

1 MACHINES A ÉCOULEMENT PERMANENT

Ce sujet traite d'un problème relatif à des écoulements permanents de fluides, sous les aspects thermodynamique.

I. - Dimensionnement d'une installation de liquéfaction

On se propose de dimensionner une installation de production en continu de diazote N_2 liquide, fonctionnant en régime permanent (procédé LINDE). Le schéma de principe de l'installation est proposé sur la figure 1. Le problème débute par une description complète de l'installation ; les réponses aux questions exigent la prise en compte de l'ensemble des données décrivant l'installation ainsi que du diagramme enthalpique du diazote fourni en annexe.

Du diazote gazeux entre en continu dans la machine avec un débit massique \mathcal{D}_m , dans les conditions $p_E = 1 \text{ bar}$, $T_E = 300 \text{ K}$. Il atteint un mélangeur où on le mélange avec du diazote gazeux de débit \mathcal{D}' dans les mêmes conditions p_E , T_E . En sortie du mélangeur (M), le débit massique de diazote gazeux est donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + \mathcal{D}'$, toujours dans les conditions (p_E , T_E).

Après passage par le mélangeur, le diazote traverse une série d'étages de compression ; chacun de ces étages est constitué d'un compresseur adiabatique (C) suivi d'un réfrigérant isobare (R) à circulation d'eau froide ; en sortie du réfrigérant, le diazote gazeux est ramené à une température de sortie égale à T_E .

Les N étages compresseur-réfrigérant sont identiques ; ainsi le rapport de compression $r = \frac{p_{\text{sortie}}}{p_{\text{entrée}}}$ est le même pour chacun des N compresseurs. Après la traversée du dispositif, le diazote atteint donc le point A à la pression $p_A = r^N p_E = 100 \text{ bar}$, à la température $T_A = T_E = 300 \text{ K}$.

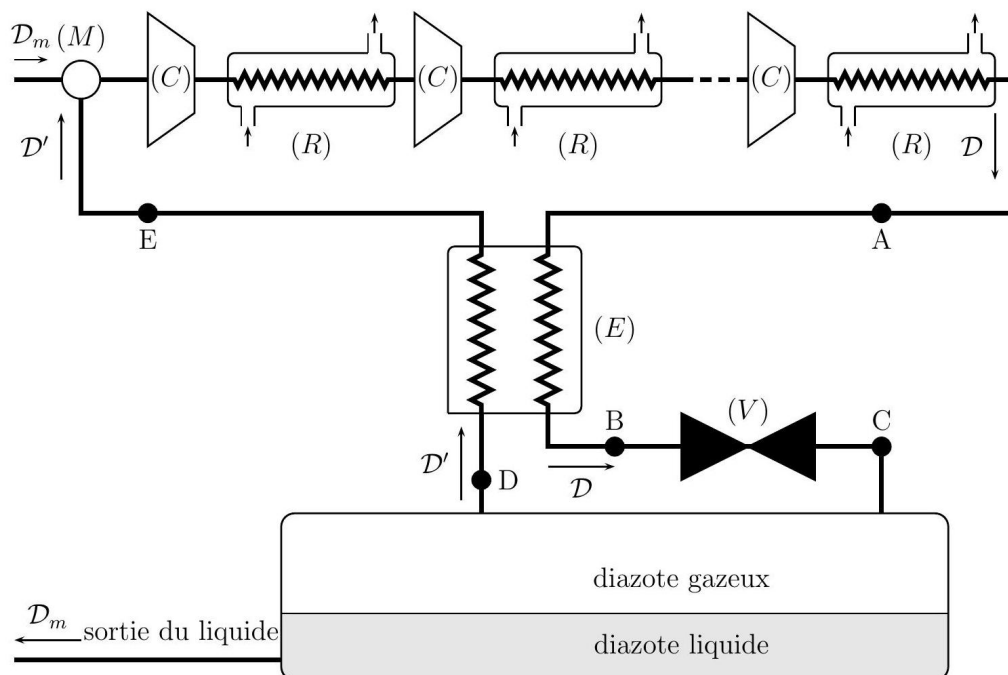


Figure 1 - Schéma de principe d'une installation de liquéfaction de diazote

L'eau liquide utilisée dans chacun des réfrigérants circule à la pression constante de 1 bar ; la température de l'eau à l'entrée du dispositif de refroidissement est $T_e = 280 \text{ K}$. On note

$c_e = 4,19 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide, considérée comme une constante.

Le diazote gazeux aborde entre A et B un échangeur thermique à contre-courant le long duquel il subit un refroidissement isobare ; à sa sortie, le fluide est dans l'état $p_B = p_A = 100 \text{ bar}$, T_B . Ce refroidissement est suivi d'une détente isenthalpique dans une vanne de détente (V).

A la sortie du robinet, le diazote est au point C : c'est un mélange liquide-vapeur dont la fraction massique de liquide est notée x , à la pression atmosphérique $p_C = p_E = 1 \text{ bar}$, et à la température $T_C = T_{\text{eb}}(p_C) = 77 \text{ K}$. A cette température, la densité du diazote liquide (par rapport à l'eau liquide) est $d = 0,81$.

La fraction massique x de diazote liquéfié est faible, on extrait seulement du réservoir un débit massique modeste \mathcal{D}_m de diazote liquide dans les conditions (p_C, T_C) ; le diazote gazeux recyclé est renvoyé, avec un débit massique \mathcal{D}' vers l'échangeur (E). Ce courant du diazote gazeux entre dans (E) aux conditions $p_D = 1 \text{ bar}$, $T_D = 77 \text{ K}$.

Dans l'échangeur (E), le diazote se réchauffe à pression constante et arrive au point E dans les conditions $p_E = 1 \text{ bar}$, $T_E = 300 \text{ K}$, avant d'être renvoyé vers le mélangeur.

Pour des raisons techniques, on impose deux limites de fonctionnement :

- la température du diazote ne doit, en aucun point du dispositif, dépasser $T_{\text{max}} = 400 \text{ K}$;
- la température de l'eau de refroidissement ne doit pas dépasser $T'_{\text{max}} = 350 \text{ K}$ en sortie des réfrigérants (R).

Le diazote gazeux est diatomique, sa masse molaire vaut $\mathcal{M} = 28,0 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. On notera h_K son enthalpie massique en un point K du schéma de la figure 1.

La constante molaire des gaz parfaits est $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

I.A. - Dimensionnement des étages de compression

Dans cette seule partie I.A le diazote est assimilé à un gaz parfait.

- Q1** Que vaut le rapport $\gamma = C_p/C_v$ des capacités thermiques du diazote ? On admet que les compresseurs fonctionnent de manière réversible. Déterminer et calculer la valeur minimale de N compatible avec les exigences décrites ci-dessus. On adoptera cette valeur dans la suite.
- Q2** Si on prenait en compte le caractère irréversible du fonctionnement des compresseurs sans changer la valeur de r , faudrait-il augmenter ou diminuer N ? On justifiera la réponse.
- Q3** On note \mathcal{D}_{eau} le débit massique du courant d'eau liquide circulant dans chaque réfrigérant (R). Déterminer l'expression et calculer la valeur minimale du rapport $\frac{\mathcal{D}_{\text{eau}}}{\mathcal{D}}$ compatible avec les exigences ci-dessus.

I.B. - Diagramme enthalpique du diazote

Dans cette partie I.B et la suivante I.C, le diazote n'est plus assimilé à un gaz parfait. Vous trouverez en annexe de ce sujet le diagramme enthalpique du diazote sous la forme d'un réseau de courbes.

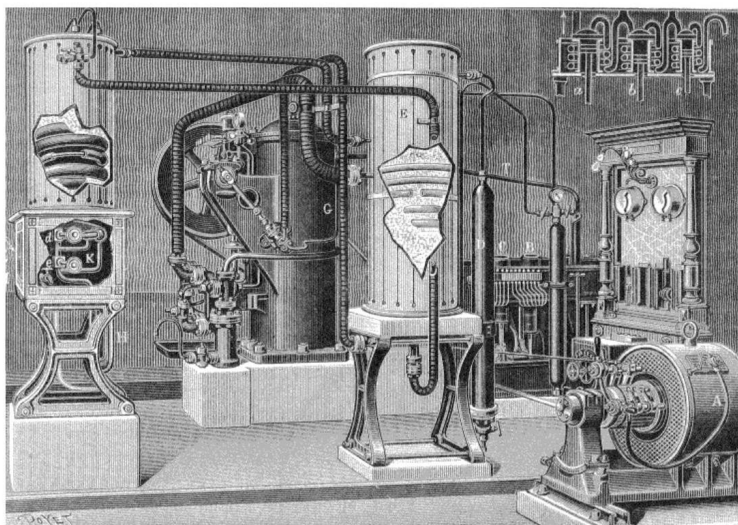
- Q4** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_1 . En justifiant votre réponse, déterminer l'asymptote de cette courbe à basse pression.

- Q5** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_2 . Justifier le sens de variation de cette courbe.
- Q6** Identifier et nommer les états possibles du diazote sur la courbe \mathcal{C}_3 .
- Q7** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_4 . On considère la transformation amenant le diazote de l'état représenté par le point M_1 à celui représenté par le point M_2 suivant le segment $[M_1M_2]$. Décrire l'état du diazote en M .

I.C. - Dimensionnement de l'échangeur (E)

- Q8** Exprimer h_C en fonction de x et des enthalpies massiques du diazote liquide et gazeux, notées h_{liq} et h_{vap} , dans le réservoir.
- Q9** Le réservoir utilisé en sortie de l'appareil fonctionne aussi en régime permanent ; relier x , \mathcal{D} et \mathcal{D}_m puis x , \mathcal{D}' et \mathcal{D} .
- Q10** Par un premier principe industriel pour le fonctionnement de (E), déterminer x en fonction de h_A , h_E et h_{liq} .
- Q11** En exploitant le diagramme enthalpique du diazote fourni en annexe, déterminer les valeurs de h_A , h_E , h_{liq} et h_{vap} . Évaluer x avec 2 chiffres significatifs. Quelle valeur aurait-on obtenue en considérant que le diazote gazeux vérifie la loi des gaz parfaits ?
- Q12** Reproduire sommairement le diagramme enthalpique du diazote en y faisant figurer la courbe \mathcal{C}_3 et l'isobare à la pression du point B du dispositif. En déduire la valeur de la température et l'état du diazote en ce point.
- Q13** La production de diazote liquide s'effectue avec un débit $\mathcal{D}_m = 3,0 \times 10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$. Dans le cadre du modèle du gaz parfait, évaluer la puissance mécanique qui est nécessaire au fonctionnement de l'ensemble des N compresseurs (C).

Comparer votre résultat à la citation suivante, publiée lors de l'exposition universelle de 1900 : *Nous avons immédiatement décrit le principe de l'appareil de M. le Dr. Carl Linde ; quelques mois plus tard, M. le Dr. d'Arsonval faisait installer dans son laboratoire du Collège de France une petite machine de 3 chevaux destinée à fournir un litre d'air liquide par heure. L'illustration ci-dessus accompagnait l'article cité.*



On notera que $3,0 \text{ hp} \simeq 2,2 \text{ kW}$; hp est le symbole de l'unité "cheval-vapeur".

2 Problème 2 (Centrale MP)

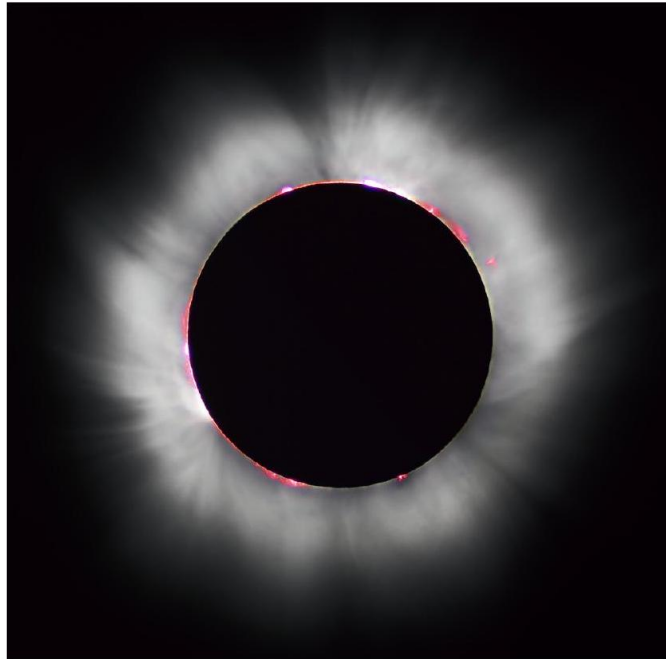


Figure 1

L'essentiel du rayonnement visible du Soleil provient de sa photosphère, que l'on désignera par "surface solaire". Elle est entourée de la couronne, laquelle est observable en particulier lors des éclipses. La figure 1 (photographie de Luc Viatour <https://lucnix.be>) montre la couronne solaire observée en France lors de l'éclipse totale de 1999.

La couronne est un milieu fortement variable et inhomogène. Sa structure est profondément influencée par le champ magnétique solaire. Dans tout ce problème, on ignore ces aspects et on étudie, sauf mention contraire, une "couronne moyenne", idéalisée et à symétrie sphérique.

Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

I. Température dans la couronne solaire

Le spectre de raies d'émission est la signature des éléments chimiques présents dans le corps qui émet. Il permet d'obtenir des informations sur la température, par la largeur de ces raies, mais renseigne aussi par la présence de formes ionisées. Cette propriété est utilisée pour étudier la couronne solaire et accéder à la température du plasma dans cette région.

L'analyse des raies émises par la couronne met en évidence l'existence d'atomes ionisés un grand nombre de fois. Par exemple le Fe_X est un atome de fer ionisé 10 fois qui existe dans la couronne. Or, l'étude en laboratoire de la réaction de passage du Fe_{IX} à Fe_X a montré que cette réaction nécessite une température d'au moins 1×10^6 K et que légèrement au-dessus apparaît l'ion Fe_{XI} . L'observation des raies de cet ion dans la couronne prouve donc d'une part qu'il y a du fer à cet endroit, mais aussi que la température qui y règne est d'environ 1×10^6 K.

I. A - Une atmosphère très étendue

Observée en lumière blanche, la couronne s'étend assez loin de la surface solaire (figure 1). La couronne est constituée d'un plasma assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_p .

La masse moyenne d'une particule du milieu est notée $m = M_p/\mathcal{N}_A$, où \mathcal{N}_A est la constante d'Avogadro. On modélise la couronne par une atmosphère isotherme à la température T et à l'équilibre sous l'effet du champ de pesanteur solaire.

Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme g_s . La densité volumique de particules $n_1(z)$ à l'altitude z , mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression $n_1(z) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$ où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de pesanteur et n_0 la densité volumique de particules à l'altitude $z = 0$.

- Q1** Donner l'expression de $E_p(z)$ et en déduire que $n_1(z) = n_0 \exp(-z/H)$ où H est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de m, k_B, T et g_s .
- Q2** Le milieu est localement neutre et on le suppose constitué uniquement d'hydrogène totalement ionisé. Exprimer m en fonction de la masse d'un proton (m_p) et de celle d'un électron (m_e).
- Q3** Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude $z_2 = R_s$, où R_s est le rayon du Soleil, environ 10^3 fois plus faible qu'à l'altitude $z_1 = 0$. En déduire la valeur numérique de H , puis évaluer la température de la couronne.

On adopte un modèle à symétrie sphérique et on néglige l'effet de rotation du soleil. La densité volumique de particules $n_2(r)$ ne dépend que de la distance r au centre du Soleil. A l'équilibre, la pression p vérifie l'équation $\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r)$ où $g(r)$ désigne la norme du champ gravitationnel solaire et $\rho(r)$ la masse volumique.

- Q4** En négligeant la masse de la couronne et en supposant la distribution de masse du Soleil à symétrie sphérique, déterminer $g(r)$ pour $r \geq R_s$, en fonction de g_s, r et R_s .
- Q5** En déduire l'expression de $n_2(r)$. On notera $n'_0 = n_2(R_s)$.
- Q6** Des observations ont permis de déterminer en fonction de r la densité volumique d'électrons dans la couronne (tableau 1). Vérifier la pertinence du modèle précédent à l'aide de ces données puis estimer la température de la couronne.

r/R_s	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$n_e \text{ (m}^{-3}\text{)}$	$3,5 \times 10^{14}$	2×10^{14}	9×10^{13}	5×10^{13}	3×10^{13}

Tableau 1

I.B - Présence de fer hautement ionisé

Le spectre de la lumière provenant de la couronne solaire inclut une raie d'émission assez intense de longueur d'onde $\lambda_0 = 530,3$ nm. Cette raie a été attribuée à l'ion Fe_{XIV} , c'est-à-dire au fer ayant perdu 14 électrons. L'énergie d'ionisation permettant de passer de Fe_{XIII} à Fe_{XIV} est $E_1 = 355$ eV.

- Q7** Quelle est la condition sur la longueur d'onde d'un photon incident pour qu'il puisse provoquer l'ionisation de Fe_{XIII} en Fe_{XIV} ? À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-il ?

Le rayonnement provenant de la surface solaire est insuffisant dans ce domaine spectral. On explique l'ionisation par des chocs entre ions Fe_{XIII} et électrons libres du milieu. Chacune de ces particules est assimilée à un point matériel obéissant à la statistique classique de Maxwell-Boltzmann. En dehors des chocs, les différentes particules sont sans interaction : leur énergie mécanique se réduit donc à leur énergie cinétique.

- Q8** En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'un électron libre en fonction de la température T , ainsi que celle d'un ion Fe_{XIV}
- Q9** En considérant que l'ionisation est probable si la somme des énergies cinétiques moyennes des deux particules est supérieure à E_1 , estimer la température de la couronne.

I.C - Des raies d'émission très larges

Un ion Fe_{XIV} excité rayonne une onde électromagnétique de fréquence ν_0 dans son référentiel propre (c'est à dire celui où il est au repos). S'il a une vitesse \vec{v} par rapport à un observateur, ce dernier perçoit une fréquence $\nu \approx \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_x}{c}\right) \nu_0$ où \vec{e}_x désigne le vecteur unitaire de la direction observateur - source orienté dans le sens observateur vers source et désigne la célérité de la lumière dans le vide.

Q10 Nommer l'effet décrit ci-dessus.

Le rayonnement observé dans la direction définie par le vecteur \vec{e}_x provient d'un grand nombre d'ions Fe_{XIV} . La probabilité pour qu'un de ces atomes ait sa composante selon Ox de son vecteur vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ est donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$\delta P = C \exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right) dv_x$$

avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où C est une constante.

On note $\langle X \rangle$ la valeur moyenne (espérance) d'une grandeur X associé à un ion Fe_{XIV} donné.

Q11 Calculer C .

Q12 Établir la relation entre $(\Delta\nu)^2 = \langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle$ et $\langle v_x^2 \rangle$.

Q13 En déduire $\Delta\nu$ en fonction de m_{Fe} , T , c , k_B et ν_0 , puis en fonction de m_{Fe} , T , c , k_B et λ_0 longueur d'onde de l'onde de fréquence ν_0 .

Pour la raie verte de Fe_{XIV} , centrée sur la longueur d'onde $\lambda_0 = 530,3$ nm, on observe $\Delta\nu \approx 3,20 \times 10^{10}$ Hz.

Q14 En déduire la température du milieu dans lequel cette raie se forme.

Données numériques

Constantes

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Soleil

Rayon : $R_s = 6,96 \times 10^8$ m

Masse : $M_s = 1,99 \times 10^{30}$ kg

Champ de pesanteur à la surface solaire : $g_s = 274 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Données diverses

Électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J

Masse du proton : $m_p = 1,673 \times 10^{-27}$ kg

Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg

Charge de élémentaire : $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C

Masse molaire atomique du fer : $M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

où α est un nombre réel strictement positif.

