

Correction - DS n°7 (CCINP-e3a)

PROBLÈME 1 - Quelques caractéristiques physiques de Mars (d'après CCS-TSI-2019).**II.A – Atmosphère martienne****II.A.1. Généralités**

Q19. $\boxed{PV = nRT}$, P pression en Pa, V volume en m^3 , n quantité de matière en mol, R constante des gaz parfaits et T température en K.

Q20. Par définition, $\rho = \frac{m}{V}$. On peut donc écrire : $\rho = \frac{nM}{V}$ ou encore $\boxed{\rho = \frac{PM}{RT}}$.

II.A.2. Modèle de l'atmosphère isotherme

Q21. Le bilan des forces s'écrit (principe fondamental de la statique) : $P(z).s - P(z + dz) - \rho g.s.dz = 0$ soit $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. En remplaçant ρ par son expression, on trouve : $\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT}P = 0$. On résout alors l'équation différentielle et on trouve :

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0}z\right)}$$

Q22. D'après la question précédente : $\boxed{P_0 = P_1 \exp\left(\frac{Mg_0}{RT_0}z_1\right)}$ soit numériquement : $\underline{P_0 \approx 480 \text{ Pa}}$. La pression sur Mars est donc environ 200 fois plus faible que la pression atmosphérique sur Terre.

Q23. De ce qui précède, on exprime : $\boxed{\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0}z\right)}$, avec $\boxed{\rho_0 = \frac{P_0M}{RT_0}}$. AN $\underline{\rho_0 \approx 1,19 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}}$.

Q24. Cette valeur correspond presque au double de la valeur calculée. Le modèle n'est donc pas convaincant. On peut remettre en cause le caractère isotherme de l'atmosphère et/ou le caractère uniforme du champ de pesanteur.

II.A.3. Épaisseur de l'atmosphère martienne dans le modèle de l'atmosphère isotherme

Q25. On a $\boxed{H = \frac{RT_0}{Mg_0}}$.

Q26. AN $\underline{H \approx 10,9 \text{ km}}$ et $\underline{H_{\text{Terre}} \approx 8,36 \text{ km}}$. On trouve sensiblement le même ordre de grandeur.

PROBLÈME 2 - À propos de la structure de la Terre (d'après CCS-PSI-2024).

A. Transferts thermiques dans le noyau externe

Q.28. loi de Fourier : $\vec{J} = -\lambda \text{grad} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

et $\Phi_{th}(r) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2$



Q.29. En l'absence de production et en régime stationnaire la puissance sortante en r_2 est la même que celle qui entre en r_1 :

$$\Phi_{th}(r) \Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{\Phi_{th,pz}}{\lambda 4\pi r^2} \quad \text{On intègre}$$

entre R_1 et $R_2 \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{\Phi_{th,pz}}{4\pi \lambda} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\Phi_{th,pz}}{4\pi [T_1 - T_2]} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

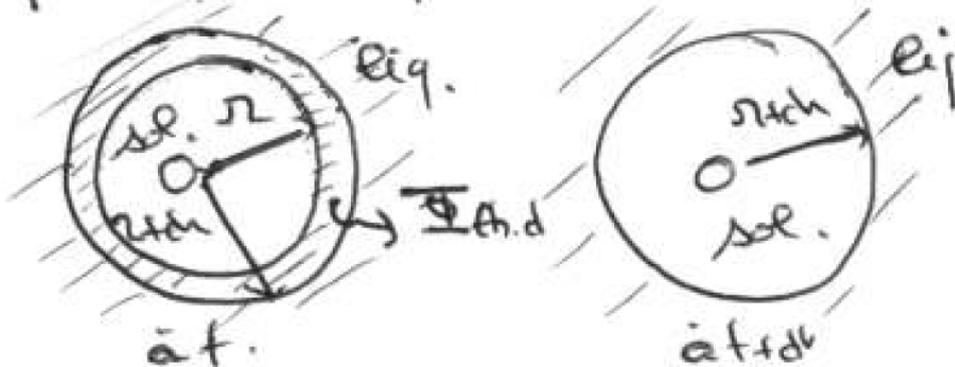
Q.30. AN $\lambda = \frac{10^{13}}{4\pi (5000 - 3800)} \left[\frac{1}{1216 \cdot 10^3} - \frac{1}{3486 \cdot 10^3} \right]$

$$\lambda = 355 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Q.31. La production étant faible, c'est ce non prise en compte de la convection qui explique un facteur 3,5.

B. Croissance de la graine

Q.32 Systeme : couronne spherique $[r, r+dr]$ qui se solidifie entre t et $t+dt$



En régime quasi-stationnaire (la croissance est très lente) l'énergie déjaigé par la solidification - en $4\pi r^2 dr \Delta_{seh}$, doit être prise en compte :

$$0 = \Phi(r).dt - \Phi(r+dr).dt - \rho_N 4\pi r^2 dr \Delta_{seh}$$

avec $\Phi_{th,d} = \Phi(r+dr) - \Phi(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \tau = - \frac{\Phi_{th,d}}{\rho_N 4\pi r^2 \Delta_{seh}} \approx - \frac{\Phi_{th,d}}{4\pi r^2 \rho_N \Delta_{seh}}}$$

$$Q33 \Delta_{seh} = - \frac{\Phi_{th,d}}{4\pi r^2 \rho_N \tau} = - \frac{10^{12}}{4\pi (1216.10^3)^2 \times 10^4 \times 9,5 \cdot 10^3}$$

$$\left(\tau = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{365 \times 24 \times 3600} = 9,5 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right) = \underline{\underline{-570 \text{ kS} \cdot \text{h}^{-1}}}$$

l'ordre de grandeur est bon, d'autant

que la valeur de $\Delta_{\text{ref}} h$ donnée par la Δ_f
est à P et T ambiantes, ce qui n'est pas le
cas en $\pi = P_1 = \dots$

PROBLÈME 3 - Optimisation du rendement de cultures maraîchères (d'après CCS-TSI-2024).

III Étude thermique de la serre

III.A – Équation de diffusion à travers une paroi latérale de la serre en polycarbonate

Q23. L'épaisseur e étant très petite devant les autres dimensions, et les températures intérieure et extérieures étant uniformes, on peut considérer, en première approximation, la plaque comme étant infiniment grande selon Oy et Oz . On a donc invariance par translation selon Oy et Oz et $T(M, t)$ ne dépend respectivement ni de y , ni de z . D'où on cherchera $T(x, t)$.

Q24. On applique le premier principe au système situé entre x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = 0 + \delta Q_{x+dx} + \delta Q_x \iff \rho S dx c(T(t+dt) - T(t)) = S(-j(x+dx) + j(x))dt$$

$$\rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -S \frac{\partial j}{\partial x} dx dt \iff \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \frac{\partial j}{\partial x}} \quad \text{CQFD}$$

Q25. Le signe (-) rend compte du fait que le flux de chaleur va des températures élevées vers les températures basses.

Q26. Ici, la loi de Fourier s'écrit simplement : $j(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

Q27. En remplaçant dans l'équation de Q24, il vient alors :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{soit la forme demandée en posant : } \boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

D s'appelle la diffusivité thermique et s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Q28. En termes d'ordres de grandeurs, on peut écrire :

$$\frac{T^*}{\tau} = \frac{DT^*}{e^2} \iff \boxed{\tau = \frac{e^2}{D} = \frac{e^2 \rho c}{\lambda}} \quad \text{AN : } \tau \approx 10^3 \text{ s}$$

III.B – Étude du régime stationnaire

Q29. En régime stationnaire, l'équation de la Q27 se simplifie et devient : $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0}$. On en déduit par intégration que

$\frac{\partial T}{\partial x} = cte = a$ puis en intégrant une seconde fois que $T(x) = ax + b$: en régime stationnaire, la température dans la paroi est une fonction affine de x . On résout alors compte tenu des conditions aux limites : $T(0) = T_i$ et $T(e) = T_e$. On trouve finalement :

$$\boxed{T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i}$$

Q30. On sait que $\phi = \iint_S j(x) d^2S = j(x)S$. Or $j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$ donc, en remplaçant, il vient :

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda S}{e} (T_i - T_e)}$$

Q31. On peut alors définir, par analogie avec la loi d'Ohm, une résistance thermique R_{th} : on a alors ϕ qui est l'analogue de i et T qui est l'analogue du potentiel V . $u = \Delta V = Ri$ est alors analogue à $T_i - T_e = R_{th}\phi$. Il suffit donc de poser :

$$\boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}}. \quad \text{Numériquement : } R_{th} = 1,6 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Q32. On a une association en série de résistances thermiques : $P_{th} = \Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{th} + R_{ec}}$. AN : $P_{th} = 5,4 \text{ kW}$. En l'absence de soleil, chauffer des serres consomme donc beaucoup d'énergie (comme en hiver où les nuits sont longues...).

IV Étude thermodynamique de la chambre froide

IV.A – Généralités

Q33. Le système doit prendre de la chaleur à la source froide extérieure (pour la refroidir). L'organe doit donc être le siège d'une transformation endothermique comme l'évaporation. C'est donc l'évaporateur qui est en contact avec la source froide.

Q34. Le système est un récepteur donc $W > 0$. Il force les échanges de chaleur à se dérouler à l'inverse du sens spontané donc il prend le chaleur à la source froide pour en donner à la source chaude soit $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$.

Q35. $e = COP = \frac{Q_f}{W}$.

Q36. Premier principe sur un cycle : $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$ d'où $e_C = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f} = -\frac{1}{\frac{Q_c}{Q_f} + 1}$. Second principe pour un cycle réversible avec des sources extérieures de températures constantes : $\Delta S = 0 = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}$ soit $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$. En remplaçant, on trouve alors :

$$e_C = COP_C = -\frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = -\frac{T_f}{T_f - T_c} \iff e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

L'efficacité de Carnot est l'efficacité maximum qu'il est possible d'atteindre avec des sources à T_f et T_c par conséquent on sait que $e \leq e_C$.

Q37. On trouve une efficacité de Carnot $e_C = 6,57$. C'est environ deux fois l'efficacité d'une installation réelle.

IV.B – Description d'un cycle

Q38. cf. document page suivante.

Q39. Le sens de parcours est antihoraire, mais lien avec mode fonctionnement ? Ce n'est pas un diagramme de Clapeyron ...

Q40. 3 : on a de la vapeur saturée ; 4 : on a du liquide saturé. Il s'agit des limites du pallier de changement d'état.

Q41. On utilise le théorème des moments : $x_v = \frac{h_6 - h_{liq}}{h_7 - h_{liq}}$ soit, numériquement : $x_v = \frac{256 - 195}{397 - 195} = 30,2\%$.

Le titre massique en vapeur au point 6 est d'environ 30%.

Q42. Le premier principe industriel s'écrit : $\Delta h + \Delta e_p + \Delta e_c = w_i + q$ soit, en négligeant les énergies potentielles et cinétiques : $\Delta h = w_i + q$.

Q43. Dans l'évaporateur, il n'y a pas de pièce mobile donc $w_{61} = 0$. On en déduit que $q_f = h_1 - h_6$ dans l'évaporateur. Numériquement : $q_f = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q44. De même, dans le condenseur on écrit : $q_c = h_5 - h_2$ et on trouve : $q_c = -186 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q45. Le compresseur est supposé adiabatique donc $q = 0$. Le premier principe aboutit donc à $w_i = h_2 - h_1$. Numériquement : $w_i = 40 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q46. On en déduit l'efficacité : $e = 3,65$.

Q47. On sait que $P_{th,f} = D_m q_f$ soit, numériquement : $P_{th,f} \approx 23,4 \text{ kW}$.

FIN

