7 Lame de Mica

On éclaire une lame de mica d'indice n et d'épaisseur e grâce à une source ponctuelle S quasi-monochromatique de longueur d'onde centrale λ. On observe la lumière réfléchie dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale f'.

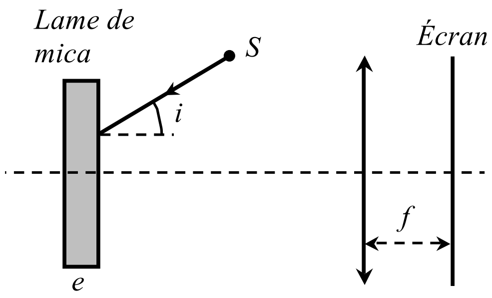


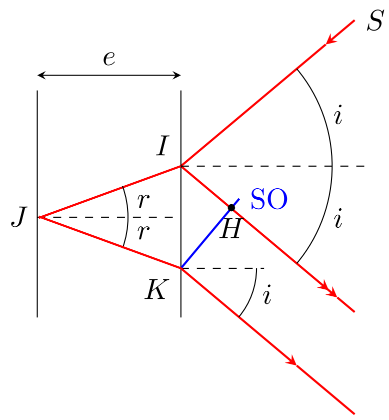
FIGURE 1 –

Données : $n = 1{,}57$; $e = 8{,}0$ mm ; $f' = 50$ cm ; $\lambda = 0{,}590$ µm

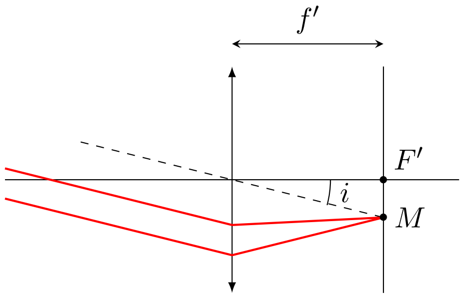
1) *Faire un schéma représentant le trajet d'un rayon lumineux arrivant sur la lame avec un angle d'incidence i et qui se divise en deux rayons : le premier se réfléchissant sur la face avant de la lame et le second se réfléchissant sur la face arrière.*

En quel point M du plan focal image de la lentille ces deux rayons vont-ils se rencontrer ?

On obtient le schéma ci-contre. Le premier rayon se réfléchit directement sur la première face de la lame (en I) ; le second rayon est réfracté en I, se réfléchit sur la seconde face de la lame en J et émerge au point K :



Selon les lois de la réflexion et de la réfraction, les deux rayons repartant de la lame sont parallèles, faisant un angle i avec la normale à la lame.



2) *Montrer que la différence de marche entre ces deux rayons s'écrit :*

$$\delta(M) = 2\,ne\cos r$$

où r est l'angle de réfraction du rayon à l'intérieur de la lame. Quel est alors le déphasage $\Delta\varphi(M)$ entre ces deux ondes ?

Plaçons une source en M est utilisons le principe du retour inverse (M se trouve alors dans le plan focal objet de la lentille) :

les rayons issus de M et ayant traversé la lentille ressortent parallèles entre eux ; les surfaces d'onde associées sont donc des plans orthogonaux à ces rayon selon le théorème de Malus.

Considérons la surface d'onde particulière passant par le point K. Elle permet de définir le point H et comme K et H appartiennent à la même SO pour l'onde issue de M nous avons : $(HM) = (KM)$.

Il s'ensuit que la différence de marche s'écrit, en désignant par n_a l'indice de l'air :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SIJKM) - (SIM)\\ &= (SI) + n\,IJ + n\,JK + (KM) - \{\,(SI) + n_a\,IH + (HM)\,\}\\ &= 2n\,IJ - n_a\,IH\end{aligned}$$

Or :

$$IJ = \frac{e}{\cos(r)} \quad \text{et} \quad IH = IK\sin(i) = 2e\tan(r)\sin(i)$$

donc :

$$\boxed{\delta(M) = \frac{2n\,e - 2n_a\,e\sin(r)\sin(i)}{\cos(r)} = \frac{2n\,e - 2n\,e\sin^2(r)}{\cos(r)} = 2ne\cos(r)}$$

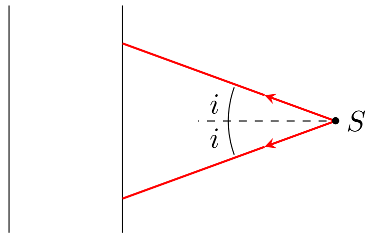
en utilisant la loi de Snell-Descartes : $n_a\sin(i) = n\sin(r)$.

Le déphasage en M est alors donné par :

$$\boxed{\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\,\delta(M) + \pi}$$

puisqu'il y a un saut de phase de π lors de la réflexion sur la face avant de la lame.

3) *On suppose $|\delta| \ll \ell_c$. Justifier que l'on observe des anneaux et calculer l'ordre d'interférence au centre (c'est à dire en F' : foyer image de la lentille). Quel sont les rayons des deux premiers anneaux brillants ?*



Les rayons issus de S et situés sur un cône d'angle i vont donner des couples de rayons qui vont converger dans le plan focal image en des points situés sur un cercle de centre F' et de rayon $R = f'\tan(i)$.

L'intensité lumineuse en chaque point de ce cercle est donnée par la formule de Fresnel (puisqu'on est dans la zone de cohérence) :

$$I(M) = 2I_0\,[\,1+\cos(\Delta\varphi(M))\,] = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi\,ne\,\cos(r)}{\lambda} + \pi\right)\right]$$

et elle est identique en chaque point de ce cercle puisque r est le même. Il s'ensuit que les franges d'interférence observées sont des **anneaux**, ou **des portions d'anneaux** si tous les rayons du cône ne peuvent pas traverser la lentille pour des raisons de disposition géométrique des différentes éléments de ce montage (lame, source S, lentille).

L'ordre d'interférence en un point M du plan focal image vaut :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{2ne\cos(r)}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

L'ordre en F' (au centre des anneaux) vaut donc ($i = 0$ donc $r = 0$) :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} \overset{AN}{=} 42576{,}77$$

Le premier anneau brillant est d'ordre $p_1 = 42576$

Le deuxième anneau brillant est d'ordre $p_2 = 42575$

Comme les angles sont petits on fait un développement limité, y compris pour la loi de Snell-Descartes : $n\sin(r) = n_a \sin(i)$ qui devient $nr = n_a i$. En appelant R_k le rayon de l'anneau brillant numéro k ($k = 1$ ou 2), il vient :

$$p_k = \frac{2ne}{\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_k = f'i = f'\,\frac{nr}{n_a}$$

d'où :

$$\boxed{R_k = f'\sqrt{\frac{n\lambda}{n_a e}}\sqrt{p_k - p_0}}$$

A.N. : $R_1 = 4{,}7$ mm et $R_2 = 7{,}2$ mm

On étudie maintenant une lame de mica beaucoup plus fine, d'épaisseur $e = 24$ µm. La source ponctuelle S émet une lumière "blanche" contenant toutes les longueurs d'ondes comprises entre $\lambda_1 = 491$ nm et $\lambda_2 = 658$ nm. On place l'ouverture d'entrée (ouverture circulaire de rayon très petit) d'un spectroscope en F', ce qui permet d'observer le spectre de la lumière réfléchie par la lame.

4) a) *Expliquer que le spectre soit cannelé, c'est-à-dire qu'il comporte des bandes sombres pour certaines longueurs d'onde. Déterminer la relation liant les longueurs d'ondes correspondant aux bandes sombres aux caractéristiques de la lame.*

En lumière blanche soit $J_S(\omega)$ la densité spectrale de la lumière émise par la source. L'intensité lumineuse en F' s'écrit :

$$I(F') = \text{Cste} \times \int_0^{+\infty} J_S(\omega)\ \left[1 + \cos(\Delta\varphi(F'))\right]\,\mathrm{d}\omega$$

La lumière en F' possède donc une densité spectrale :

$$\begin{aligned} J(F',\omega) &= \text{Cste} \times J_S(\omega)\ \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(F')}{\lambda} + \pi\right)\right] \\ &= \text{Cste} \times J_S(\omega)\ \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\delta(F')}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

avec $\delta(F') = 2ne$.

Les cannelures sombres sont les valeurs de ω (ou de λ) telles que $J(F',\omega) = 0$ et elles sont donc caractérisées par :

$$1 - \cos\left(\frac{2\pi\delta(F')}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{2ne}{\lambda} = k,\ k \in \mathbb{N}^*$$

Les longueurs d'onde "éteintes" forment donc une suite définie par :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{2ne}{m},\ m \in \mathbb{N}^*}$$

b) *Quel est le nombre de cannelures sombres observées ?*

Il faut en outre que $\lambda_m \in [491 \text{ nm}, 658 \text{ nm}]$, ce qui limite le nombre de valeurs possibles de l'entier m. En tâtonnant avec la machine à calculer on obtient :

m	114	115	116	...	153	154
λ (nm)	661	655	650	...	493	489

Les valeurs possibles de m vérifient donc $115 \leqslant m \leqslant 153$ et il y a donc $153 - 115 + 1 = 39$ cannelures sombres.