1 Corrigé du problème 2 (Extrait Centrale MP 2018)

I. A - Une atmosphère très étendue

Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme g_s. La densité volumique de particules $n_1(z)$ à l'altitude z, mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression $n_1(z) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$ où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de pesanteur et n_0 la densité volumique de particules à l'altitude $z = 0$.

Q1 *Donner l'expression de $E_p(z)$ et en déduire que $n_1(z) = n_0 \exp(-z/H)$ où H est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de m, k_B, T et g_s.*

Dans un champ uniforme $\vec{g_s} = -g_s \vec{e}_z$ et $E_p = m g_s z$ donc :

$$n_1(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad \boxed{H = \frac{k_B T}{m g_s}}$$

Q2 *Le milieu est localement neutre et on le suppose constitué uniquement d'hydrogène totalement ionisé. Exprimer m en fonction de la masse d'un proton (m_p) et de celle d'un électron (m_e).*

La masse moyenne d'une particule est $m = \frac{m_e + m_p}{2}$ puisque le milieu, totalement isolé et neutre, contient autant de protons que d'électrons. On prendra donc :

$$\boxed{m \approx \frac{m_p}{2}}$$

dans la suite puisque $m_p \gg m_e$.

Q3 *Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude $z_2 = R_s$, où R_s est le rayon du Soleil, environ 10^3 fois plus faible qu'à l'altitude $z_1 = 0$. En déduire la valeur numérique de H, puis évaluer la température de la couronne.*

$$\frac{n_1(R_s)}{n_1(0)} = 10^{-3} = \exp\left(-\frac{R_s}{H}\right)$$

donc $H = \frac{R_s}{3\ln(10)} = 1{,}01.10^8$ m donc $T = \frac{m g_s H}{k_B} = 1{,}67.10^6$ K.

On adopte un modèle à symétrie sphérique et on néglige l'effet de rotation du soleil. La densité volumique de particules $n_2(r)$ ne dépend que de la distance r au centre du Soleil. A l'équilibre, la pression p vérifie l'équation $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\rho(r) g(r)$ où $g(r)$ désigne la norme du champ gravitationnel solaire et $\rho(r)$ la masse volumique.

Q4 *En négligeant la masse de la couronne et en supposant la distribution de masse du Soleil à symétrie sphérique, déterminer $g(r)$ pour $r \geqslant R_s$, en fonction de g_s, r et R_s.*

Pour $r \geqslant R_s$ on peut appliquer le théorème de Gauss gravitationnel à une sphère de rayon r, conduisant à :

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_s$$

indépendant de r, donc en particulier $r^2 g(r) = R_s^2 g_s$ et donc :

$$\boxed{g(r) = g_s \frac{R_s^2}{r^2}}$$

Q5 *En déduire l'expression de $n_2(r)$. On notera $n_0' = n_2(R_s)$.*

$$\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}r} + \frac{mg_s}{k_B T}\frac{R_s^2}{r^2} n_2 = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}n_2}{n_2} = -\frac{R_s^2}{H}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

qui s'intègre en :

$$\ln\left(\frac{n_2}{n_0'}\right) = \frac{R_s^2}{H}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{n_2(r) = n_0' \exp\left(\frac{R_s^2}{H}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right]\right)}$$

Q6 *Des observations ont permis de déterminer en fonction de r la densité volumique d'électrons dans la couronne (tableau 1). Vérifier la pertinence du modèle précédent à l'aide de ces données puis estimer la température de la couronne.*

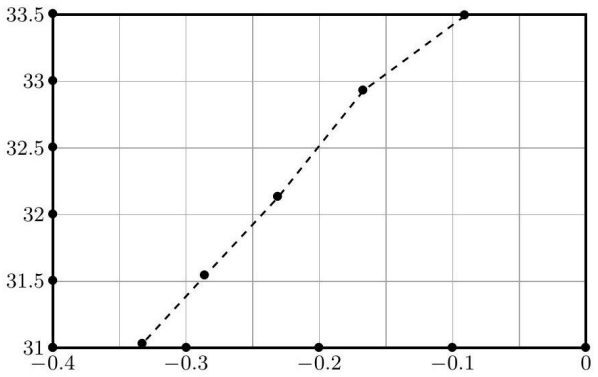
r/R_s	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$n_e\ (\mathrm{m}^{-3})$	$3,5\times10^{14}$	2×10^{14}	9×10^{13}	5×10^{13}	3×10^{13}

Tableau 1

On recopie le résultat ci-dessus sous la forme $y = \ln\left(\frac{n_2}{n_0'}\right) = \frac{R_s}{H}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ où $x = \frac{r}{R_s}$; on complète alors le tableau modifié, en remarquant que $n_2 = 2n_e$ donc $y = \ln(n_e) + \text{cte}$:

$1/x - 1$	$-0,91\cdot10^{-1}$	$-1,67\cdot10^{-1}$	$-2,31\cdot10^{-1}$	$-2,86\cdot10^{-1}$	$-3,33\cdot10^{-1}$
$\ln(n_e)$	33,49	32,93	32,13	31,54	31,03

et un tracé graphique confirme le modèle ci-dessus :



La pente de la droite tracée est $q = \frac{2,5}{0,22} \approx 11,3$ et elle s'identifie à $\frac{R_s}{H}$ donc $H \approx 6,2.10^7$ m et on en déduit la température de la couronne :

$$\boxed{T = \frac{mg_s H}{k_B} = 1,02.10^6 \text{ K}}$$

I.B - Présence de fer hautement ionisé

Le spectre de la lumière provenant de la couronne solaire inclut une raie d'émission assez intense de longueur d'onde λ_0 = 530,3 nm. Cette raie a été attribuée à l'ion Fe_{XIV}, c'est-à-dire au fer ayant perdu 14 électrons. L'énergie d'ionisation permettant de passer de Fe_{XIII} à Fe_{XIV} est E_1 = 355 eV.

Q7 *Quelle est la condition sur la longueur d'onde d'un photon incident pour qu'il puisse provoquer l'ionisation de Fe_{XIII} en Fe_{XIV} ? À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-il ?*

L'énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ du photon incident doit être supérieure à E_1 donc $\lambda < \lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = 3{,}5$ nm, longueur d'onde au delà du domaine de l'ultraviolet : ce sont des rayons X .

Le rayonnement provenant de la surface solaire est insuffisant dans ce domaine spectral. On explique l'ionisation par des chocs entre ions Fe_{XIII} et électrons libres du milieu. Chacune de ces particules est assimilée à un point matériel obéissant à la statistique classique de Maxwell-Boltzmann. En dehors des chocs, les différentes particules sont sans interaction : leur énergie mécanique se réduit donc à leur énergie cinétique.

Q8 *En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'un électron libre en fonction de la température T, ainsi que celle d'un ion Fe_{XIV}.*

Les électrons sont assimilés à des points matériels : ils se comportent donc comme un gaz monoatomique. Le théorème d'équipartition associé $\frac{1}{2}k_BT$ à chacun des trois degrés de liberté de translation donc :

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}k_BT}$$

Q9 *En considérant que l'ionisation est probable si la somme des énergies cinétiques moyennes des deux particules est supérieure à E_1, estimer la température de la couronne.*

L'énergie moyenne d'un ion Fe étant estimée elle aussi à $\frac{3}{2}k_BT$, la somme des énergies moyennes (ion + électron) vaut $3k_BT$ et la condition d'ionisation s'écrit $3k_BT > E_1$ donc $T > T_1 = \frac{E_1}{3k_B} = 1{,}4.10^6$ K.

I.C - Des raies d'émission très larges

Un ion Fe_{XIV} excité rayonne une onde électromagnétique de fréquence ν_0 dans son référentiel propre (c'est à dire celui où il est au repos). S'il a une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un observateur, ce dernier perçoit une fréquence $\nu \approx \left(1 - \frac{\vec{v}.\overrightarrow{e_x}}{c}\right)\nu_0$ où $\overrightarrow{e_x}$ désigne le vecteur unitaire de la direction observateur - source orienté dans le sens observateur vers source et désigne la célérité de la lumière dans le vide.

Q10 *Nommer l'effet décrit ci-dessus.*

Il s'agit de l'effet Doppler-Fizeau (ou effet Doppler tout court).

Le rayonnement observé dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ provient d'un grand nombre d'ions Fe_{XIV}. La probabilité pour qu'un de ces ions ait sa composante selon Ox de son vecteur vitesse comprise entre v_x et $v_x + \mathrm{d}v_x$ est donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$\delta P = C\,\exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}v_x$$

avec $\beta = \frac{1}{k_BT}$ et où C est une constante.

On note $\langle X \rangle$ la valeur moyenne (espérance) d'une grandeur X associé à un ion Fe_{XIV} donné.

Q11 *Calculer C.*

Il faut normaliser la probabilité. La probabilité pour qu'un ion ait une vitesse quelconque comprise entre $-\infty$ et $+\infty$ vaut 1. On a donc :

$$1 = C\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}v_x = C\sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}}$$

d'où :

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{m\beta}{2\pi}}}$$

Q12 *Établir la relation entre* $(\Delta\nu)^2 = \left\langle (\nu - \nu_0)^2 \right\rangle$ *et* $\langle v_x^2 \rangle$.

On a :

$$\nu - \nu_0 = -\,\nu_0\,\frac{v_x}{c} \quad \text{donc} \quad (\nu - \nu_0)^2 = \nu_0^2\,\frac{v_x^2}{c^2}$$

et donc :

$$\boxed{(\Delta\nu)^2 = \langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle = \nu_0^2\,\frac{\langle v_x^2 \rangle}{c^2}}$$

Q13 *En déduire* $\Delta\nu$ *en fonction de* m_{Fe}, T, c, k_B *et* ν_0, *puis en fonction de* m_{Fe}, T, c, k_B *et* λ_0 *longueur d'onde de l'onde de fréquence* ν_0.

On calcule :

$$\langle v_x^2 \rangle = \int v_x^2\,\delta P = C \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2\,\exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}v_x = \frac{C}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{m^3\beta^3}} = \frac{k_B T}{m}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta\nu = \nu_0\sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

puisque $\nu_0 = c/\lambda_0$ et en convenant que $m = m_{\text{Fe}}$.

Pour la raie verte de Fe_{XIV}, *centrée sur la longueur d'onde* λ_0 = *530,3 nm, on observe* $\Delta\nu \approx$ *3,20*$\times 10^{10}$ *Hz.*

Q14 *En déduire la température du milieu dans lequel cette raie se forme.*

$$\boxed{T = \frac{m}{k_B}\,(\lambda_0 \Delta\nu)^2 = 1{,}9.10^6 \text{ K}}$$

avec $m = \frac{M_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A}$.