

DS n°7 (CCINP-e3a)
(Samedi 8 mars 2025 – Durée 4 h)

PROBLÈME 1 - Quelques caractéristiques physiques de Mars

Aller sur Mars est sans nul doute l'un des plus vieux rêves de l'humanité, symbole de la conquête spatiale commencée en 1957 avec le premier vol spatial orbital Spoutnik 1. L'Homme n'a pas encore foulé le régolithe (sol martien) de la planète rouge, mais atteindre Mars est loin d'être une sinécure. En outre, la planète rouge se révèle peu hospitalière (présence de puissants oxydants rendant la vie sur la surface impossible, pression atmosphérique évanescente, température de surface plus basse que sur le continent Antarctique, ...).



Figure 1 Vue d'artiste du robot Curiosity sur Mars. NASA/JPL Caltech

II.A – Atmosphère martienne

L'atmosphère martienne est essentiellement constituée d'un mélange gazeux de dioxyde de carbone, d'argon et de diazote. On assimile ces constituants à un gaz parfait unique de masse molaire $M = 43,3 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, à la pression P et à la température T . Dans cette sous-partie II.A, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur égale à sa valeur au sol ($z = 0$) : $g_0 = 3,71 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

II.A.1) Généralités

Q 19. Rappeler l'équation des gaz parfaits. On donnera l'unité de chacune des grandeurs qui interviennent dans cette équation.

Q 20. Notons ρ la masse molaire d'un gaz parfait. Exprimer ρ en fonction de P , T , M et R (constante des gaz parfaits).

II.A.2) Modèle de l'atmosphère isotherme

On se place dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température $T = T_0 = 210$ K (T_0 est la température de surface moyenne martienne). On considère une petite colonne de gaz parfait à l'équilibre mécanique, de sections égales s comprises entre les altitudes z et $z + dz$. L'axe vertical est pris ascendant (figure 2).

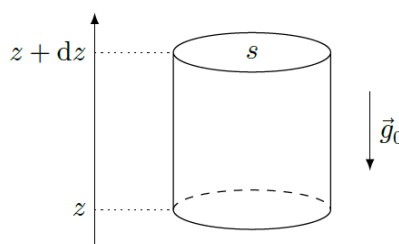


Figure 2 Petite colonne de gaz à l'équilibre mécanique

Q 21. Montrer que la pression atmosphérique P ne dépend que de z et l'exprimer en fonction de P_0 (la pression atmosphérique martienne au sol), g_0 , M , z , R et T_0 .

Q 22. Au fond du bassin d'*Hellas Planitia* (altitude $z_1 = -9,5 \times 10^3$ m), point le plus bas de la planète, la pression atmosphérique vaut $P_1 = 1,15 \times 10^3$ Pa. Calculer la valeur de la pression P_0 et la comparer à la valeur de la pression atmosphérique terrestre au niveau du sol (qu'on prendra égale à la pression standard P°).

Q 23. En déduire l'expression littérale de la masse volumique ρ de l'atmosphère martienne en fonction de P_0 , g_0 , M , z , R et T_0 . On notera ρ_0 la masse volumique au sol ($z = 0$), grandeur à exprimer en fonction de P_0 , M , R et T_0 . Calculer numériquement ρ_0 .

Dans la suite de cette partie II, nous prendrons une valeur de P_0 égale à $8,0 \times 10^2$ Pa.

Q 24. Comparer cette valeur à celle calculée à la question 22. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle pourrait-on remettre en cause pour expliquer l'écart entre les valeurs mesurée et calculée de P_0 ?

II.A.3) Épaisseur de l'atmosphère martienne dans le modèle de l'atmosphère isotherme

L'épaisseur de l'atmosphère H est définie comme l'altitude pour laquelle la pression atmosphérique vaut P_0/e avec $e = \exp(1)$ (exp désigne la fonction exponentielle).

Q 25. Exprimer H en fonction de T_0 , R , g_0 et M .

Q 26. Calculer H et comparer à l'épaisseur H_{Terre} de la troposphère sur Terre (on donne pour la Terre, $M = 28,9$ g·mol⁻¹, $T_0 = 285$ K et $g_0 = 9,81$ m·s⁻²).

Données

Constantes universelles

Constante de gravitation universelle

$$\mathcal{G} = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Données sur la planète Mars

Rayon moyen

$$R_M = 3389 \text{ km}$$

Masse

$$M_M = 6,39 \times 10^{23} \text{ kg}$$

Intensité du champ de pesanteur au sol

$$g_0 = 3,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Masse molaire de l'atmosphère

$$M = 43,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Masse volumique de l'atmosphère au sol

$$\rho_0 = 1,20 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Pression atmosphérique moyenne au sol

$$P_0 = 8,00 \times 10^2 \text{ Pa}$$

Température uniforme de l'atmosphère

$$T_0 = 210 \text{ K}$$

Durée du jour sidéral

$$T_{\text{sid}} = 8,86 \times 10^4 \text{ s} = 24 \text{ h } 37 \text{ min}$$

Durée de l'année

$$T_{\text{an}} = 669 T_{\text{sid}} = 688 \text{ jours sidéraux terrestres}$$

Mars possède quatre saisons, toutes de même durée, $T_{\text{an}}/4$.

PROBLÈME 2 - À propos de la structure de la Terre

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
 - la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide,
 - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide ;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre ;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

Le problème aborde divers phénomènes et modèles en relation avec cette structure.

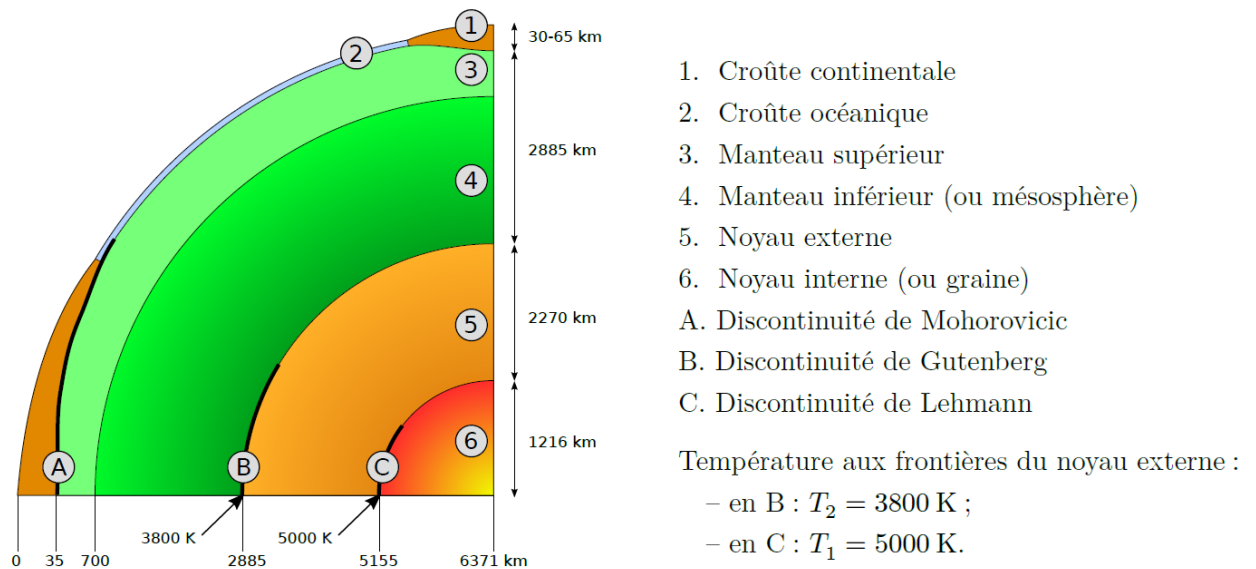


Figure 1 Structure de la Terre. D'après Wikipédia.

IV Aspects thermiques au sein du noyau de la Terre

On définit le flux géothermique moyen Φ_Q comme étant le flux thermique total issu de l'intérieur du globe terrestre à la surface de la Terre. Il est d'environ $4 \times 10^{13} \text{ W}$ et on estime qu'un quart de ce flux (soit $1 \times 10^{13} \text{ W}$) est issu du noyau terrestre (le reste étant produit essentiellement dans le manteau). Ce flux thermique issu du noyau est appelé flux thermique profond et est noté $\Phi_{th,pr}$. Il résulte de trois contributions :

- environ 90 % correspondent au flux thermique initial $\Phi_{th,i}$ ($9 \times 10^{12} \text{ W}$) : il est associé au refroidissement progressif du noyau profond qui libère sous forme thermique l'énergie (gravitationnelle et cinétique) accumulée pendant la phase d'accrétion initiale de la Terre ;
- environ 10 % correspondent au flux thermique de différenciation, noté $\Phi_{th,d}$ ($1 \times 10^{12} \text{ W}$) : c'est l'énergie libérée par la cristallisation du noyau externe liquide à l'interface avec la graine solide.
- le reste, environ 0,06 %, provient des désintégrations radioactives au sein du noyau (la teneur en éléments radioactifs y étant très faible).

L'étude dans cette partie sera intégralement effectuée en régime stationnaire de transferts thermiques.

IV.A – Transferts thermiques dans le noyau externe

Le noyau terrestre, constitué de la graine et du noyau externe, est assimilé à une masse sphérique. Le noyau externe est le siège de transferts thermiques modélisés uniquement par de la conduction thermique avec une conductivité thermique, notée λ , uniforme et constante. On pose $T(r = R_1) = T_1$ la température à la surface de la graine solide et $T(r = R_2) = T_2 < T_1$ la température à la surface supérieure du noyau externe. La figure 7 explicite les notations, en complément de la figure 1 qui intègre des données utiles.

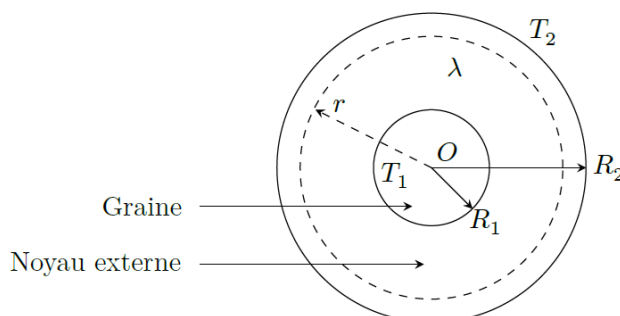


Figure 7 Schématisation du noyau terrestre.

Q 28. Exprimer le flux thermique $\Phi_{th}(r)$ traversant par conduction, dans le sens radial croissant, la sphère de centre O et de rayon $r \in [R_1, R_2]$ en fonction de λ , r et $\frac{dT}{dr}(r)$.

Q 29. Expliquer pourquoi il est raisonnable de considérer ce flux thermique indépendant de r dans le noyau externe. En déduire l'expression de la conductivité thermique λ en fonction de R_1 , R_2 , T_1 , T_2 et du flux thermique profond $\Phi_{th,pr}$.

Q 30. Estimer la valeur de la conductivité thermique λ dans ce modèle.

Des mesures sur le fer liquide et ses alliages envisagés pour la constitution du noyau externe, effectuées dans ces conditions de température et de pression élevées, fournissent des valeurs de conductivité thermique d'au plus $1 \times 10^2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q 31. Conclure à propos des mécanismes de transfert thermique réels dans le noyau externe.

IV.B – Croissance de la graine

Le noyau se refroidissant, la graine voit son rayon croître très lentement par cristallisation du liquide à sa surface.

On considère, dans le noyau externe, une pellicule sphérique d'épaisseur dr , au contact de la graine. Cette pellicule fluide a une température uniforme égale à la température du solide de la graine avec laquelle elle est en contact. Sa pression est supposée uniforme et constante de même que sa masse volumique qui sera prise égale à $\mu_N = 1 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On néglige tout mouvement convectif au cours du processus de cristallisation. À l'instant t , l'interface entre la graine et le noyau externe est repérée par $r(t) = R_1$. On suppose qu'entre t et $t + dt$, cette pellicule se cristallise, l'interface progressant ainsi, de façon homogène et isotrope, de r à $r + dr$.

On estime actuellement que le taux de croissance du rayon de la graine est $\tau = dr/dt \approx 0,3 \text{ mm/an}$.

Q 32. Montrer que le taux de croissance de la graine s'écrit

$$\tau = -\frac{\Phi_{th,d}}{4\pi R_1^2 \mu_N \Delta_{sol} h}$$

où $\Delta_{sol} h$ est l'enthalpie massique de solidification du fluide du noyau externe dans les conditions de température et de pression qui règnent à l'interface.

Q 33. En déduire une estimation de la valeur de $\Delta_{sol} h$. Discuter le résultat sachant que l'enthalpie massique de solidification du fer à température et pression ambiante est de $-270 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Formulaire et données

Formulaire

Le gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Données

Masse molaire du fer	$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire du silicium	$M_{\text{Si}} = 28 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	$M_{\text{O}} = 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Numéro atomique du fer	$Z = 26$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante universelle de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6371 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

PROBLÈME 3 - Optimisation du rendement de cultures maraîchères

Introduction

Afin d'accroître leur indépendance alimentaire du fait des conséquences liées au réchauffement climatique et des incertitudes géopolitiques, plusieurs pays ont décidé d'optimiser le rendement de leurs cultures maraîchères. Cette démarche s'inscrit dans un cercle vertueux avec pour conséquences plusieurs bénéfiques dont les principaux sont :

- sécurisation alimentaire ;
- réduction de l'impact carbone par une production locale ;
- diminution du risque sanitaire en rationalisant l'utilisation de composés chimiques (pesticides, fongicides, insecticides, engrais...).

Chaque implantation étant particulière, du fait des dimensionnements, expositions, profondeurs de captage et qualités de l'eau différentes, une installation « témoin » a été construite.

Le sujet proposé aborde quelques problèmes physico-chimiques rencontrés sur ce site.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Ce document contient également un certain nombre de valeurs numériques utiles.

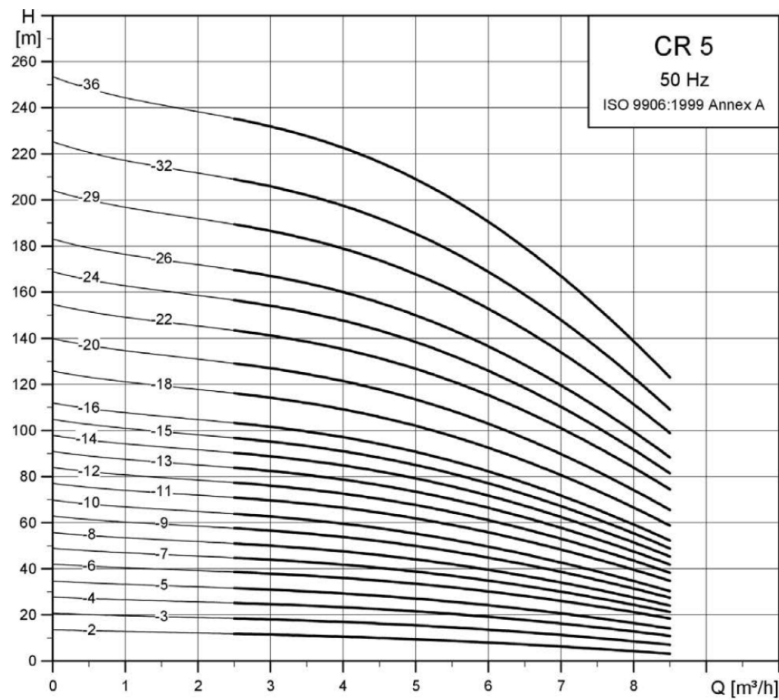


Figure 2

III Étude thermique de la serre

III.A – Équation de diffusion à travers une paroi latérale de la serre en polycarbonate

On modélise la paroi de polycarbonate par un objet parallélépipédique qui a pour dimensions $L \times l \times e$ avec $e \ll L$ et $e \ll l$ (figure 6).

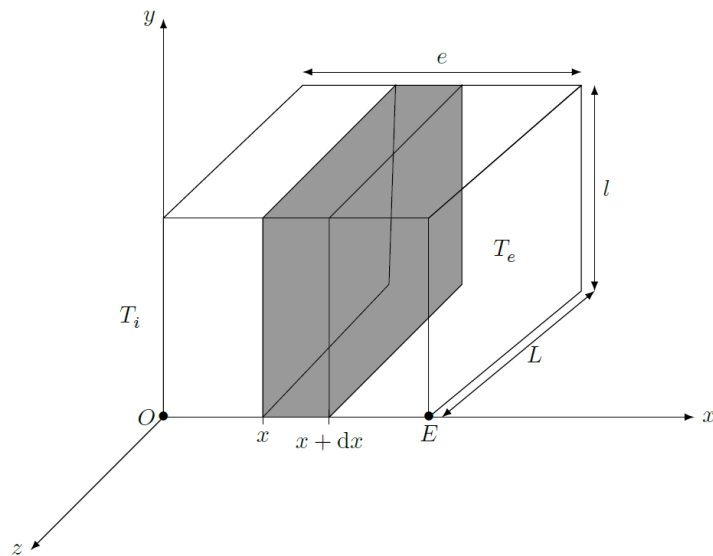


Figure 6

Le point O appartient à la face intérieure qui est à la température T_i . Le point E appartient à la face extérieure qui est à la température T_e .

L'origine de l'axe x est prise en O .

On note Σ_0 le système constitué de la tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$ de surface $S = Ll$ représentée en gris sur la figure 6.

On note :

- c , la capacité thermique massique du polycarbonate ;
- ρ , la masse volumique du polycarbonate ;

— λ , la conductivité thermique du polycarbonate ;

— $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{e}_x$, le vecteur densité de flux thermique.

Q 23. Justifier qu'on recherche un champ de température dans le parallélépipède de la forme $T(x, t)$.

Q 24. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \frac{\partial j}{\partial x}.$$

Q 25. La loi de Fourier relie la densité de flux thermique \vec{j} et le gradient de température. En notant λ la conductivité thermique du matériau, cette loi s'écrit $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$. Que traduit la présence du signe $-$ dans cette relation ?

Q 26. Écrire la relation de Fourier dans le cadre de notre étude unidimensionnelle selon l'axe (Ox) .

Q 27. En déduire l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Comment nomme-t-on la grandeur D ? En quelle unité s'exprime-t-elle ? Exprimer D en fonction de λ , ρ et c .

Q 28. Estimer le temps caractéristique τ de diffusion de la chaleur à travers la paroi de polycarbonate. Effectuer l'application numérique.

III.B – Étude du régime stationnaire

On se place désormais dans le cadre d'étude du régime stationnaire.

Q 29. Réécrire dans ce cas, l'équation de diffusion thermique et en déduire l'évolution de la température $T(x)$ dans le solide.

Q 30. Exprimer le flux thermique ϕ traversant la plaque de section S orthogonale à l'axe (Ox) orientée dans le sens des $x > 0$ en fonction de S , λ , e , T_i et T_e .

Q 31. Relier la différence de température $T_i - T_e$ au flux thermique ϕ par analogie avec la loi d'Ohm. Faire apparaître la résistance thermique du parallélépipède R_{th} et l'exprimer en fonction des données de l'énoncé. Effectuer l'application numérique de R_{th} .

Le chauffage nécessaire au maintien de la paroi à une température T_i peut être modélisé par une source idéale de courant. On appelle la résistance thermique de conduction de la paroi en polycarbonate R_{th} et la résistance conducto-convective traduisant des échanges thermiques de la paroi avec l'air extérieur R_{cc} (figure 7).

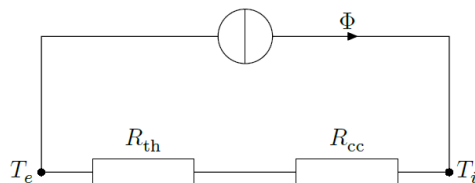


Figure 7

Q 32. Exprimer la puissance thermique P_{th} nécessaire au maintien de la paroi à une température intérieure T_i . Effectuer l'application numérique. Commenter.

IV Étude thermodynamique de la chambre froide

Le stockage des récoltes s'effectue dans une chambre froide. On se propose dans cette partie d'étudier cette machine thermique. Le fluide réfrigérant étudié est du R134a. Pour les futures constructions, le fluide sera du R1234ze pour sa moindre contribution à l'effet de serre.

IV.A – Généralités

Le fluide réfrigérant décrit le cycle thermodynamique présenté figure 8.

On modélise la machine frigorifique par une machine ditherme schématisée en figure 9.

On utilise les notations suivantes :

— Q_c : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source chaude à la température T_c ;

— Q_f : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source froide à la température T_f ;

— W : travail algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de l'extérieur.

Q 33. Au niveau de quel organe de la machine thermique se trouve la chambre froide ? Justifier votre réponse.

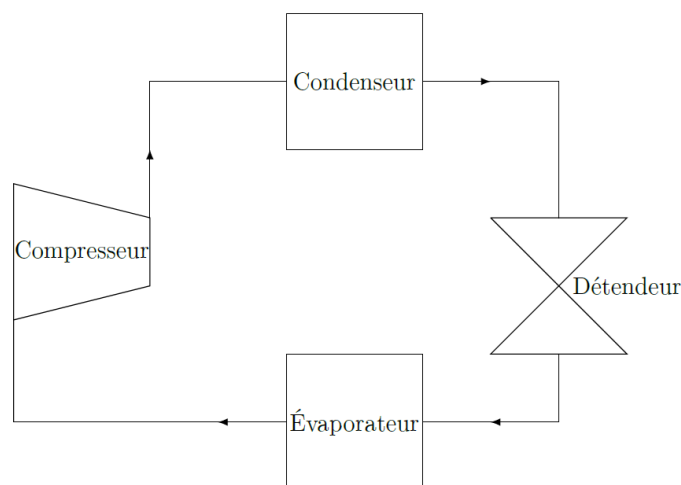


Figure 8

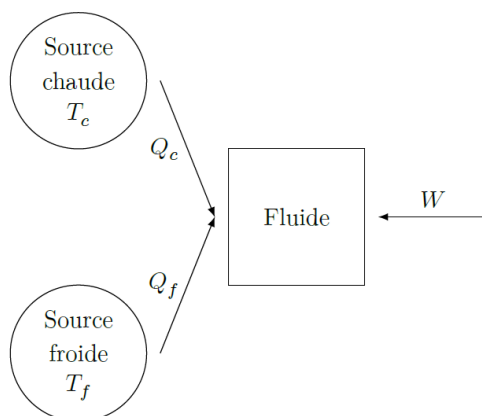


Figure 9

- Q 34.** Préciser en justifiant les signes de Q_c , Q_f et W .
- Q 35.** Définir l'efficacité e (également appelé COefficient de Performance COP) de la machine frigorifique.
- Q 36.** Établir l'expression de l'efficacité de Carnot e_c , en fonction de T_c et T_f . Que peut-on dire l'efficacité réelle e par rapport à l'efficacité de Carnot e_c ?
- Q 37.** Calculer numériquement e_c avec $T_c = 45^\circ\text{C}$ et $T_f = 3^\circ\text{C}$. Interpréter le résultat obtenu.

IV.B – Description du cycle

Le cycle comprend les successions de transformations suivantes :

- 1 \rightarrow 2 : compression adiabatique réversible en phase gazeuse dans le compresseur ;
- 2 \rightarrow 3 : refroidissement isobare de la vapeur ;
- 3 \rightarrow 4 : compression totale et isobare ;
- 4 \rightarrow 5 : sous-refroidissement isobare ;
- 5 \rightarrow 6 : détente isenthalpique ;
- 6 \rightarrow 7 : chauffage isobare ;
- 7 \rightarrow 1 : surchauffe de la vapeur.

Le tableau 2 donne le relevé thermodynamique du fluide aux différents points de ce cycle.

- Q 38.** Représenter le cycle thermodynamique sur le diagramme des frigoristes (figure A du document réponse).
- Q 39.** Relier le sens de parcours du cycle au mode de fonctionnement de la machine.
- Q 40.** Qualifier l'état du fluide aux points 3 et 4.
- Q 41.** Lire graphiquement le titre en vapeur x_v du point 6.
- Q 42.** Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire, dans lequel on néglige les variations d'énergie cinétique massique Δe_c et d'énergie potentielle de pesanteur massique Δe_p devant la variation d'enthalpie massique Δh .

Point du cycle	Pression P (bar)	Température T (°C)	Enthalpie massique h (kJ·kg ⁻¹)	Débit massique D_m (kg·s ⁻¹)
1	2,7	3,0	402	0,16
2	11,6	63,1	442	0,16
3	11,6	45,0	421	0,16
4	11,6	45,0	264	0,16
5	11,6	40,0	256	0,16
6	2,7	-2,0	256	0,16
7	2,7	-2,0	397	0,16

Tableau 2

- Q 43.** Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique q_f reçu par le fluide dans l'évaporateur.
- Q 44.** Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique q_c reçu par le fluide dans le condenseur.
- Q 45.** Exprimer puis calculer numériquement le travail indiqué w_i reçu par le fluide de la part du compresseur.
- Q 46.** En déduire l'efficacité réelle e de la machine frigorifique.
- Q 47.** Exprimer puis calculer numériquement la puissance thermique extraite de la chambre froide $P_{th,f}$.

• • • FIN • • •

Données

Données en rapport avec l'eau

Masse volumique de l'eau
Accélération de la pesanteur

$$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Données thermodynamiques à 298 K

Produit ionique de l'eau
Produit de solubilité de l'hydroxyde de manganèse
Potentiel standard du couple $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$
Potentiel standard du couple $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})}$
Potentiel standard du couple $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})}$
Potentiel standard du couple $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}$

$$K_e = 10^{-14}$$

$$K_s(\text{Mn}(\text{OH})_3) = 10^{-35,6}$$

$$E^\circ_{\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}} = 1,23 \text{ V}$$

$$E^\circ_{\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})}} = 0,00 \text{ V}$$

$$E^\circ_{\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})}} = 0,62 \text{ V}$$

$$E^\circ_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}} = 0,08 \text{ V}$$

Masses molaires

Oxygène
Tétrahydrate de chlorure de manganèse
Iodure de potassium

$$M(\text{O}) = 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{MnCl}_2, 4\text{H}_2\text{O}) = 198 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{KI}) = 166 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Données en rapport avec la serre

Épaisseur de la paroi de polycarbonate
Masse volumique du polycarbonate
Conductivité thermique du polycarbonate
Capacité thermique massique du polycarbonate
Résistance conducto-convective entre la paroi et l'air extérieur
Surface du mur
Température à l'intérieur de la serre
Température à l'extérieur de la serre

$$e = 1,0 \text{ cm}$$

$$\rho = 1,2 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$\lambda = 0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$c = 1674 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$R_{\text{cc}} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$S = 30 \text{ m}^2$$

$$T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_e = 5 \text{ }^\circ\text{C}$$

NOM :

Prénom :

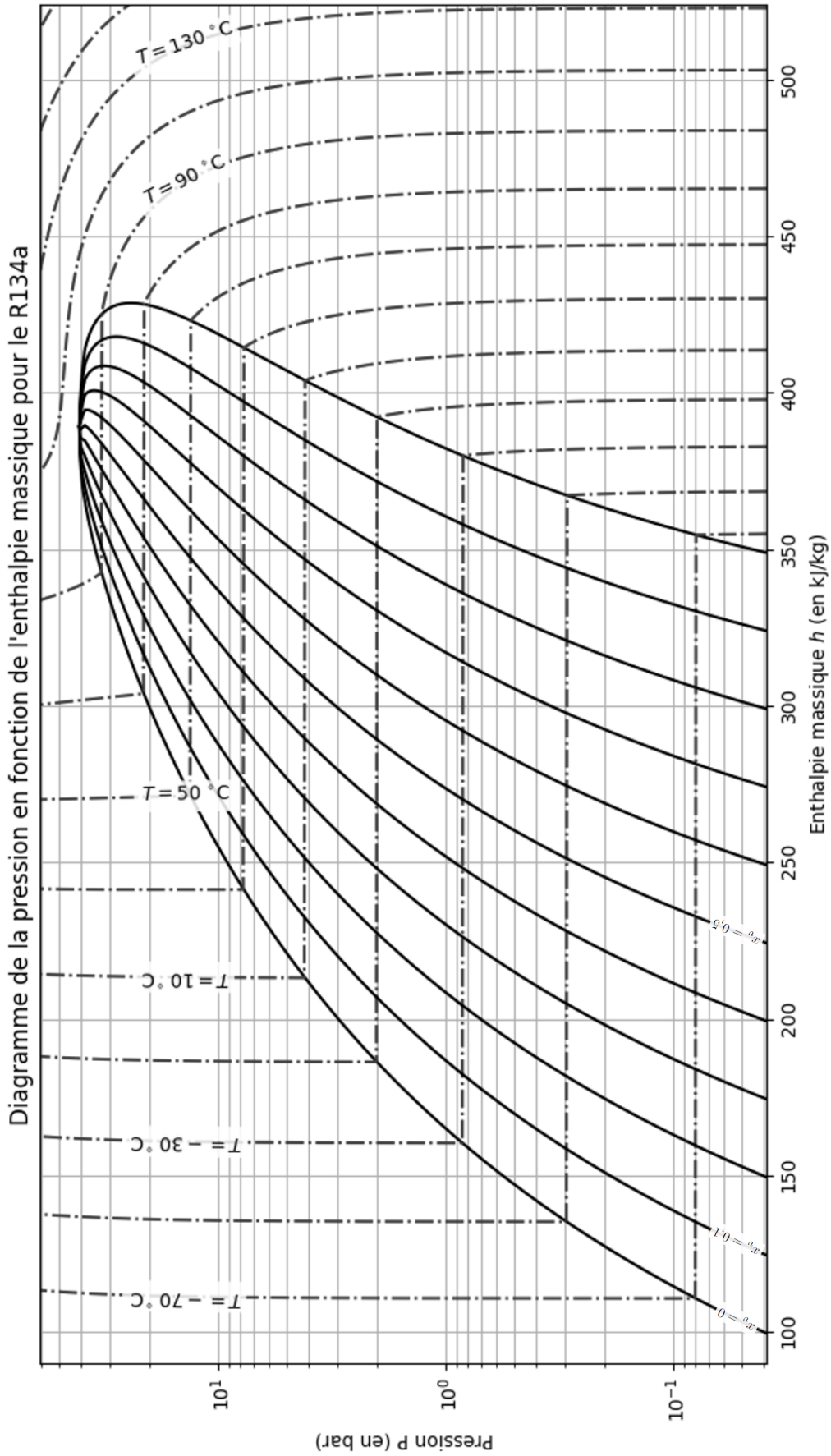


Figure A