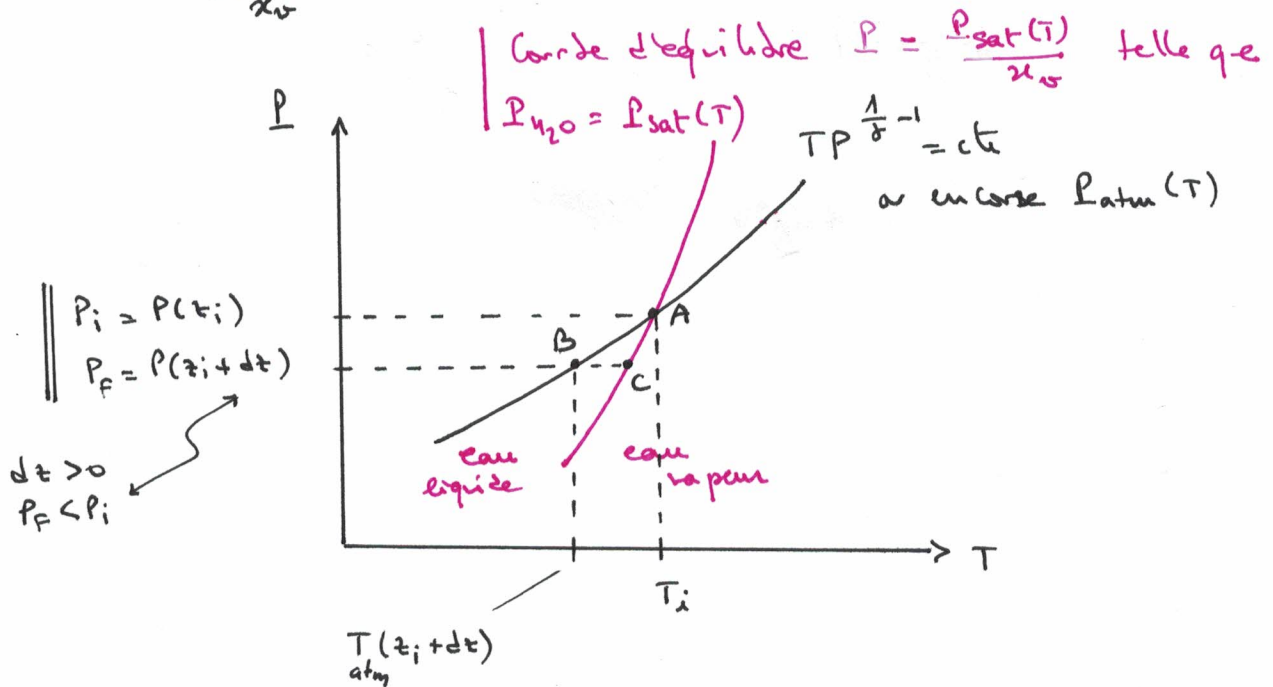
→ Ceci confirme que c'est bien la partie basse de l'atm. qui est instable du pt de vue convectif et qui constitue la troposphère.

→ En revanche, cette troposphère s'étend jusqu'à 11 km et non jusqu'à 3 km comme on aurait pu le penser d'après l'analyse de la qv. 9].

on constate enfin que la partie haute entre 11 et 15 km est modélisée par une température indep de z (légèrement inférieure à 220 K), ce qui est cohérent avec le très faible gradient observé sur la figure 1 ($< 0,1^\circ/\text{km}$ soit $< 0,4^\circ$ entre 11 et 15 km)

→ cette partie haute est la stratosphère.

11] Travaux sur un diagramme (Pression, température)
 la courbe $TP^{\frac{1}{\delta}-1} = \text{cte}$ qui caractérise l'atmosphère
 marginalement stable considérée ici, ainsi que la courbe
 $\frac{P_{\text{sat}}(T)}{\chi_w}$ associée à l'eau :



On considère une parcelle à (T_i, P_i) telle que la pression partielle en eau $P_{H_2O} = \chi_w P_i$ est $= P_{\text{sat}}(T_i)$ (Point A)

quand z augmente et que la parcelle évolue de manière isentropique
 P diminue (mise à l'équilibre mécanique, comme expliqué en préambule à la qu. 6]) et T diminue
 aussi en suivant théoriquement la courbe $TP^{\frac{1}{\delta}-1} = \text{cte}$
 (A $\rightarrow$ B)

Mais si $\frac{P_{H_2O}}{\chi_w}$ devient $> P_{\text{sat}}(T)$, l'eau doit se liquéfier
 (pour maintenir $P_{H_2O} \leq P_{\text{sat}}(T)$) ; ce phénomène de
 liquéfaction (ou condensation) de l'eau est exothermique
 et réchauffe donc la parcelle dont la temp. finale
 devient donc $> T_{\text{atm}}(z_i + dz)$ (P^f final entre B et C,
 en C si il y a équilibre $L=V$)

Donc d'après la qu. 7], ceci produit une ascension de
 la parcelle ! On voit en outre un wage apparaître.



Cette question est infaisable correctement dans le cadre du programme car il faut savoir que la condition de condensation de la vapeur d'eau dans l'air est

$$\text{pression partielle d'eau dans l'air} > p_{\text{sat, eau}}(T)$$

12]

$$x_v = \frac{n_v}{n_v + n_a} \quad \text{i.e.} \quad (n_v + n_a) x_v = n_v$$

on différencie : $dn_v \cdot x_v + (n_v + n_a) dx_v = dn_v$
($n_a = \text{cte}$)

$$\text{i.e.} \quad dx_v (n_a + n_v) = dn_v (1 - x_v) \\ = dn_v \times \frac{n_a}{n_a + n_v}$$

d'où

$$dx_v = dn_v \times \frac{n_a}{(n_a + n_v)^2} \approx \frac{dn_v}{n_a} \quad n_a \gg n_v$$

13]

on écrit que pour une variation d'altitude dz , la variation d'entropie totale est nulle, en comptant la variation d'entropie de l'eau qui se liquéfie / condense et la variation d'entropie du gaz (air + eau qui reste gazeuse)

$$\begin{aligned} dS_{\text{eau qui condense}} + dS_{\text{eau qui reste gazeuse}} + dS_{\text{air}} &= 0 \\ \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \text{négligé devant } dS_{\text{air}} \text{ car } n_v \ll n_a \\ \underbrace{dn_{\text{eig}}}_{-dn_v} \times \underbrace{(H_{m,e} - H_{m,g})}_{-\Delta_{\text{vap}}H} / T & \quad \quad \quad n_a C_p d \left(\ln(T P^{\frac{1}{\gamma}-1}) \right) \\ & \quad \quad \quad = n_a C_p \left\{ \frac{dT}{T} + \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)}_{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{dP}{P} \right\} \\ & \quad \quad \quad \frac{1-\gamma}{\gamma} = - \frac{R}{C_p} \end{aligned}$$

donc :
$$\underbrace{dn_v \times \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{T}}_{n_a \times dx_v} + n_a C_p \frac{dT}{T} - n_a R \frac{dP}{P} = 0$$

or d'après l'équilibre hydrostatique $\frac{dP}{P} = -\rho g dz = -\frac{Mg}{RT} dz$

d'ai finalement :

$$n_a dx_v \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{T} + n_a C_p \frac{dT}{T} + n_a \frac{Mg}{T} dz = 0$$

$\times \frac{n_a}{T} dz \rightarrow$

$$\boxed{\frac{dx_v}{dz} \Delta_{\text{vap}} H + C_p \frac{dT}{dz} + Mg = 0}$$

CQFD.

14] Intégrons la relation précédente entre $z=0$ et $z=h$:

$$\underbrace{(x_v(h) - x_v(0))}_{=0} \underbrace{\Delta_{\text{vap}} H}_{=x_v^{(i)}} + C_p \underbrace{(T(h) - T(0))}_{h \times \Gamma_h} + \rho g h = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma_h = \frac{x_v^{(i)} \Delta_{\text{vap}} H}{C_p \cdot h} - \frac{\rho g}{C_p}}$$

avec $C_p = \frac{7}{2} R$ pour un gaz parfait diatomique

on remarque que $\Gamma_h = \underbrace{\Gamma_{\text{isentropique}}}_{<0} + \underbrace{\frac{x_v^{(i)} \Delta_{\text{vap}} H}{C_p h}}_{>0}$

ie. $|\Gamma_h| < |\Gamma_{\text{isentropique}}|$

ce qui est conforme aux indicateurs du texte

→ contribution de la condensation de l'eau qui s'ajoute au gradient obtenu précédemment

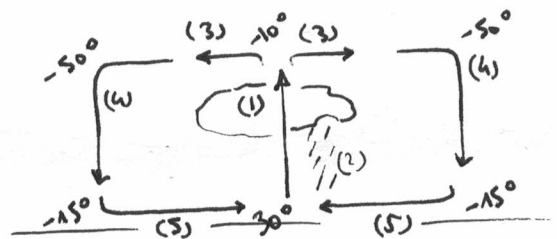
15]
$$\Gamma_h = \underbrace{\Gamma_{\text{isentropique}}}_{-9,8 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}} + \frac{4/100 \times 4,1 \cdot 10^4}{\underbrace{\frac{7}{2} \cdot 8,314 \cdot 10^4}_{\approx 4,1}} \approx \underline{\underline{-4,4 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}}}$$

 cf qu. 5] $\approx \frac{4}{5,7} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$
 (-410⁻³ m/m)

on obtient un gradient plus faible que celui du modèle international ($\approx 40\%$ plus faible) mais ceci a été annoncé dans le préambule à la qv. 11).

16] . on peut imaginer que la température de surface n'est plus élevée au voisinage de l'équateur tout simplement parce que le flux surfacique venant du soleil y est plus intense (terme I de la qv. 1), le rayons solaires arrivant en incidence quasi normale sur le sol (contrairement aux latitudes plus élevées)

Proposé l'explication de la circulation de Hadley :



- ① L'instabilité décrite à la question 11 fait monter en altitude l'air humide au niveau de l'équateur.
- ② A mesure qu'il monte cet air se refroidit et l'humidité qu'il contient se condense formant des nuages de gouttelettes d'eau qui retombent ensuite au sol sous forme de précipitations équatoriales.
- ③ Arrivé au niveau de la stratosphère cet air s'est asséché et ne peut donc plus monter ; mais comme un flux d'air venant du sol le pousse il est chassé vers le nord ou le sud de l'équateur.
- ④ L'air se refroidit à mesure qu'il s'éloigne des pôles et on retrouve au niveau des latitudes de $\pm 30^\circ$ le gradient de température "sec" du modèle international, avec un flux d'air descendant (pourquoi à ces latitudes ?)
- ⑤ Pour compléter le cycle, un flux d'air doit exister au niveau du sol des zones de hautes latitudes vers l'équateur ; l'air monte alors en température et se charge en humidité au contact de l'océan.

17]

$$dG_{e,m} = -S_{e,m}(T,P) dT + V_{e,m}(T,P) dP$$

$$dG_{v,m} = -S_{v,m}(T,P) dT + V_{v,m}(T,P) dP$$

$$G = n_v G_{v,m}(T,P) + (n - n_v) G_{e,m}(T,P)$$

18]

On veut que G soit minimale, donc que pour un état initial d'équilibre liquide-vapeur caractérisé par (T, P, n_v) , toute variation dn_v de la quantité gazeuse soit associée à une différentielle $dG = 0$

$$\text{Or, à } (T, P) \text{ fixés : } dG = dn_v G_{v,m}(T, P) + \underbrace{d(n - n_v)}_{= -dn_v} G_{e,m}(T, P)$$

$$\text{i.e. } dG = dn_v (G_{v,m}(T, P) - G_{e,m}(T, P))$$

$$dG = 0 \quad \forall \quad dn_v \Rightarrow$$

$$G_{v,m}(T, P) = G_{e,m}(T, P)$$

19]

$$A' \{T, P_{\text{sat}}(T)\} :$$

$$G_{v,m}(T, P_{\text{sat}}(T)) = G_{e,m}(T, P_{\text{sat}}(T))$$

$$A' \left\{ \begin{array}{l} T + dT, P_{\text{sat}}(T + dT) \\ = P_{\text{sat}}(T) + dP_{\text{sat}} \end{array} \right\} :$$

$$G_{v,m}(T + dT, P_{\text{sat}} + dP_{\text{sat}}) = G_{e,m}(T + dT, P_{\text{sat}} + dP_{\text{sat}})$$

En soustrayant on fait apparaître : $dG_{v,m} = dG_{e,m}$
et en utilisant la qv. 17), il vient :

$$-S_{v,m} dT + V_{v,m} dP_{\text{sat}} = -S_{e,m} dT + V_{e,m} dP_{\text{sat}}$$

où $S_{v,m}$, $S_{e,m}$, $V_{v,m}$, $V_{e,m}$ sont calculés à T et $P_{\text{sat}}(T)$

$$\text{Donc : } \frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{S_{v,m} - S_{e,m}}{V_{v,m} - V_{e,m}}$$

or $G = H - TS$ donc $S = \frac{H}{T} - \frac{G}{T}$

Ainsi $S_{v,m} - S_{e,m} = \underbrace{\frac{H_{v,m} - H_{e,m}}{T}}_{\equiv \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{T}} - \underbrace{\frac{G_{v,m} - G_{e,m}}{T}}_{= 0 \text{ d'après la qu. 18]}$

cd : $\boxed{\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{T(V_{v,m} - V_{e,m})}}$

$\leadsto$ Comme $\Delta_{\text{vap}} H > 0$ et $V_{v,m} > V_{e,m}$ $\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} > 0$: P_{sat} augmente avec T

20] En nous $V_{v,m} = \frac{RT}{P_{\text{sat}}} \gg V_{e,m}$. Il vient :

$$\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{RT^2/P_{\text{sat}}} \quad \sim \quad \frac{1}{P_{\text{sat}}} \frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{R} \cdot \frac{1}{T^2}$$

qui s'intègre en :

$$\boxed{\ln\left(\frac{P_{\text{sat}}(T)}{P_{\text{sat}}(T_0)}\right) = \underbrace{\frac{\Delta_{\text{vap}} H}{R}}_{\text{noté } C} \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0}\right)}$$

21] ??

Je dirais très qualitativement que la condensation dans les nuages diffère pour les 2 isotopes, donc que la vapeur d'eau qui atteint la stratosphère et est transportée vers les hautes latitudes n'a pas la même composition isotopique que les océans (elle est appauvrie dans l'isotope qui s'est le plus condensé et est le plus retourné à l'océan par précipitation); et que cette différence de composition dépend sans doute de la température globale de la Terre; enfin, que l'on retrouve cette vapeur d'eau sous forme de calotte glaciaire aux pôles.

② La troposphère vue comme une machine thermique.

- Il y a quelque chose d'un peu troublant dans cette approche : le système que l'on cherche à modéliser est un système qui contient un fluide en écoulement (le courant atmosphérique) évoluant en régime permanent de façon cyclique (circulation de Hadley).

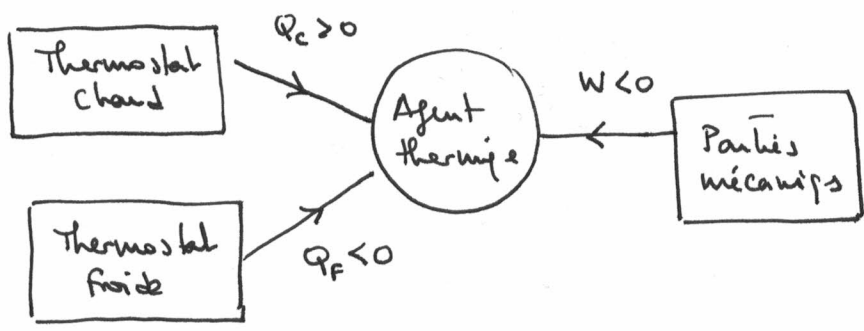
Or, le modèle de machine thermique proposé met en jeu un fluide qui subit nécessairement 4 transformations dont les durées sont précisées, ce qui correspond davantage à une machine à l'agent thermique et en vase clos (type moteur de voiture) et non en écoulement.

↳ De ce fait, pour répondre correctement aux questions, il faut appliquer les principes comme pour un système en vase clos et non comme pour un système en écoulement permanent (le schéma de la figure 4 et à ce titre troublant et pourrait être mal interprété, avec les 4 flèches qui font penser à un écoulement, si on le rapproche de la figure 3... Il s'agit en réalité d'un schéma formel)

- Autre petite difficulté : habituellement on étudie des machines à l'agent thermique et en contact avec des pièces mécaniques avec lesquelles le travail est échangé. Ici, la puissance mécanique désirée sert à entretenir le courant atmosphérique et est dissipée au sein même du fluide de la machine...

22

Élections un schéma formel de la machine :



Les grandeurs énergétiques sont écrites pour 1 cycle de fonctionnement.

Par définition :

$$\xi = \frac{\text{Terme énergétique utile}}{\text{Terme énergétique cédant}} = \frac{-W}{Q_c}$$

Appliquons le 1^{er} principe et le 2nd principe à l'agent thermique sur 1 cycle de fonctionnement :

$$\underbrace{\Delta U_{1\text{cycle}}}_{=0 \text{ car } U \text{ est une fonct. d'état}} = W + Q_f + Q_c ; \quad \underbrace{\Delta S_{1\text{cycle}}}_{=0} = \underbrace{S_c}_{\frac{Q_c}{T_c}} + \underbrace{S_c}_{\frac{Q_f}{T_f}} \geq 0$$

d'où :

$$\begin{cases} W + Q_f + Q_c = 0 & (1) \\ \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 & (2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c} \quad (2')$$

Ainsi :

$$\xi = \frac{-W}{Q_c} \underset{\text{par (1)}}{=} \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \underset{\text{par (2')}}{\leq} 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

cd : $\xi \leq \xi_c = 1 - T_f/T_c$

23

Dans le fonctionnement d'un moteur, l'agent thermique reçoit de la chaleur de la source chaude et en fournit à la source froide, donc :

$$Q_1 > 0 ; Q_2 < 0$$

or, par définition de la résistance thermique :

$$Q_1 = \frac{1}{R} (T_c - T_1) \times \tau \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{1}{R} (T_f - T_2) \times \tau$$

Ainsi $\begin{cases} Q_1 > 0 & \Rightarrow T_c > T_1 \\ Q_2 < 0 & \Rightarrow T_F < T_2 \end{cases}$

d'où au final :

$$T_F < T_2 < T_1 < T_c$$

24] Comme écrit ci-dessus :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{R} (T_c - T_1) \times \tau \\ Q_2 &= \frac{1}{R} (T_F - T_2) \times \tau \end{aligned}$$

25]

$$P = \frac{-W}{2\tau} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\tau}$$

$\Rightarrow$

$$P = \frac{1}{2R} \{ (T_c - T_1) + (T_F - T_2) \}$$

1^{er} principe à T_c et T_F

durée totale
du cycle

(les étapes 1 et 3 ont même durée τ ; les étapes 2 et 4 sont de durée $\ll \tau$)

26]

Comme à la qv. 22] :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$



Temp. effectives des sources chaude et froide pour le système T_c

d'où

$$\frac{T_c}{T_1} - 1 + \frac{T_F}{T_2} - 1 \leq 0$$

27]

L'égalité dans l'inégalité ci-dessus donne

$$T_2 = \frac{T_F}{2 - T_c/T_1} \rightarrow \frac{T_2}{T_c} = \frac{\eta}{2 - 1/x}$$

d'où

$$P = \frac{T_c}{2R} \left(1 - \underbrace{\frac{T_1}{T_c}}_x + \underbrace{\frac{T_F}{T_c}}_{\eta} - \frac{T_2}{T_c} \right) \quad \text{d'après la qv. 25]}$$

i.e.

$$P = \frac{T_c}{2R} \left(1 - x + \eta - \frac{\eta}{2 - 1/x} \right)$$

ou encore :

$$P = \frac{T_c}{2R} f(x, \eta)$$

$$\text{avec } f(x, \eta) = \left(1 - x \right) \left(1 - \frac{\eta}{2x - 1} \right)$$

$$\left(\eta = 1 + \eta - x - \frac{\eta x}{2x - 1} \right)$$

28]

L'égalité dans l'inégalité de la qv 26] donne :

$$\frac{T_C}{T_1} - 2 + \frac{T_F}{T_2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{T_1}{T_C} = \frac{1}{2 - \underbrace{T_F/T_2}_{>0}}$$

donc nécessairement $\left| \frac{T_1}{T_C} = x > \frac{1}{2} \right|$

{ On n'a pas besoin de la qv 23] me semble-t-il ...
celle-ci montre que $x < 1$!

29]

Cherchons comment $\mathcal{L}$ varie avec x à η fixé. Par cela étudions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \eta) &= -1 \times \left(1 - \frac{\eta}{2x-1}\right) + (1-x) \times \frac{2\eta}{(2x-1)^2} \\ &= -1 + \frac{\eta}{2x-1} + \frac{2\eta(1-x)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-1)^2} \left(-(2x-1)^2 + \eta(2x-1) + 2\eta(1-x) \right) \\ &= \frac{1}{(2x-1)^2} \left(-4x^2 - 4 + 4x + 2\eta x - \eta + 2\eta - 2\eta x \right) \\ &= \frac{1}{(2x-1)^2} \left(-4x^2 + 4x - 1 + \eta \right) \end{aligned}$$

polynôme de degré 2, concave,
qui s'annule en (x^-, x^+) que l'on
va calculer :

Discriminant : $\Delta = 16 + 16(-1 + \eta) = 16\eta$

$$\begin{cases} x^- = \frac{-4 + 4\sqrt{\eta}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{2} \\ x^+ = \frac{-4 - 4\sqrt{\eta}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2} \end{cases}$$

Compte tenu de la concavité, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \geq 0 \Leftrightarrow x^- \leq x \leq x^+$

$\rightarrow \mathcal{L}$ croît donc avec x dans cet intervalle et se maximise

en $\boxed{x^+ = \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}}$

qui est bien entre
1/2 et 1 comme attendu

→ Cette valeur max est :

$$P_{max} = \frac{T_c}{2R} \underbrace{\left(1 - \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}\right)}_{\frac{1-\sqrt{\eta}}{2}} \underbrace{\left(1 - \frac{\eta}{1+\sqrt{\eta}-1}\right)}_{1-\sqrt{\eta}}$$

d'où $\boxed{P_{max} = \frac{T_c}{4R} (1-\sqrt{\eta})^2}$ $\left(f(x^+, \eta) = \frac{(1-\sqrt{\eta})^2}{2}\right)$

30] $\xi = \frac{-W}{Q_c} = \frac{P \times 2\ell}{\frac{1}{R} (T_c - T_1) \times 2\ell} = \frac{\frac{T_c}{2R} f(x, \eta) \times 2}{\frac{T_c}{R} \left(1 - \frac{T_1}{T_c}\right)}$
 qu. 22] $\downarrow$
 note
ici Q_1

d'où $\xi = \frac{f(x, \eta)}{1-x}$

et $\xi(x^+) = \frac{1}{2} \frac{(1-\sqrt{\eta})^2}{1 - \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}} \rightarrow \boxed{\xi(x^+) = 1-\sqrt{\eta}}$

arg!

• or on a vu que $\xi \leq \xi_c = 1 - T_F/T_c = 1-\eta$
 $\downarrow$
 rendt de
Carnot

Comme $0 < \eta \leq 1$, $\sqrt{\eta} \geq \eta$ donc $1-\sqrt{\eta} \leq 1-\eta$

ce qui assure que $\xi(x^+) \leq \xi_c$

31]

- le texte nous dit que les étapes ② et ④ de détente et de compression peuvent être effectués en restant réversibles.

↳ Les étapes irréversibles sont nécessairement les étapes de transfert thermique ① et ③

Toutefois, la situation est délicate puisqu'il a également été dit que ces étapes ① et ③ étaient isothermes et à la question 26] on les a supposés "réversibles pour le système $\mathcal{F}$ " et on a remplacé l'inégalité de Goussier-Clausius par une égalité...

Il faut comprendre que la source d'irréversibilité de ces étapes se situe "dans les résistances thermiques" liant les sources froide et chaude à $\mathcal{F}$ et dans l'existence de flux thermiques entre les zones de températures différentes $T_c \rightarrow T_1$ et $T_F \rightarrow T_2$.

- Ainsi, pour obtenir $\dot{S}$, appliquons le 2nd principe au système forme de $\mathcal{F}$ ET DES RÉSISTANCES THERMIQUES, i.e. les parois à travers lesquelles $\mathcal{F}$ est en contact avec les sources.

Il vient alors :

$$\underbrace{\Delta S_{1 \text{ cycle}}}_{\Delta S_{\mathcal{F}} + \Delta S_{\text{parois}}} = \underbrace{S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}}}_{\frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_F}}$$

$= 0$

néglige en supposant leurs capacités thermiques très faibles devant celle de $\mathcal{F}$

les thermostats sont bien à T_c et T_F pour ce système, alors que pour le système $\mathcal{F}$ seul on avait des thermostats effectifs à T_1 et T_2 !

(on en argumentant que ces parois sont siége d'un régime permanent...)

d'où $\dot{S} = \frac{S_{crée}}{2\tau} = -\frac{1}{2\tau} \left(\frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_f} \right)$

↓
durée d'un cycle

= $\frac{\tau}{R} \left(1 - \frac{T_1}{T_c} + 1 - \frac{T_2}{T_f} \right)$

qv. 24)

= $\frac{1}{2 - T_c/T_1}$

qv. 26)

is. $\dot{S} = \frac{1}{2R} \left(x + \frac{1}{2-x} - 2 \right)$

= $\frac{1}{2R} \left(x + \frac{x}{2x-1} - 2 \right)$

= $\frac{1}{2R} \left(\frac{2x^2 - x + x}{2x-1} - 2 \right)$

= $\frac{1}{R} \left(\frac{x^2}{2x-1} - 1 \right)$

en régime de puissance maximale : $x = x^+ = \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}$

is. $2x^+ - 1 = \sqrt{\eta}$

* $x^{+2} = \frac{1+2\sqrt{\eta}+\eta}{4}$

d'a' $\dot{S} = \frac{1}{R} \left(\frac{1+2\sqrt{\eta}+\eta}{4\sqrt{\eta}} - 1 \right)$

= $\frac{1}{R} \left(\frac{1-2\sqrt{\eta}+\eta}{4\sqrt{\eta}} \right)$

is. $\dot{S} = \frac{(1-\sqrt{\eta})^2}{4R\sqrt{\eta}}$

→ $\dot{S}$ est bien $\geq 0 \forall \eta$ conformément au 2nd principe.

* on a $\dot{S} = 0 \Leftrightarrow \eta = 1$ is. $T_f = T_c$ ce qui est cohérent puisqu'alors il n'y a plus aucun transferts thermiques !

($T_f = T_2 = T_1 = T_c$)

32]

Attention, petite erreur d'énoncé : $\left| \begin{array}{l} T_c = 290 K \\ T_F = 220 K \end{array} \right.$

Les données fournies permettent de calculer Q_1 et Q_2 et on cherche $|W|$, tout cela sur 1 journée.

Ce qui précède nous a fourni une expression de la puissance max $P = \frac{T_c}{4R} (1 - \sqrt{\eta})^2$ mais son utilisation nécessite la connaissance de R , qu'on ne peut pas obtenir il me semble.

↳ la seule possibilité de calculer Q_2 puis d'en déduire $|W|$ à partir du rendement ξ dont on a montré qu'il s'agit : $\xi = 1 - \sqrt{\eta}$ en fonctionnement optimal.

expression fournie (à dessein ?)

Si on note Δt la durée d'une journée et S la aire de la Terre ($S = 4\pi R_T^2$, R_T donné en début d'énoncé) :

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{\xi \times Q_1}{\Delta t} \quad \text{avec } Q_1 = I \times S \times \Delta t$$

$$d'où \quad P = \xi \times I \times S = \left(1 - \sqrt{T_F/T_c}\right) \times I \times 4\pi R_T^2$$

AN $P = \underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{220}{290}}\right)}_{\approx 2/3} \times 220 \times \underbrace{4\pi}_{\approx 12} \times \underbrace{(6,4 \cdot 10^6)^2}_{6,4^2 \cdot 10^{12} \approx 40 \cdot 10^{12}}$

ou $1 - \sqrt{\frac{220}{290}}$
 $= 1 - \sqrt{1 - \frac{70}{290}}$
 $\approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{70}{290}\right)$
 $\approx \frac{35}{290} \approx 0,12$

$\approx 1 - \frac{1,4}{1,7} \approx 1 - 0,8 = 0,2$

$P \approx 0,2 \times 220 \times \underbrace{12 \times 40 \times 10^{12}}_{\substack{480 \\ \approx 200 \times 500 = 10^5}}$

$P \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ W}$

(ou $1 \cdot 10^{16}$)

33]

On a donc $\underbrace{0,05 \text{ M U}^3/h}_{\rho \times S \times h} = \underbrace{P}_{\xi \times I \times S}$ en régime permanent (sinon l'énergie cinétique du vent varierait !)

D'où (+ simple pour e/AN)

$$U = \left(\frac{\xi I}{0,05 \rho} \right)^{1/3}$$

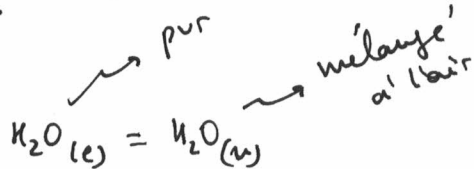
$\approx \left(\frac{0,2 \times 220}{0,05 \times 1} \right)^{1/3} = 880^{1/3} \approx 10 \text{ m/s}$
↳ 1/20 Ordonnée de grandeur cohérente

$\approx 36 \text{ km/h}$

③ Nucléation et formation des nuages.

34]

on considère ici l'équilibre



on sait qu'à l'équilibre, l'enthalpie libre de réaction est nulle

$$\text{i.e. } \Delta G = \mu_{H_2O_{(v)}} - \mu_{H_2O_{(c)}} = 0$$

$$= \mu_c(T) = \mu_v(T, p_v) = \mu_v^{(0)}(T) + RT \ln \frac{p_v}{p_0}$$

$\swarrow$
 j'utilise la notation de l'énoncé. Il s'agit de l'approximation valable qui néglige la dépendance en p de μ pour une phase condensée pure ; $\mu_c(T)$ pourrait être noté $\mu_c^{(0)}(T)$: c'est le pot. chimique standard !

$\searrow$ l'annexe de l'énoncé rappelle que pour un mélange de gaz (l'eau est ici mélangée à l'air) le potentiel chimique d'un constituant dépend de sa pression partielle selon cette formule ($\mu_v^{(0)}$ est le potentiel chimique standard)

$\rightarrow$ Ceci nous montre que l'équilibre est réalisé si

$$p_v = p_0 \exp \left\{ \frac{\mu_c(T) - \mu_v^{(0)}(T)}{RT} \right\}$$

$\rightarrow$ or, le même raisonnement montre que, dans le cas où le gaz serait uniquement de la vapeur d'eau à la pression p et à la température T , l'équilibre aurait lieu si

$$p = p_0 \exp \left\{ \frac{\mu_c(T) - \mu_v^{(0)}(T)}{RT} \right\}$$

ce terme est donc la pression de vapeur saturante $p_{\text{sat}}(T)$

CONCL : L'eau liquide est en équilibre avec sa vapeur, mélangée à l'air, ssi la pression partielle de vapeur d'eau réelle

$$p_v = p_{\text{sat}}(T)$$

et on a donc la relation suivante :

$$\mu_e(T) = \mu_v(T, p_{\text{sat}}(T))$$



L'étude du changement d'état du corps pur n'est plus au programme en tant que tel depuis 2014. Compte tenu que cette qv. 34 n'est pas guidée, elle me semble totalement infaisable dans le cadre du programme, même par de bons élèves.

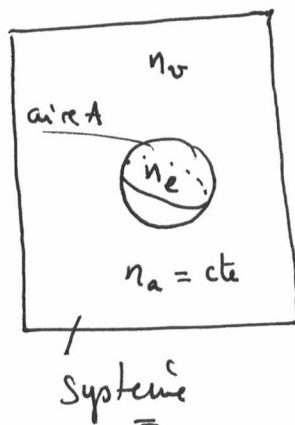
La propriété $p_v = p_{\text{sat}}(T)$ à l'équilibre $\mu_{\text{H}_2\text{O}(l)} = \mu_{\text{H}_2\text{O}(v)}$ dans l'air était déjà nécessaire pour traiter la qv. 11) correctement, en dépit du programme.

35

L'enthalpie libre du système complet s'écrit :

$$G = G_{\text{air}} + G_{\text{eau}(l)} + G_{\text{eau}(v)} + \underline{\underline{\sigma A}}$$

Terme
de surface



T et p sont fixés, n_a est fixe et on envisage une variation de n_e, n_v et A par échange d'eau entre le gaz et la gouttelette.

$$dG = \underbrace{dG_{\text{air}}}_{=0} + \underbrace{dG_{\text{eau}(l)}}_{= \mu_e(T) dn_e} + \underbrace{dG_{\text{eau}(v)}}_{= \mu_v(T, p_v) \underbrace{dn_v}_{-dn_e}} + \sigma dA$$

G_{air} dépend de
T, p et n_a qui
sont fixes

↳
$$dG = \{ \mu_e(T) - \mu_v(T, p_v) \} dn_e + \sigma dA$$

Rq: La différence de pression entre l'intérieur et l'ext. de la goutte, due à la tension de surface, n'est pas prise en compte dans ce raisonnement.

36] La goutte a pour aire $A = 4\pi r^2$ et pour volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ce volume est lié à n_e par la relation suivante :

$$n_e = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{\rho_0 \times V}{M_{H_2O}}$$

donc $n_e = \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \times \frac{4}{3}\pi r^3$ d'où $\frac{dn_e}{dr} = \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \times 4\pi r^2$

et on a également $\frac{dA}{dr} = d(4\pi r^2) = 8\pi r$

Il vient donc :

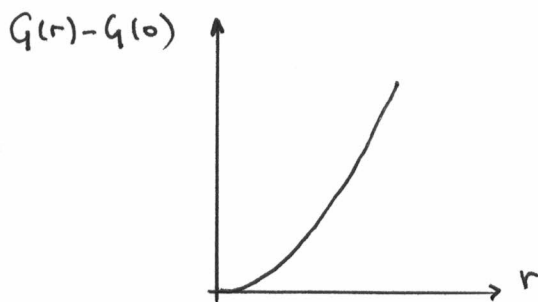
$$dG = \left\{ \left(\mu_e(r) - \mu_v(T, p_v) \right) \times \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} 4\pi r^2 + \sigma \cdot 8\pi r \right\} dr$$

37] on intègre :

$$G(r) = \left(\mu_e(r) - \mu_v(T, p_v) \right) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi\sigma r^2 + C$$

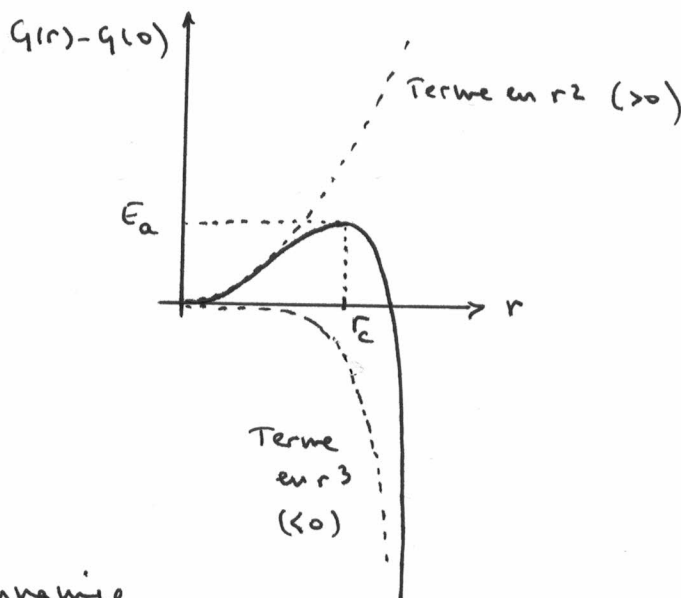
$\downarrow$
 $G(r=0)$

si $\mu_e(r) > \mu_v(T, p_v)$:



(somme de 2 termes > 0
en r^2 et r^3)

si $\mu_e(r) < \mu_v(T, p_v)$:



38] . G étant le potentiel thermodynamique il diminue au cours de l'évolution et est minimum à l'équilibre. on a donc les propriétés suivantes :

* si $\mu_e(r) > \mu_v(T, p_v)$, r ne peut que diminuer et $r_{eq} = 0$
 $\Rightarrow$ La goutte est instable et disparaît .

* Si $\mu_e(T) < \mu_v(T, p_v)$, l'évolut° de r dépend de son rayon initial r_0 :

↳ si $r_0 < r_c$, r diminue et $r_{eq} = 0$
i.e. la goutte est instable

↳ si $r_0 > r_c$, r croît indéfiniment, ce qui montre que la phase liquide est stable et que toute l'eau va Condenser.

↳ En outre, si $r_0 < r_c$, un apport extérieur d'énergie peut permettre d'augmenter G au dessus de $G(r_c)$ i.e. de faire croître le rayon de la goutte au delà de r_c , ce qui provoque ensuite sa croissance.

⇒ L'énergie d'activation définie par l'énoncé est donc

$$E_a = G(r_c) - G(0)$$

• Calcul de r_c et E_a :

* r_c vérifie $\frac{dG}{dr}(r_c) = 0$ soit :

$$(\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} 4\pi r_c^2 + \sigma 8\pi r_c = 0$$

i.e.

$$r_c = \frac{M_{H_2O}}{\rho_0} \frac{2\sigma}{\mu_v - \mu_e}$$

$$* E_a = (\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{4}{3} \pi r_c^3 + 4\pi \sigma r_c^2$$

$$= \left[\underbrace{(\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} r_c}_{-2\sigma} \times \frac{1}{3} + \sigma \right] \times 4\pi r_c^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi \sigma r_c^2}}$$

$$i.e. E_a = \frac{16\pi}{3} \left(\frac{M_{H_2O}}{\rho_0} \right)^2 \frac{\sigma^3}{(\mu_v - \mu_e)^2}$$

39]

$$\mu_v(T, p_v) - \mu_l(T) = \mu_v^{(0)}(T) + RT \ln \frac{p_v}{p_0} - \mu_l(T)$$

or on a vu qu. 34) que $\mu_l(T) = \mu_v^{(0)}(T) + RT \ln \frac{p_{\text{sat}}(T)}{p_0}$

donc $\mu_v(T, p_v) - \mu_l(T) = RT \ln \underbrace{\left(\frac{p_v}{p_{\text{sat}}(T)} \right)}_{\substack{= \\ \text{dép } \chi}}$

Ainsi

$$r_c = \frac{M_{H_2O}}{p_0} \frac{2\sigma}{RT \ln \chi}$$

40) la loi d'Arrhénius prévoit une vitesse v reliant :

$$v = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad \text{soit} \quad \ln v = -\frac{E_a}{RT} + \text{cte}$$

or $E_a = \frac{4}{3} \pi \sigma r_c^2$ et proportionnel à $(\ln \chi)^{-2}$
 $\downarrow$
 qu. 39]

on a donc $\ln v \propto \frac{1}{(\ln \chi)^2} \dots$ Difficile à commenter...
 si ce n'est que

$$\chi \downarrow \Rightarrow r_c \uparrow \text{ et } E_a \uparrow$$

on peut donc dire que

* si $\mu_l(T) > \mu_v(T, p_v)$ i.e. si $p_v < p_{\text{sat}}(T)$ / $\chi < 1$

la goutte liquide est thermodynamiq^e instable
 la phase gaz est thermodynamiq^e stable

* si $\mu_l(T) < \mu_v(T, p_v)$ i.e. si $p_v > p_{\text{sat}}(T)$ / $\chi > 1$

la phase liquide est thermodynamiq^e stable

(car $G \downarrow$ si $r \rightarrow \infty$) mais la phase gazeuse, sans goutte, peut être observée si χ reste proche de 1 car alors E_a est très élevée (cf qu. 38)
 la phase gazeuse est alors métastable.

41) on reprend l'étude de la qv 36) mais avec :

$$A = \pi r^2 \quad \& \quad V = \frac{\pi r^2 \ell}{3} = \frac{\pi r^3}{3 \tan \theta} \quad (\tan \theta = r/e)$$

$$\hookrightarrow dA = 2\pi r dr$$

$$\hookrightarrow n_e = \frac{\rho_0 V}{M_{H_2O}} \quad \& \quad dn_e = \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi r^2 dr}{\tan \theta}$$

$$d'oi \quad \boxed{dG = \left\{ (\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi r^2}{\tan \theta} + \sigma \cdot 2\pi r \right\} dr}$$

42) $G(r)$ aura exact- la même allure que précéd-
(même forme polynomiale), seuls les valeurs de r_c et E_a
étant modifiées ; je les note r'_c et E'_a .

$$\begin{aligned} * r'_c \text{ vérifie } \frac{dG}{dr}(r'_c) = 0 \quad \text{soit} \quad & \boxed{r'_c = \frac{M_{H_2O}}{\rho_0} \frac{2\sigma \tan \theta}{(\mu_v - \mu_e)}} \\ & = r_c \times \frac{\tan \theta}{\underline{\underline{4}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * E'_a &= G(r'_c) - G(0) = \left((\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{r'_c}{\tan \theta} + 2\sigma \right) \pi r'_c \\ &= (\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi r_c'^3}{3 \tan \theta} + \sigma \pi r_c'^2 \\ &= \underbrace{\left((\mu_e - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{r'_c}{3 \tan \theta} + \sigma \right)}_{-2\sigma/3} \pi r_c'^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi \sigma r_c'^2}} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{E'_a = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{M_{H_2O}}{\rho_0} \right)^2 \frac{\sigma^3}{(\mu_v - \mu_e)^2} \times \frac{\tan^2 \theta}{\underline{\underline{4}}} = E_a \times \frac{\tan^2 \theta}{4}}$$

43) Si θ est faible, $\tan \theta$ aussi et on peut avoir $E'_a \ll E_a$
ce qui favorise la croissance de la zone liquide, donc
l'apparition des vagues.

FIN