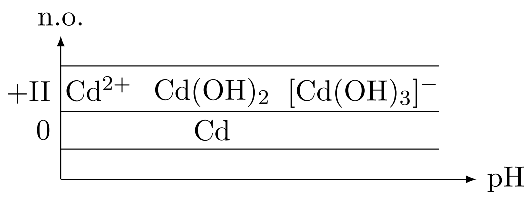
Correction DS n°8 (CCINP-e3a)

# 1 Diagramme potentiel-pH du cadmium

**1)** On commence par calculer les nombres d'oxydation de Cd dans chacune des espèces.

| Espèces | Cd | $Cd^{2+}$ | $Cd(OH)_2$ | $[Cd(OH)_3]^-$ |
|---|---|---|---|---|
| n.0. | 0 | +II | +II | +II |

On constate ensuite que $Cd(OH)_2$ contient plus de $OH^-$ que $Cd^{2+}$ et que $[Cd(OH)_3]^-$ contient plus de $OH^-$ que $Cd(OH)_2$. On en déduit la répartition suivante :




d'où : A = $Cd^{2+}$ ; B = $Cd(OH)_2$ ; C = $[Cd(OH)_3]^-$ et D = Cd

**2)** $Cd^{2+} + 2e^- = Cd$

$E = E^0 + 0{,}03 \log\left(\frac{[Cd^{2+}]}{C^0}\right)$. Sur la frontière $[Cd^{2+}] = C_{\text{tra}}$ et donc :

$$E_{\text{front}} = E^0 + 0{,}03 \log\left(\frac{C_{\text{tra}}}{C^0}\right) = -0{,}46 \text{ V} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E^0 = -0{,}40 \text{ V}}$$

**3)** $Cd(OH)_2 + OH^- = [Cd(OH)_3]^-$

$$K^0 = \frac{[\,[Cd(OH)_3]^-]}{[OH^-]} = \frac{[\,[Cd(OH)_3]^-]\,[H_3O^+]}{K_e\,(C^0)^2}$$

On se place sur la frontière verticale où pH = 11,3 donc $[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}}$ et $[Cd(OH)_3]^-]$ = $C_{\text{tra}}$. On en déduit :

$$\boxed{K^0 = 5,0}$$

**4)** Le segment 1 est la frontière entre Cd et $Cd(OH)_2$. Le demi-équation électronique de ce couple s'écrit :

$$Cd(OH)_2 + 2\,H^+ + 2e^- = Cd + 2\,H_2O$$

Nernst :

$$E = E^0 + 0{,}03 \log\left(\frac{[H^+]^2}{(C^0)^2}\right) = E^0 - 0{,}06 \text{ pH}$$

La pente de ce segment est donc de − 0,06 V/pH

**5)** Les deux droites de l'eau sont 1,23−0,06 pH et −0,06 pH. On remarque que le domaine d'existence de Cd est situé en dehors de la zone de stabilité de l'eau et donc que Cd n'est pas stable en solution aqueuse.

# 2 Appareil photographique

**1)** On utilise la relation de conjugaison de Descartes en posant $L = \overline{AO} > 0$ :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f_1} \iff \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{L}$$

d'où :

$$\overline{OA'} = \frac{f_1\, L}{L - f_1}$$

En considérant que $\overline{OA'}$ est une fonction de $L$, on peut étudier ses variations en calculant sa dérivée :

$$\frac{d\overline{OA'}}{dL} = \frac{f_1(L - f_1) - f_1 L}{(L - f_1)^2} = \frac{-f_1^2}{(L - f_1)^2} < 0$$

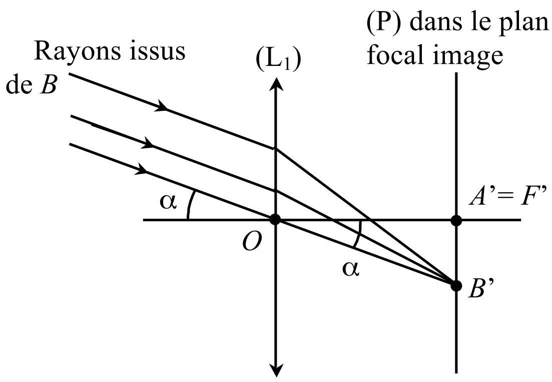
Ainsi, $\overline{OA'} = d$ est une fonction strictement décroissante de $L$ : elle est la plus grande lorsque $L = 1{,}20$ m et elle est la plus petite lorsque $L \to +\infty$, ce qui correspond à $d = f_1$ (dans ce cas l'image $A'$ est au foyer image $F'$ de la lentille mince). On aura donc [1] :

$$d_{\min} = f_1 = 50{,}0 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_{\max} = \frac{50 \text{ x } 1200}{1200 - 50} = 52{,}2 \text{ mm}$$

et donc :

$$\boxed{d \in [\,50{,}0 \text{ mm}\,;\, 52{,}2 \text{ mm}\,]}$$

**2)** Remarque : dire que l'objet $AB$ est à l'infini signifie seulement que $L >> f_1$. Dans ce cas, les rayons lumineux issus de $B$ sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle $\alpha$ par rapport à l'axe optique : après traversée de la lentille, ils convergent vers un point $B'$ situé à l'intersection du plan focal image et du rayon passant par $O$ (ceux issus de $A$ étant parallèles à l'axe optique, ils convergent vers $F'$).




Dans le triangle $OA'B'$ :

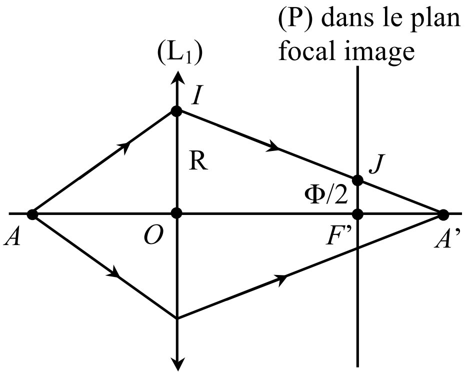
$$\tan\alpha = \frac{A'B'}{f_1} \approx \alpha$$

d'où :

$$\boxed{A'B' = f_1\, \alpha = 1{,}25 \text{ mm}}$$

**3)** a)

1. Les résultats sont donnés avec 3 chiffres significatifs, conformément à la précision des données de l'énoncé.




Les deux triangles $A'OI$ et $A'F'J$ sont semblables. On peut donc utiliser le théorème de Thales pour trouver :

$$\frac{\Phi/2}{F'A'} = \frac{R}{OA'} \quad \text{d'où} \quad \phi = 2\mathrm{R}\,\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OA'}} = 2\mathrm{R}\,\frac{\overline{OA'} - f_1}{\overline{OA'}}$$

Or, d'après la relation de conjugaison de Descartes (cf. question **1)** ) :

$$\overline{OA'} = \frac{f_1\,L}{L - f_1}$$

ce qui conduit au résultat demandé par l'énoncé après substitution et simplification :

$$\boxed{\phi = 2\mathrm{R}\,\frac{f_1}{L}}$$

**3)** b) On veut :

$$\boxed{\phi < g \quad \text{d'où} \quad L > 2\mathrm{R}\,\frac{f_1}{g} = L_{\min}}$$

**3)** c) On peut éliminer $2\mathrm{R} = f_1/\sigma$, ce qui donne :

$$L_{\min} = \frac{f_1^2}{\sigma\,g}$$

A.N. : pour $\sigma = 2{,}8$ $L_{\min} = 89$ m et pour $\sigma = 22$ $L_{\min} = 11$ m. On a donc une plage de netteté dans l'intervalle $[L_{min}; \infty]$. On voit que la profondeur de champ (revu ensuite) est plus grande si $R$ est petit, mais on perd alors en luminosité.

**3)** d) La profondeur de champ est la zone située dans l'intervalle $[L_{\min}, +\infty]$, qui donne une image acceptable sur la pellicule. Plus $L_{\min}$ est petite, plus la profondeur de champ est importante. On voit donc que plus l'ouverture $\sigma$ est grande, plus le rayon R du diaphragme est petit et meilleure est la profondeur de champ.

$g$ représente la taille du "grain" (dans un appareil photo avec une pellicule réalisée à partir d'une émulsion) ou encore la taille de la cellule élémentaire photosensible dans le cas d'un appareil numérique. Deux images ponctuelles $B$ et $B'$ formées sur le même "grain" ne seront pas séparées et seront traitées comme un seul point.

**4)** a) Le schéma de fonctionnement de l'appareil est donné ci-dessous :

$$A_\infty \xrightarrow{(\mathrm{L}_2)} F_2' \xrightarrow{(\mathrm{L}_3)} A'$$

Un point $A_\infty$ situé à l'infini sur l'axe optique a pour image par ($L_2$) le foyer image $F'_2$. Ce point sert d'objet pour ($L_3$) qui en donne une image $A'$ (où sera placée la pellicule). On écrit la relation de conjugaison de Descartes pour ($L_3$) :

$$-\frac{1}{\overline{O_3F'_2}}+\frac{1}{\overline{O_3A'}}=\frac{1}{f_3} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_3A'}=\frac{f_3\,\overline{O_3F'_2}}{\overline{O_3F'_2}+f_3}$$

et comme : $\overline{O_3F'_2}=\overline{O_3O_2}+\overline{O_2F'_2}=f_2-e$, on obtient [2] :

$$\boxed{\overline{O_3A'}=\frac{f_3\,(f_2-e)}{f_2+f_3-e}\overset{A.N.}{=}76\text{ mm}}$$

La longueur totale de l'appareil est alors :

$$\boxed{L_E=\overline{O_2A'}=\overline{O_2O_3}+\overline{O_3A'}=e+\overline{O_3A'}=107\text{ mm}}$$

**4)** b) La lentille ($L_2$) donne de l'objet $A_\infty B_\infty$ une image $A_1B_1$ située dans son plan focal image ($A_1=F'_2$) et dont la taille se calcule de la même manière qu'à la question **2)** :

$$A_1B_1=f_2\,\alpha$$

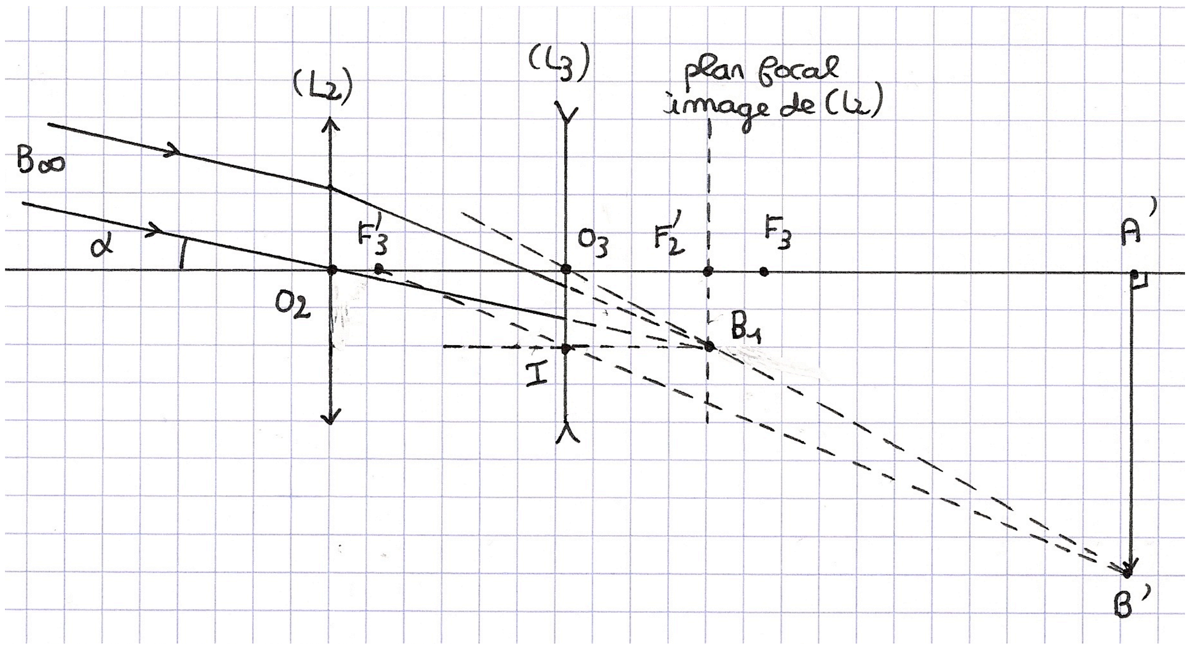
La lentille ($L_3$) donne de $A_1B_1=F'_2B_1$ une image réelle $A'B'$ dont la taille peut être calculée en utilisant le grandissement :

$$\boxed{A'B'=|\,\gamma_3\,|\,A_1B_1=\left|\frac{\overline{O_3A'}}{\overline{O_3F'_2}}\right|\,f_2\,\alpha=\frac{f_2\,f_3\,\alpha}{f_2+f_3-e}}$$

A.N. : $A'B'=5{,}0$ mm. Cette taille est plus importante que celle trouvée à la question 2, avec une seule lentille de focale $f=50$ mm. L'objet est plus grand sur la pellicule : il semble donc plus proche.

**4)** c) Voir schéma ci-dessous. La difficulté est de construire l'image de $B_1$, objet virtuel pour ($L_3$). Pour cela, on peut utiliser deux rayons particuliers : le rayon $O_3B_1$ passant par le centre optique $O_3$ de ($L_3$) non dévié et le rayon incident sur ($L_3$) parrallèle à l'axe optique dont le prolongement passe par $B_1$ (il arrive en $I$ sur la lentille) : il émerge avec un prolongement passant par $F'_3$, foyer image de ($L_3$). Les deux rayons émergents se coupent en $B'$, ce qui permet ensuite de construire $A'$.

2. Les valeurs numériques sont données avec 2 chiffres significatifs, compte-tenu des données les moins précises de l'énoncé.




Remarque : l'échelle prise est : 1 cm réel = 1 cm dessin, plus pratique. Nous remarquons que l'on retrouve bien $\overline{O_3A'} = 76$ mm, aux erreurs de construction près.

**4)** d) Avec une lentille unique de distance focale $f$ la taille de l'image sur la pellicule vaut : $A'B' = f\,\alpha$. Si on veut la même taille pour $\alpha$ donné, il faut choisir :

$$\boxed{f = \frac{f_2\,f_3}{f_2+f_3-e} \overset{AN}{=} 200 \text{ mm}}$$

Cet appareil serait environ deux fois plus encombrant ($L'_E = 200$ mm) que le téléobjectif.

# 3 Un défi métrologique : la détection des ondes gravitationnelles (d'après e3a-PC-2006)

## Première Partie : Dispositif interférentiel et méthode de détection

### A.- Interféromètre de Michelson.

#### 1. Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes

A.1*a. $\underline{s}(M,t) = a\, e^{j\omega t}\left[e^{-j\varphi_1(M)} + e^{-j\varphi_2(M)}\right].$

A.1*b $I(M) = \underline{s}\underline{s}^* = 2a^2\left(1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))\right)$ $a^2 = I_0$ éclairement d'une onde seule.

A.1*c Maximum pour $\delta\varphi(M) = 2N\pi$ Minimum pour $\delta\varphi(M) = (2N+1)\pi$

#### 2. Source monochromatique

A.2*a. Contact optique pour $\delta_0 = 0$. On peut, par exemple réaliser les anneaux délocalisés d'une source ponctuelle (laser + lentille boule) puis charioter pour faire grossir les anneaux au maximum. On peut affiner en lumière blanche, le Michelson étant réglé en coin d'air, on amène la frange centrale au centre de la figure sur l'écran.

A.2*b. $I(\delta_0) = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta_0}{\lambda}\right)$

A.2*c. $I(\delta) - I(\delta_0) = 2I_0\left(\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda} - \cos\frac{2\pi\delta_0}{\lambda}\right) = 2I_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi\delta_0}{\lambda} \times L\varepsilon\right)$

$(\Delta I)_{og} = \frac{4I_0\pi}{\lambda}L\varepsilon\sin\frac{2\pi\delta_0}{\lambda}$

A.2*d. $(\Delta I)_{og}$ maximum si $\sin\frac{2\pi\delta_0}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \delta_0 = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$

A.2*e. $\frac{(\Delta I)_{og}}{I_0} = \frac{4\pi L\varepsilon}{\lambda} \simeq 1{,}2\ 10^{-9}$

#### 3. Influence de la largeur spectrale du LASER

A.3*a. En valeur moyenne sur le temps des ondes de fréquences $\neq$ additionnent leurs intensités

$I_0 = \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} I_{0\omega}\,d\omega = K\Delta\omega.$

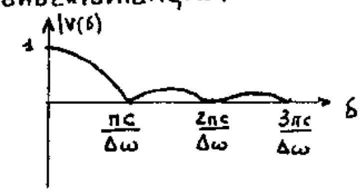
A.3*b. $dI = 2K\left(1 + \cos\frac{\delta\omega}{c}\right)d\omega = \frac{2I_0}{\Delta\omega}\left(1 + \cos\frac{\omega\delta}{c}\right)d\omega$. (erreur du texte : $\omega_0 \to \omega$)

A.3*c. $I = \frac{2I_0}{\Delta\omega}\left(\Delta\omega + \frac{c}{\delta}\left(\sin\frac{\delta}{c}\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) - \sin\frac{\delta}{c}\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\right)\right)$

$= 2I_0\left(1 + \frac{2c}{\delta\Delta\omega}\sin\frac{\delta\Delta\omega}{2c}\cos\frac{\delta\omega_0}{c}\right) \Rightarrow V(\delta) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\delta\Delta\omega}{2c}\right)$

si $\Delta\omega = 0$ $|V(\delta)| = 1$ : raie parfaitement monochromatique.

A.3*d. $|V(\delta)|$ : contraste des franges. $\left(\frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}\right)$.




A.3*e. Les maximums secondaires sont obtenus pour $\sin\frac{\delta\Delta\omega}{2c} \sim 1$ et valent $\frac{2c}{\delta\Delta\omega}$

si $\delta \gg \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \Rightarrow |V(\delta)|_{max} \ll \frac{1}{\pi}$ on ne verra plus les franges.

A.3*f. Si on admet un contraste "honorable" jusqu'à $\delta = \frac{\pi c}{2\Delta\omega}$ on aura donc $\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_0} = \frac{\pi c}{2\delta_{max}\omega_0} = \frac{\pi c\,\lambda}{2\delta_{max} 2\pi c} = \frac{\lambda}{4\delta_{max}} \simeq \frac{10^{-6}}{40} = 2{,}5\ 10^{-8}$

## B. Prise en compte des fluctuations du LASER

### 1. Influence des fluctuations de puissance.

B.1*.a. $(\Delta I)_{fluc} = 2\Delta I_0\left(1+\cos\frac{2n\delta_0}{\lambda}\right)$

B.1*.b. $(\Delta I)_{fluc}$ minimum si $\cos\frac{2n\delta_0}{\lambda} = -1$ condition en opposition avec celle d'un maximum de détection.

### 2. Dispositif de Pound. Drever. Hall.

B.2*.a $\delta = \delta_0 + L\varepsilon + 2(n_2 - n_1)e$.

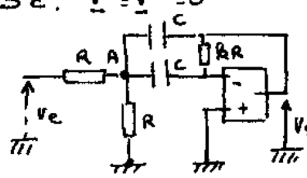
B.2*b. $\delta = \delta_0 + L\varepsilon + 2(2a_0\cos\Omega t)e \Rightarrow I = 2I_0\left(1+\cos\left(\underbrace{\frac{2n\delta_0}{\lambda}}_{\varphi_0} + \underbrace{\frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{8\pi e a_0}{\lambda}}_{2m}\cos\Omega t\right)\right)$

### 3. Filtrage du signal détecté : choix du filtre.

B3*a On doit utiliser un filtre passe bande centré sur $\Omega$ pour ne garder (si possible) que le terme dépendant de $\varepsilon$.

B3*b. pour $\Omega = 0$ C circuit ouvert $\Rightarrow V_s = 0$
$\Omega \to \infty$ C " court circuit $\Rightarrow V_s = 0$ $\Rightarrow$ passe bande !

B.3*c. $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$




$j C\omega \underline{V_A} = -\frac{\underline{V_s}}{kR}$ $\quad \frac{\underline{V_e}-\underline{V_A}}{R} = \frac{\underline{V_A}}{R} - \frac{\underline{V_s}}{kR} + (\underline{V_A} - \underline{V_s}) jC\omega$

$\rightarrow \underline{V_A} = -\frac{\underline{V_s}}{jkRC\omega}$ $\quad \underline{V_e} = +2\underline{V_A} - \frac{\underline{V_s}}{k} + jRC\omega\underline{V_A} - jRC\omega\underline{V_s}$

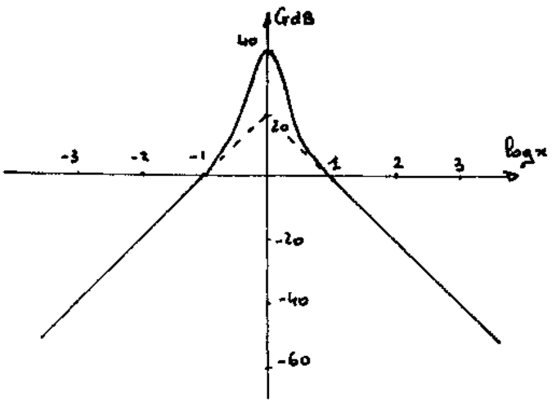
$\rightarrow \underline{V_e} = -\frac{2\underline{V_s}}{jkRC\omega} - \frac{2\underline{V_s}}{k} - jRC\omega\underline{V_s}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{-1}{\frac{2}{k} + \frac{2}{jkRC\omega} + jRC\omega} = \frac{-k/2}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{kRC\omega}{2}} \sim \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $\underline{H_0 = -\frac{k}{2}}$ $\quad \frac{Q}{\Omega_0} = \frac{kRC}{2}$ $\quad Q\Omega_0 = \frac{1}{RC}$ $\rightarrow \underline{Q^2 = \frac{k}{2}}$ et $\underline{\Omega_0 = \sqrt{\frac{2}{k}} \times \frac{1}{RC}}$

B.3*d $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$ $\quad |H_0| = Q^2 = 100$

pour $x = 1$ $\quad G_{dB_{max}} = 40$




qd $x \to 0$ $\quad G_{dB} = 40 - 20 + 20\log x$

qd $x \to \infty$ $\quad G_{dB} = 40 - 20 - 20\log x$.

B.3*e. Bande passante à $-3$dB : bande de fréquence t.q. $|H| > \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$

limites donnée par $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$

pour $+1$ : $x^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$

pour $-1$ $\quad x^- = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$

$\Delta x = x^+ - x^- = \frac{1}{Q} \longrightarrow \underline{\Delta\omega = \frac{\Omega_0}{Q}}$

B.3*f. Réglage le mieux adapté : $\Omega_0 = \Omega$.

## 4. Résultat du filtrage

B.4*a. $V_d(t) = \gamma J_0 (m^2 + 2m\alpha\mathcal{E}\cos\Omega t + m^2\cos 2\Omega t)$

le filtrage supprime la composante continue $m^2$

la composante $\Omega_0$ est multipliée par $H_0$

la composante à $2\Omega_0$ est multipliée par $\dfrac{H_0}{\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2}} \sim \dfrac{H_0}{15}$

$$\rightarrow V_s(t) = \gamma J_0 \left[2m\alpha\mathcal{E} H_0 \cos\Omega t + \frac{m^2 H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}Q\right)^2}} \cos 2\Omega t\right]$$

$$\rightarrow A_\Omega = 2\gamma J_0 H_0 m\alpha\mathcal{E} \qquad A_{2\Omega} = \frac{\gamma J_0 H_0 m^2}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}Q\right)^2}}$$

B4*b. $(\Delta V)_{fluc} = (b A_{2\Omega} + A_\Omega)\dfrac{\Delta J_0}{J_0} = \gamma H_0 m \left[\dfrac{mb}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}Q\right)^2}} + 2\alpha\mathcal{E}\right]\Delta J_0$

$(\Delta V)_{og} = A_\Omega = 2\gamma H_0 m J_0 \alpha\mathcal{E}$

B.4*c. l'idéal est de trouver un filtre qui diminue au maximum $A_{2\Omega}$

On peut diminuer $m$, mais pas trop tout de même car la réponse $A_\Omega$ est proportionnelle à $m$.

A.N. $\dfrac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}} = \dfrac{2\alpha\mathcal{E}}{\frac{mb}{15} + \underbrace{2\alpha\mathcal{E}}_{\text{negligeable}}} \dfrac{J_0}{\Delta J_0} \sim 1{,}8$ c'est detectable mais difficilement !

B4*d Un tel filtre diminue $A_{2\Omega}$. Une perte de 43dB correspond à une multiplication de $H_0$ par $10^{-43/20} = 7{,}1\,10^{-3}$. (et non $\frac{1}{15}$)

$\rightarrow \dfrac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}} = \dfrac{2\alpha\mathcal{E}}{7{,}1\,10^{-3}\,mb} \dfrac{J_0}{\Delta J_0} = 16,$ : c'est nettement mieux !