

Proposition de corrigé du sujet Centrale PC Physique 2 2024

Corrigé proposé par Mickaël Loire et Marc Legendre.

Ce corrigé peut-être distribué librement à vos étudiants mais nous nous opposons à toute réutilisation commerciale de ce corrigé. N'hésitez pas à nous signaler toute erreur.

Q1 Par définition, le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement (ici due à la rotation de la planète Mars sur elle-même). La force d'inertie d'entraînement est probablement ici négligeable (l'énoncé ne donne pas de données).

Q2 $\vec{F}_{q1/q2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2$

Q3 Analogies électrostatiques/gravitationnelles :

Électrostatique	Gravitation
q	m
$\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}$	ρ
	$-G$

Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\text{div}(\vec{g}) = -4\pi G\rho \quad \Leftrightarrow \quad \oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Q4 La distribution de masses est :

- invariante par rotation d'angles θ et ϕ quelconques.
- Par les plans de symétries : $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$

Ainsi $\vec{g}(r, \theta, \phi) = g_r(r) \vec{e}_r$.

Surface de Gauss : sphère de rayon r .

Hyp : on néglige la contribution de l'atmosphère à \vec{g} .

L'application du théorème de Gauss gravitationnel conduit à

$$4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G m_m$$

dc $g_r(r) = -\frac{G m_m}{r^2}$

dc $\vec{g}(r) = -\frac{G m_m}{r^2} \vec{e}_r$

Q5 Au niveau du sol, $r = R_m$, $\vec{g}_0 = -\frac{G m_m}{R_m^2} \vec{e}_r$ donc $\vec{g}(r) = -\left(\frac{R_m}{r}\right)^2 \vec{g}_0$. AN : $g_0 = 3.73 \text{ m.s}^{-2}$.

Q6 La force volumique de pression s'écrit : $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)$.

Pour le système {Particule de fluide de volume $d\tau$ }, dans le référentiel martien supposé galiléen,

et à l'équilibre, le TRC nous donne : $\vec{0} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$.

Q7 En assimilant l'atmosphère à un GP, on a $PV = nRT = \frac{mRT}{M_a}$ soit $\mu = \frac{M_a P}{RT}$.

D'après Q6, et après projection dans la base sphérique, on a :

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{M_a P g}{RT} \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \tag{3}$$

Les lignes (2) et (3) impliquent que $P(r, \theta, \phi) = P(r)$ soit $\frac{dP}{dr} + \frac{P}{H} = 0$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$.

La condition aux limites $P(r = R_m) = P_0$ nous donne l'expression demandée : $P(r, \theta, \phi) = C_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$

avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$ et $C_0 = P_0$.

Q8 D'après les données de l'introduction relative à la composition de l'atmosphère : $M_a = 96\% \times M_{CO_2} + 2\% \times M_{Ar} + 2\% \times M_{N_2}$. AN : $M_a = 44 \text{ g.mol}^{-1}$ et $H = 10.7 \text{ km}$.

Q9 D'après Q7, $\mu(r, \theta, \phi) = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$ et $\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$.

Q10 Déterminons m par intégration de μ . On supposera que l'hypothèse g uniforme est encore valable.

$$\begin{aligned} m_{\text{atm}} &= \iiint_{V_{\text{int}}} \mu \, d\tau \\ &= \int_{r=R_m}^{+\infty} \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}} 4\pi r^2 \, dr \\ &= 4\pi \mu_0 H^3 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{R_m}{H}\right)^2 e^{-u} \, du \\ &= 4\pi \mu_0 H^3 \times \left(2 + 2\frac{R_m}{H} + \left(\frac{R_m}{H}\right)^2\right) \end{aligned}$$

En utilisant les intégrales données en fin d'énoncé.

Avec $\mu_0 H = \frac{P_0}{g_0}$, on obtient le résultat demandé : $m_{\text{atm}} = 4\pi \frac{P_0}{g_0} (2H^2 + 2HR_m + R_m^2)$.

AN : $m_{\text{atm}} = 2.34 \cdot 10^{16} \text{ kg}$.

Q11 Interprétation du libre parcours moyen : il s'agit de la distance moyenne parcourue entre deux collisions.

En considérant qu'on a 1 seule particule dans le volume $a^2 l$, on a $l = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu}$. Or au niveau du sol

$\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$ donc $l_0 = \frac{RT_0}{a^2 N_a P_0}$. AN avec $a \approx 10^{-10} \text{ m}$, $l_0 \approx 0.5 \text{ mm}$. Cet ordre de grandeur est plus grand que dans les CNTP car à la surface martienne, $P_0 = 600 \text{ Pa}$ et non pas 1 bar.

Q12 Par définition de e , en $r = R_m + e$, on a $H = l(r = R_m + e) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu_0 e^{-e/H}} = l_0 e^{e/H}$. Ainsi

on trouve $e = H \ln\left(\frac{H}{l_0}\right)$. AN : $l_0 = 1.8 \cdot 10^5 \text{ m}$

Q13 Déterminons au préalable la vitesse de libération d'une particule de masse m .

La vitesse de libération v est solution de l'équation $0 = E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m_m m}{R_m + e}$. On isole $v = \sqrt{\frac{2G m_m}{R_m + e}}$.

Avec $G m_m = R_m^2 g_0$, on a $v = \sqrt{\frac{2R_m^2 g_0}{R_m + e}} \approx \sqrt{2R_m g_0}$ pour $e \ll R_m$. AN : $v \approx 5.0 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

D'après la figure 2, les molécules de dihydrogène possèdent très majoritairement une vitesse supérieure à $V_{\text{libération}}$, ce qui expliquerait son absence dans l'atmosphère martienne. Par contre, les éléments les plus lourds seront conservés par l'atmosphère, c'est le cas ici du CO_2 , Ar (et non pas He et Ne plus légers), et de N_2 . Notons que pour les hautes couches, l'échauffement thermique dû au rayonnement solaire, peut provoquer une augmentation des vitesses et donc une « évaporation » supplémentaire.

Q14 En ordre de grandeur, en considérant une molécule par volume d^3 on a $n^* = \frac{1}{d^3}$. Ainsi

$$\mu = \frac{M_a}{N_a d^3}$$

Q15 Modèle continu : $d \ll e$. Or $d = \left(\frac{N_a \mu}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d'après Q14 et $\mu = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme. Ainsi $d = \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{r-R_m}{3H}}$. Il faut donc choisir

$r - R_m \ll 3H \ln \left(e \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$. AN : $r - R_m \ll 1.0 \cdot 10^6$ m. Le modèle continu est notamment valable dans l'exosphère à 10% près.

Q16 En simplifiant l'équation de Navier-Stokes :

RS	\Rightarrow	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$	
Parfait	\Rightarrow	$\eta = 0$	on obtient
$\vec{v} = v_r(r) \vec{u}_r$	\Rightarrow	$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial r}$	

tient l'équation $\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm_m \mu}{r^2}$.

Q17 Pour un GP, $P = \frac{RT\mu}{M_a}$ ainsi l'équation Q15 se simplifie en $\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{RT}{M_a} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{Gm_m \mu}{r^2}$.

Q18 L'écoulement est stationnaire donc le débit massique se conserve. Sur la sphère de rayon r , où v est uniforme, on a $cste = 4\pi r^2 \mu v$ d'où $\mu r v = cste = K$.

Q19 En multipliant l'équation Q17 par r^2 et en réinjectant $\mu = \frac{K}{r^2 v}$, on a :

$$\begin{aligned} K \frac{dv}{dr} &= -\frac{RT}{M_a} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{K}{vr^2} \right) - Gm_m \frac{K}{vr^2} \\ &= \frac{RTK}{M_a} \left(\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dr} + \frac{2}{vr} \right) - \frac{Gm_m K}{vr^2} \end{aligned}$$

En simplifiant par K et factorisant les termes en $\frac{dv}{dr}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \times \left(1 - \frac{RT/M_a}{v^2} \right) &= \frac{1}{v} \left(\frac{2RT/M_a}{r} - \frac{Gm_m}{r^2} \right) \\ \text{donc } \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{RT/M_a} - 1 \right) &= v \left(\frac{2}{r} - \frac{Gm_m M_a / RT}{r^2} \right) \end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en divisant par v :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{r^*}{r^2} \right) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{RT}{M_a}} \quad \text{et} \quad r^* = \frac{Gm_m M_a}{2RT}$$

Q20 Homogénéité :

$\left[\frac{RT}{M_a} \right] = \left[\frac{kT}{m} \right] = [v^2]$ donc l'expression de c est homogène.

$\left[\frac{Gm_m M_a}{2RT} \right] = \left[\frac{Gm_m m}{2kT} \right] = \frac{\text{J.m}}{\text{J}} = \text{m}$ donc l'expression de r^* est homogène.

AN : $c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ et $r^* = 5.35 \cdot 10^8 \text{ m}$

Q21 En remplaçant r par r^* dans Q19, et en notant que d'après l'énoncé $\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} (r = r^*) \neq 0$, on obtient $v(r^*) = \pm c$. En ne gardant que la solution positive (champ des vitesses traduisant un échappement de l'atmosphère), on a $v(r^*) = c$.

Q22 En intégrant l'équation Q19 avec la condition aux limites précédente on obtient :

$$\frac{v^2}{2c^2} - \ln \left(\frac{v}{c} \right) = 2 \left(\ln \left(\frac{r}{r^*} \right) + \frac{r^*}{r} \right) - \frac{3}{2}$$

Centrale-Supélec 2024, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 1

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; contact (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

Partie I Étude du circuit primaire

I.A - Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

Q1) La surface latérale d'un crayon vaut πdH , soit pour l'ensemble des crayons

$$S_{\text{tot}} = \pi dNH = \pi \times 9,5 \times 10^{-3} \times 41448 \times 3,66 = 4,53 \times 10^3 \text{ m}^2$$

Q2) On effectue un bilan thermique en régime stationnaire sur le volume de combustible compris entre les cylindres d'axe Oz , de rayons r et $r + dr$ de hauteur NH . En notant $\phi_{\text{cd}}(r)$ le flux conductif orienté selon les r croissants, ce volume :

— reçoit le flux $\phi_{\text{cd}}(r)$ et cède le flux $\phi_{\text{cd}}(r + dr)$ par conduction ;

— reçoit la puissance thermique $P_V dV$ générée par les désintégrations radioactives.

Le bilan s'écrit en régime stationnaire

$$0 = \frac{dU}{dt} = \phi_{\text{cd}}(r) - \phi_{\text{cd}}(r + dr) + P_V dV = -\frac{d\phi_{\text{cd}}}{dr} dr + P_V dV$$

Le volume élémentaire a pour expression

$$dV = 2\pi r dr NH$$

Les transferts sont supposés uniquement radiaux, donc la température ne dépend que de la variable r , et la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

ce qui conduit à l'expression du flux thermique à travers un cylindre d'axe Oz de rayon r

$$\phi_{\text{cd}}(r) = \iint \vec{j}_{\text{cd}} \cdot d\vec{S} = \iint -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \iint dS = -2\pi \lambda_2 NH r \frac{dT}{dr}$$

Le bilan s'écrit

$$0 = -\frac{d\phi_{\text{cd}}}{dr} dr + P_V dV = 2\pi \lambda_2 NH \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr + P_V 2\pi r dr NH$$

ce qui conduit après simplification (division par $2\pi \lambda_2 NH dr$) à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{P_V}{\lambda_2} r = 0$$
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0 ; A = \frac{P_V}{\lambda_2}$$

Q3) On intègre une première fois l'équation précédente

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{Ar^2}{2} + B ; \frac{dT}{dr} = -\frac{Ar}{2} + \frac{B}{r} = -\frac{Ar}{2} = -\frac{P_V}{2\lambda_2} r$$

où $B = 0$ pour éviter la divergence de $\frac{dT}{dr}$, donc du flux conductif en $r = 0$.

Remarque : le bilan sur un cylindre de rayon $r < R_3$, possible car P_V est uniforme conduit directement à cette forme.

Puis en intégrant une seconde fois entre R_3^- et r

$$T(r) - T(R_3^-) = T(r) - T_2 = \int_{R_3}^r -\frac{P_V}{2\lambda_2} r dr = \frac{P_V}{4\lambda_2} (R_3^2 - r^2)$$

Remarque : on vérifie la cohérence du résultat en calculant $\phi_{cd}(R_3)$ égal à la puissance totale P_1 dégagée par le combustible

$$\phi_{cd}(R_3) = -\lambda_2 \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_3} 2\pi R_3 NH = P_V \pi R_3^2 NH = P_V \mathcal{V}_{\text{combustible}} = P_1$$

Q4) *Remarque* : la notion de transfert conducto-convectif entre deux solides (le combustible et la gaine) semble étonnant. On peut supposer qu'il s'agit de modéliser une résistance de contact pour un contact non parfait.

On utilise la continuité du flux en $r = R_3$ pour l'ensemble des N crayons, égal en régime stationnaire à la puissance totale P_1 dégagée par le combustible. En utilisant la loi de Newton pour la surface latérale totale du combustible, égale à $2\pi R_3 NH$:

$$P_1 = \pi R_3 NH h_2 (T_2 - T_3) : T_3 = T_2 - \frac{P_1}{2\pi R_3 NH h_2}$$

puis en exprimant $R_3 = d/2 - e$

$$T_3 = T_2 - \frac{P_1}{\pi(d-2e)NHh_2}$$

Q5) La gaine ne contient pas de source : en régime stationnaire il y a conservation du flux, égal à P_1 . L'expression générale du flux est analogue à celle utilisé dans le combustible, en modifiant la valeur de la conductivité, ce qui conduit à l'équation

$$\phi_{cd}(R_3 < r < R_4) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr} 2\pi r NH = P_1 : \frac{dT}{dr} = \frac{-P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \frac{1}{r}$$

On intègre cette relation entre R_4^- et $R_3 < r < R_4$:

$$T(r) - T(R_4^-) = T(r) - T_4 = \int_{R_4}^r \frac{-P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \frac{dr}{r} = \frac{P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

On fait apparaître dans cette relation $S_{\text{tot}} = \pi d NH$ pour obtenir

$$T(R_3 < r < R_4) = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

Q6) Il reste à exprimer la conservation du flux à l'interface gaine-eau ($r = R_4$). De manière analogue à l'interface combustible-gaine :

$$P_1 = 2\pi R_4 N H h_3 (T_4 - T_5) = S_{\text{tot}} h_4 (T_4 - T_5)$$

$$T_4 = T_5 + \frac{P_1}{S_{\text{tot}} h_4}$$

On calcule ensuite à partir de $T_5 = 303^\circ\text{C}$:

$$T_4 = 303 + \frac{2776 \times 10^6}{4,53 \times 10^3 \times 25 \times 10^3} = 328^\circ\text{C}$$

$$T_3 = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{d}{d-2e}\right)$$

$$T_3 = 328 + \frac{2776 \times 10^6 \times 9,5 \times 10^{-3}}{2 \times 16 \times 4,53 \times 10^3} \times \ln\left(\frac{9,5}{9,5 - 2 \times 0,6}\right) = 352^\circ\text{C}$$

$$T_2 = T_3 + \frac{P_1}{\pi(d-2e)NHh_2}$$

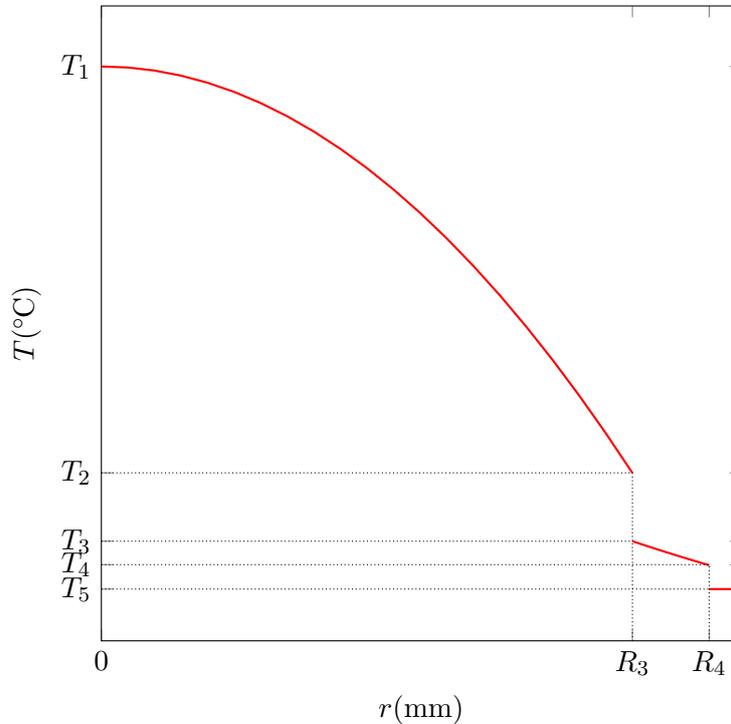
$$T_2 = 352 + \frac{2776 \times 10^6}{\pi \times (9,5 \times 10^{-3} - 2 \times 0,6 \times 10^{-3}) \times 41448 \times 3,66 \times 10 \times 10^3} = 422^\circ\text{C}$$

et finalement, au centre du combustible ($r = 0$), en utilisant $P_1 = P_V \pi R_3^2 N H$

$$T_1 = T_2 + \frac{P_V R_3^2}{4\lambda_2} = T_2 + \frac{P_1}{4\pi\lambda_2 N H}$$

$$T_1 = 422 + \frac{2776 \times 10^6}{\pi \times 4 \times 3,5 \times 41448 \times 3,66} = 838^\circ\text{C}$$

Q7) Le profil de température est le suivant



Q8) Une panne de pressurisateur entraîne une baisse de pression dans le circuit primaire, donc une baisse de température de vaporisation de l'eau, d'où un risque de vaporisation de l'eau, qui conduit à une mauvaise évacuation de la puissance dégagée par le combustible (diminution du coefficient d'échange, perturbation des pompes de circulation) et à un risque d'accident par fusion du combustible (accident de Three Miles Island).

I.B - Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Q9) On applique le premier principe pour l'écoulement stationnaire de l'eau entre z et $z + dz$, qui reçoit uniquement la puissance thermique générée par les réactions de fission :

$$D_m(h(z + dz) - h(z)) = D_m \frac{dh}{dz} dz = D_m c_5 \frac{dT}{dz} dz = \delta \mathcal{P}_{th}$$

Les transferts thermiques étant uniquement radiaux, la puissance reçue par l'eau entre z et $z + dz$ est la puissance dégagée entre les mêmes cotes par le combustible, égale à $P_V(z)dV = P_V(z)\pi R_4^2 dz$:

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} dz = P_V(z)\pi R_4^2 dz$$

soit après simplification par dz

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} = P_V(z)\pi R_4^2$$

Q10) On utilise la forme donnée de la puissance volumique $P_V(z)$ pour obtenir l'équation différentielle en $T(z)$:

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} = \pi R_4^2 P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) : \frac{dT}{dz} = \frac{\pi R_4^2 P_0}{D_m c_5} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

qui s'intègre entre les extrémités du crayon ($z = 0, T(0) = T_e$ et $z = H, T(H) = T_s$)

$$T_s - T_e = \frac{\pi R_4^2 P_0}{D_m c_5} \int_0^H \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz = \frac{R_4^2 H P_0}{D_m c_5} \left[\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]_H^0$$

$$T_s - T_e = \frac{2R_4^2 H P_0}{D_m c_5}$$

De même en intégrant entre $z = 0$ et z

$$T(z) - T_e = \frac{R_4^2 H P_0}{D_m c_5} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right) = \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$$

$$T(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$$

Q11) La continuité du flux radial à l'interface $r = R_4$ entre z et $z + dz$ s'écrit

$$P_V(z)\pi R_4^2 dz = h_{cc}(T_p(z) - T(z))2\pi R_4 dz : T_p(z) = T(z) + \frac{P_0 R_4}{2h_{cc}} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

soit, en exprimant $T(z)$ et P_0 à l'aide de la question précédente, et

$$T_p(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right) + \frac{D_m c_5 (T_s - T_e)}{4h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

d'où

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

où

$$B = -1 ; C = \frac{D_m c_5}{2h_{cc} R_4 H}$$

Q12) La puissance volumique est indépendante de r et les transferts thermiques sont supposés radiaux comme dans la première partie : on peut adapter le profil de température établi à la question Q3 :

$$T(r, z) - T_p(z) = \frac{P_V(z)}{4\lambda_2} (R_4^2 - r^2) = \frac{P_V(z) R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) = \frac{P_0 R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

On exprime $T_p(z)$ grâce à la question précédente :

$$T(r, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{P_0 R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

On utilise ici encore la relation de la question Q10 : $T_s - T_e = \frac{2R_4^2 H P_0}{D_m c_5}$ pour obtenir

$$T(r, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{D_m c_5 (T_s - T_e)}{8\lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

soit

$$\frac{T(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[\frac{C}{2} + \frac{D_m c_5}{8\lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

expression de la forme

$$\frac{T(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

avec

$$D = -1 ; E = \frac{C}{2} = \frac{D_m c_5}{4h_{cc} R_4 H} ; F = \frac{D_m c_5}{8\lambda_2 H}$$

Q13) Sur l'axe de la barre de combustible, $r = 0$ d'où

$$T_c(z) = T(0, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + 2(E + F) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

Puis en exprimant les constantes D , E et F :

$$T_c(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

Q14) On dérive l'expression précédente pour déterminer le maximum de température sur l'axe :

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_s - T_e}{2} \frac{H}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

La condition d'annulation de cette dérivée s'écrit

$$\tan\left(\frac{\pi z}{H}\right) = -\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)$$

Soit, comme $0 < z < H$

$$\frac{\pi z_{\max}}{H} = \pi - \arctan\left(\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)\right)$$

$$z_{\max} = H - \frac{H}{\pi} \arctan\left(\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)\right)$$

$$z_{\max} = 3,66 \times \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left[\left(\frac{0,3 \times 5750}{2 \times 3,66} \right) \times \left(\frac{2}{33 \times 10^4 \times 9,5 \times 10^{-3}} + \frac{1}{2 \times 3,5} \right) \right] \right) = 1,86 \text{ m}$$

Dans l'expression de la température le terme en sinus est prédominant, donc le maximum est situé pratiquement en $H/2$.

On calcule ensuite

$$T_{c, \max} = 971 \text{ }^\circ\text{C}$$

Cette température est largement inférieure à la température de fusion du combustible, mais la circulation correcte d'eau de refroidissement est nécessaire.

Q15) L'eau de refroidissement s'échauffe au fur et à mesure de son écoulement le long du crayon, ce qui tend à élever la température de la paroi avec z , tandis que la puissance à évacuer est maximale au milieu de la longueur du crayon ($z = H/2$), d'où un écart entre température de la paroi et température de l'eau maximal pour $z = H/2$. La combinaison des deux effets conduit à un maximum de température de la paroi pour $z > H/2$. Aux extrémités du crayon, la puissance à évacuer est nulle, donc la température de paroi est égale à la température de l'écoulement ($T_p(0) = 284 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_p(H) = 322 \text{ }^\circ\text{C}$)

La valeur maximale de la température de paroi est inférieure à $345 \text{ }^\circ\text{C}$, température de vaporisation de l'eau sous 155 bar, ce qui respecte un critère de sécurité, puisqu'en conditions normales de fonctionnement (pression, débit d'écoulement, puissance libérée par le combustible), l'eau de risque pas de se vaporiser au contact du crayon.

Partie II Étude du circuit secondaire

II.A - Préliminaire

Q16) En l'absence de variation d'énergie mécanique, le premier principe pour un système fermé s'écrit $dU = \delta W + \delta Q$.

À un système ouvert comprenant délimité par une surface de contrôle Σ , et présentant une entrée et une sortie, on associe entre les instants t et $t + dt$ le système fermé Σ^* formé à l'instant t du fluide contenu dans Σ et de la masse de fluide entrant dans Σ entre t et $t + dt$. À l'instant $t + dt$ il est formé du fluide contenu dans Σ et du fluide qui est sorti de Σ pendant dt .

D'après l'extensivité de l'énergie interne

$$U_{\Sigma^*}(t) = U_{\Sigma}(t) + \delta m_{\text{entrant}} u_e = U_{\Sigma}(t) + D_{me} u_e dt$$

$$U_{\Sigma^*}(t + dt) = U_{\Sigma}(t) + \delta m_{\text{sortant}} u_s = U_{\Sigma}(t + dt) + D_{ms} dt u_s$$

où $\delta m_{\text{entrant}} = D_{me} dt$ est la masse de fluide d'énergie interne u_e entrant dans Σ entre t et $t + dt$ avec le débit massique D_{me} , de même pour la masse de fluide sortant $\delta m_{\text{sortant}}$.

En régime stationnaire, la conservation de la masse implique $D_{me} = D_{ms} = D_m$, et la conservation des grandeurs dans Σ implique $U_{\Sigma}(t) = U_{\Sigma}(t + dt)$. La variation d'énergie interne du système fermé Σ^* entre t et $t + dt$ s'écrit

$$dU_{\Sigma^*} = U_{\Sigma^*}(t + dt) - U_{\Sigma^*}(t) = D_m(u_s - u_e)dt$$

Le travail des forces de pression du fluide amont et du fluide aval sur le fluide contenu dans Σ^* pendant dt s'écrit, en supposant l'écoulement unidimensionnel

$$\delta W_{\text{amont}} = p_e S_e v_e dt = \frac{p_e}{\mu_e} D_m dt ; \quad \delta W_{\text{aval}} = p_s S_s v_s dt = \frac{p_s}{\mu_s} D_m dt$$

où p_e , μ_e et s_e sont les pression, masse volumique et section de l'écoulement amont, p_s , μ_s et s_s les pressions, masse volumique et section de l'écoulement aval.

Le premier principe appliqué à Σ^* entre t et $t + dt$ s'écrit, en notant \mathcal{P}_u la puissance des forces extérieures, forces de pression amont et aval exceptées, et \mathcal{P}_{th} le flux thermique reçu

$$dU_{\Sigma^*} = D_m(u_s - u_e)dt = \left(\frac{p_e}{\mu_e} - \frac{p_s}{\mu_s} \right) D_m dt + \mathcal{P}_u dt + \mathcal{P}_{\text{th}} dt$$

soit

$$D_m \left(u_s + \frac{p_s}{\mu_s} - u_e - \frac{p_e}{\mu_e} \right) = D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{\text{th}}$$

où h désigne l'enthalpie massique.

En introduisant enfin le travail massique utile $w_u = \mathcal{P}_u / D_m$ et le transfert thermique massique $q = \mathcal{P}_{\text{th}} / D_m$, le bilan thermique s'écrit

$$h_s - h_e = w_u + q$$

II.B - Cycle de Hirn

Q17) D'après le formulaire, pour une masse quelconque d'eau liquide (phase condensée) traversant la pompe de manière isentropique

$$0 = \Delta S = C \ln \left(\frac{T_{\text{sortie}}}{T_{\text{entrée}}} \right)$$

d'où $T_{\text{sortie}} \approx T_{\text{entrée}}$ (la relation précédente donnée par l'énoncé est approchée). Comme l'écoulement est stationnaire, les températures d'entrée et de sortie sont indépendantes du temps, donc $T_1 \approx T_0$.

Comme $h_1 - h_0 = c_p(T_1 - T_0) \approx 0$ on en déduit $h_1 \approx h_0$.

D'après les relations $\Delta S = C \ln(T_f - T_i)$ pour une phase condensée et $\Delta h = c_p(T_f - T_i)$, les isentropiques du diagramme des frigoristes dans la zone liquide sont confondues avec les isothermes et avec les isenthalpes : ce sont donc des segments verticaux.

Q18) Dans le diagramme des frigoristes :

- la courbe en cloche délimite le domaine diphasique liquide-vapeur ; elle est constituée
 - de la courbe d'ébullition (partie située à basse enthalpie jusqu'au maximum qui correspond au point critique), qui correspond au liquide saturant,
 - de la courbe de rosée (partie située à haute enthalpie, depuis le point critique) qui correspond à la vapeur saturante ;
- les courbes côté vapeur qui se confondent avec les verticales à basse pression sont les isothermes (comportement du gaz parfait à basse pression, où l'enthalpie ne dépend que de la température) ;
- les courbes en pointillés tracées dans le domaine diphasique et le domaine de la vapeur, de pente positive sont les isentropiques ;
- les isobares sont les horizontales, les isenthalpes les verticales.

Le tracé du cycle est déterminé de la manière suivante :

- le point 0 est un liquide saturé à la pression $p_3 = 0,040$ bar : le point est à l'intersection de la courbe d'ébullition et de l'isobare $p = 0,040$ bar ;
- la transformation $0 \rightarrow 1$ est isentropique dans le domaine liquide jusqu'à la pression $p_2 = 85,8$ bar : elle est représentée par une verticale (Q17) jusqu'à l'intersection avec l'isobare 85,8 bar ;
- la transformation $1 \rightarrow 2'$ est isobare donc représentée par une horizontale menée depuis le point (1), avec des intersections successives avec la courbe d'ébullition (1'), la courbe de rosée (2) et l'isotherme $T_{2'} = 500$ °C (2') ;
- la détente $2' \rightarrow 3$ est isentropique, et ramène à la température $T_0 = 29$ °C, (3) étant situé dans le domaine diphasique, à l'intersection de l'isentropique menée depuis (2') et de l'isobare p_3 , puisque (T_0, p_3) correspond à un équilibre liquide-vapeur.

Q19) Pour l'état (2'), $T_{2'} = 500$ °C, $p_{2'} = p_1 = 85,8$ bar, donc d'après l'énoncé $s_{2'} = 6,68$ J · K⁻¹ · kg⁻¹. Comme la détente $2' \rightarrow 3$ est isentropique, $s_3 = s_{2'} = 6,68$ J · K⁻¹ · kg⁻¹. L'état (3) est un mélange diphasique de fraction massique en vapeur x à la pression 0,04 bar, donc on peut écrire

$$s_3 = x s_V(0,04 \text{ bar}) + (1 - x) s_L(0,04 \text{ bar})$$
$$x = \frac{s_3 - s_L(0,04 \text{ bar})}{s_V(0,04 \text{ bar}) - s_L(0,04 \text{ bar})} = \frac{6,68 - 0,42}{8,47 - 0,42} = 0,78$$

De même

$$h_3 = x h_V(0,04 \text{ bar}) + (1 - x) h_L(0,04 \text{ bar}) = 0,78 \times (2554 - 121) + 121 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$
$$x = 0,78 ; h_3 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Q20) Le travail massique utile w_u est fourni par la vapeur traversant la turbine, l'énergie massique dépensée q est fournie à l'eau sous forme de transfert thermique dans le générateur de vapeur. On peut donc définir le rendement par

$$\eta = \frac{w_u}{q}$$

Le premier principe appliqué à l'écoulement dans la turbine (transformation $2' \rightarrow 3$ supposée adiabatique, et pour laquelle le travail massique reçu par le fluide vaut $-w_u$) et dans le générateur de vapeur (transformation $1 \rightarrow 2'$ supposée sans travail échangé) s'écrit

$$-w_u = h_3 - h_{2'} ; q = h_{2'} - h_1$$

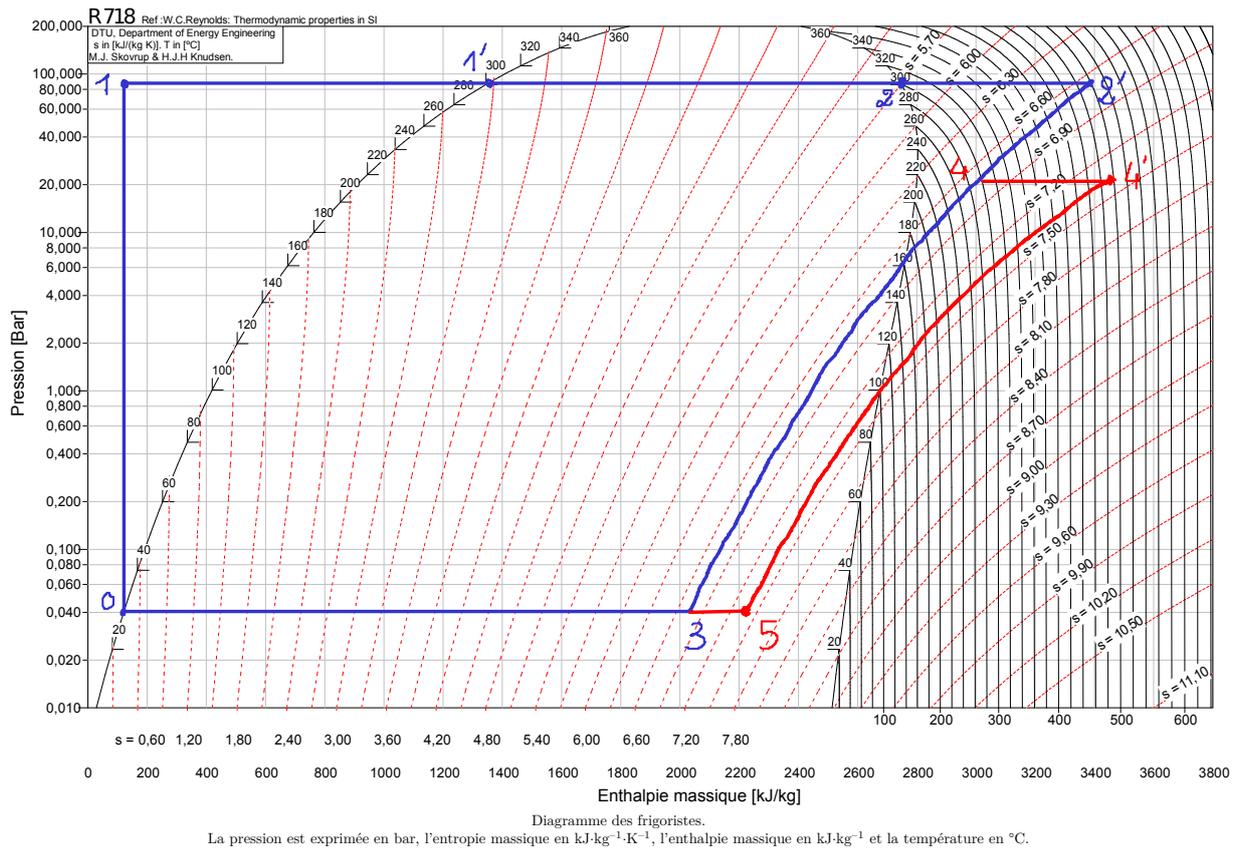


FIGURE 1 – cycles du circuit secondaire, surchauffe simple (Q18, bleu), double surchauffe (Q22, bleu et rouge)

d'où, comme la transformation $0 \rightarrow 1$ est isenthalpe (Q17), avec $h_1 = h_0 = h_L(0,04 \text{ bar}) = 121 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, et en utilisant la donnée de l'énoncé $h_{2'} = 3391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et le résultat de la question Q19 $h_3 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\eta = \frac{h_{2'} - h_3}{h_{2'} - h_1} = \frac{3391 - 2,01 \times 10^3}{3391 - 121} = 0,42$$

Q21) On écrit le premier et le second principe de la thermodynamique pour la machine réversible qui reçoit les transferts thermiques Q_C et Q_F des sources et le travail W ;

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_C + Q_F + W ; \Delta S = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créé}} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$$

On déduit du second principe la relation

$$Q_F = -\frac{T_F}{T_C} Q_C$$

L'efficacité est définie par

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Pour le fluide $T_C = T_{2'} = 500 \text{ }^\circ\text{C} = 773 \text{ K}$ et $T_F = T_0 = 29 \text{ }^\circ\text{C} = 302 \text{ K}$, soit

$$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{302}{773} = 0,61$$

$\eta < \eta_C$ car le rendement de Carnot est le rendement maximal qui puisse être obtenu pour un fluide évoluant au contact d'une source froide et d'une source chaude. L'écart s'explique par les irréversibilités du cycle réel.

II.C - Cycle à double surchauffe

Q22)

- les états 0 (liquide saturé à $T_0 = 29 \text{ }^\circ\text{C}$ donc $p_3 = 0,04 \text{ bar}$), 1, 2 (vapeur saturante à $T_2 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ donc $p_2 = 85,8 \text{ bar}$) et 2' (vapeur sèche à $T_{2'} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ et $p_2 = 85,8 \text{ bar}$) correspondant à la compression isentropique, à la génération de vapeur et à la première surchauffe sont inchangés ;
- la première détente suit l'isentropique depuis 2' jusqu'à son intersection avec l'isotherme $T_4 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$;
- la seconde surchauffe suit l'isobare horizontale depuis 4 jusqu'à son intersection avec l'isotherme $T_{4'} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$;
- la seconde détente suit l'isentropique depuis 4' jusqu'à son intersection avec la courbe de rosée ($x = 1$, état 5) ;
- cependant cette intersection ($T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $P = 1 \text{ bar}$) ne correspond ni à l'isotherme $T_0 = 29 \text{ }^\circ\text{C}$ ni à l'isobare $p_3 = 0,04 \text{ bar}$ auxquelles est censé correspondre la condensation $5 \rightarrow 0$;
- si on suppose que la détente se poursuit jusqu'à la pression p_3 l'état 5' est diphasé, avec $h_{5'} \approx 2200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, ce qui conduit à $x_{5'} = 0,91$, moins riche en liquide que le liquide obtenu avec une surchauffe simple (et valeur qui semble admise pour un fonctionnement correct d'une turbine, même si on peut difficilement dire que $x \approx 1$).

En considérant l'état 5', on lit sur le diagramme les nouvelles valeurs :

$$h_4 = 3000 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; h_{4'} = 3450 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; h_{5'} = 2200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le travail utile est récupéré sur les deux turbines supposées adiabatiques. Le travail massique reçu par la vapeur dans les turbines vaut

$$w_{2' \rightarrow 4} = h_4 - h_{2'} = 3000 - 3391 = -391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; w_{4' \rightarrow 5'} = h_{5'} - h_{4'} = 2200 - 3450 = -1250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

soit un travail massique utile

$$w_u = -(w_{2' \rightarrow 4} + w_{4' \rightarrow 5'}) = 1641 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La chaleur massique à fournir à l'eau dans le générateur de vapeur et dans les deux surchauffes sans échange de travail vaut

$$q_{1 \rightarrow 2'} = h_{2'} - h_1 = 3391 - 121 = 3270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; q_{4 \rightarrow 4'} = h_{4'} - h_4 = 3450 - 3000 = 450 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q = 3720 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit

$$\eta = \frac{1641}{3720} = 0,44$$

La double surchauffe améliore légèrement le rendement et permet d'obtenir un titre en vapeur plus élevé à la sortie de la turbine basse pression.

II.D - Cycle réel d'une tranche nucléaire

Q23) On recherche les données utiles dans le schéma et le tableau :

- L'eau du circuit secondaire reçoit de la chaleur de l'eau de refroidissement du cœur uniquement au niveau des générateurs de vapeur. D'après le tableau le débit massique de l'eau du circuit secondaire dans ces échangeurs vaut $D_{m, \text{échangeur}} = 5412,1 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$ et l'enthalpie massique varie de $h_e = 941,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ en entrée à $h_s = 2788,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ en sortie ;
- le premier principe pour l'écoulement stationnaire en terme de puissance s'écrit pour les générateurs de vapeur

$$\mathcal{P}_{\text{th, GV}} = D_m(h_s - h_e) = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} \times (2788,4 \times 10^3 - 941,7 \times 10^3) = 2,78 \times 10^9 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}_{\text{th, GV}} = 2,78 \text{ GW}$$

- Les réchauffeurs ne consomment aucune énergie extérieure, donc n'interviennent pas dans le calcul de l'efficacité ;
- En entrée de la turbine haute pression l'eau est caractérisée par un débit massique $D_{m, \text{HP}} = 5001,9 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$ et une enthalpie massique $h_e = 2787,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. La turbine haute pression présente différentes sorties : vers les réchauffeurs R_6 , R_5 et R_4 et vers le sécheur-surchauffeur (qui correspond au même état que le prélèvement vers R_4). Ces différentes sorties sont caractérisées par

sortie	R_6	R_5	R_4	sécheur-surchauffeur
$D_{m,i}(\text{t} \cdot \text{h}^{-1})$	214,3	208,4	402,1	4177,1
$h_i(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	2682,5	2622,6	2562,8	2562,8

Le premier principe pour la turbine haute pression permet de calculer la puissance utile fournie par le fluide (opposé de la puissance qu'il reçoit) :

$$\mathcal{P}_{\text{méca, HP}} = - \left(\sum_i (D_{m,i} h_{i, \text{sortie}}) - D_{m, \text{HP}} h_e \right) = 0,301 \text{ GW}$$

- On utilise la même démarche pour la turbine basse pression, alimentée par le sécheur surchauffeur ($D_{m, \text{BP}} = 3704,0 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$, $h_e = 2970,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$), et dont les sorties alimentent les réchauffeurs R3, R2, R1 et le condenseur :

sortie	R3	R2	R1	condenseur
$D_{m,i} (\text{t} \cdot \text{h}^{-1})$	281,4	235,4	134,2	3053,0
$h_i (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	2731,5	2538,9	2377,8	2242,2

$$\mathcal{P}_{\text{méca, BP}} = - \left(\sum_i (D_{m,i} h_{i, \text{sortie}}) - D_{m, \text{BP}} h_e \right) = 0,687 \text{ GW}$$

- la puissance totale fournie par les turbines vaut donc

$$\mathcal{P}_u = 0,988 \text{ GW}$$

et le rendement global vaut

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{\text{th, GV}}} = \frac{0,988}{2,78} = 0,355$$

Partie III Étude de l'alternateur

Q24) Le flux traversant la spire modélisant l'induit vaut

$$\phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = BS \cos(\omega t) ; \underline{\phi} = BS \exp(j\omega t)$$

La fém induite est calculée par la loi de Faraday

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t) ; \underline{e} = -j\omega BS \exp(j\omega t)$$

La loi des mailles appliquée à l'induit s'écrit en régime sinusoïdal établi, en notation complexe

$$(R + jL\omega)\underline{i} = \underline{e} = j\omega BS \exp(j\omega t)$$

soit

$$\underline{i} = \frac{j\omega BS \exp(j\omega t)}{R + jL\omega} = \frac{\omega BS}{|R + jL\omega|} \exp \left(j \left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \arg(R + jL\omega) \right) \right)$$

$$\underline{i} = \frac{\omega BS}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \exp \left(j \left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{L\omega}{R} \right) \right) \right)$$

ce qui conduit à l'expression en notation réelle

$$i(t) = \frac{\omega BS}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin \left(\omega t - \arctan \left(\frac{L\omega}{R} \right) \right)$$