

Partie A - L'atome classique

I - Le modèle "plum pudding"

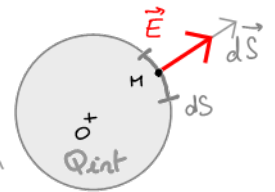
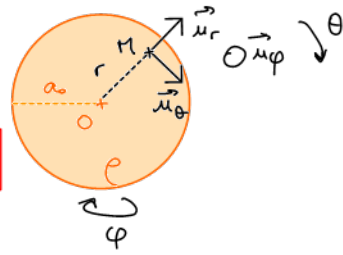
Q1 (cours) - Plans de symétrie de la distribution de charge sphérique (ρ, a_0).

$$\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \text{ et } \Pi_2 = (M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r}$$

Q2 (cours) - Invariance de la distribution de charge sphérique (ρ, a_0) par rotation

$$\text{d'angles } \theta \text{ et } \varphi \text{ autour de } O \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)}$$

Q3 (cours) - * Théorème de Gauss : $\oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
 surface fermée (vecteur sortant) charge contenue à l'intérieur de la surface (S)



$$\begin{aligned} * \text{ Ici : } & \left\{ \begin{array}{l} \text{surface de Gauss} = \text{sphère, de centre } O \text{ passant par } M \\ \oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{\theta, \varphi} E(r) \vec{u}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r = 4\pi r^2 E(r) \\ Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r \vec{u}_r} \\ & \text{où } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a_0^3} \end{aligned}$$

Q4 (cours) - $\frac{\|m_e \vec{g}\|}{\|\vec{F}_{elec}\|} = \frac{m_e g}{Q q_e r} = \frac{m_e g}{Q q_e r} \ll 1 \Leftrightarrow r \gg \frac{m_e g}{Q q_e} = \frac{10^{-30} \cdot 10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-30}}{3 \cdot 10^{-38}} \approx 99 \cdot 10^{-32}$

Or on sait désormais que le noyau a une taille $\sim 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow$ l' e^- est forcément à distance très supérieure aux 10^{-32} m trouvés ici $\Rightarrow \|m_e \vec{g}\| \ll \|\vec{F}_{elec}\|$. le poids ne joue aucun rôle dans le movt de l' e^-

Q5 (appliquée directe du cours) - THC à l' e^- (dans le réf. supposé galiléen lié au noyau): $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{elec})$
 or $\vec{M}_O(\vec{F}_{elec}) = \vec{OM} \wedge -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r \vec{u}_r = \vec{0}$ (force centrale) $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O(M) = \vec{cste} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}}$
 $\Rightarrow \forall t, (\vec{OM}, \vec{v}) \in \text{plan} \perp \vec{L}_O$ (défini par $(\vec{OM}_0, \vec{v}_0)$) $\Rightarrow (\vec{OM}, \vec{v})$ restent tjrs dans le même plan.
 le mouvement de l' e^- est donc plan.

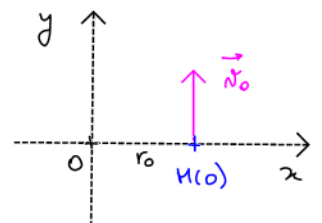
Q6 (facile) - * PFD à l' e^- (tjrs dans le même référentiel): me $\vec{a} = \vec{F}_{elec} = \frac{-q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{OM}$

* Projection sur la base cartésienne $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, en prenant $\vec{u}_z \parallel \vec{L}_O(M) = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} x \\ m \ddot{y} = -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2) \\ \dot{z} = 0; z = 0 \end{cases} \quad \text{où } \boxed{\omega_0 = \frac{q_e}{\sqrt{m_e 4\pi\epsilon_0 a_0^3}}} \end{aligned}$$

Q7 - Solutions de (1) et (2) du type: $f(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

$$\text{Si on prend } \begin{cases} x(0) = r_0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$



Alors

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(y \frac{\omega_0}{v_0}\right)^2 = 1$$

trajectoire elliptique

$$\text{tant que } r^2 = x^2 + y^2 < a_0^2$$

(c-à-d que l'e- reste dans la boule chargée ⊕)

donc mouvement périodique de pulsation ω_0

Q8 - * Énergie mécanique: $E_H = E_c + E_p^{\text{elec}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r^2$ (avec $\vec{F}_{\text{elec}} = -\text{grad } E_p^{\text{elec}}$)
 $= \frac{1}{2} m [v^2 + \omega_0^2 r^2]$ (toujours avec la m^e hypothèse: $r^2 < a_0^2$)

où $\begin{cases} v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \omega_0^2 r_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ r^2 = x^2 + y^2 = r_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow v^2 + \omega_0^2 r^2 = \omega_0^2 r_0^2 [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] + v_0^2 [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] = \omega_0^2 r_0^2 + v_0^2$

↳ $E_H = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 = \text{cte}$

* Avec au MAXIMUM, $E_H = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a_0^2$ (vitesse nulle quand $r = a_0$ donc l'e- ne sort pas de la boule)

⇒ il faut $E_H < \frac{1}{2} m \omega_0^2 a_0^2 \Leftrightarrow v_0^2 + \omega_0^2 r_0^2 < \omega_0^2 a_0^2 \Leftrightarrow v_0 < \omega_0 \sqrt{a_0^2 - r_0^2}$

Q9 - la pulsation du mot de l'e- est $\omega_0 \Rightarrow$ fréquence $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{q_e}{2\pi \sqrt{m_e 4\pi\epsilon_0 a_0^3}}$ AN: $f = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
 Une OEN à cette fréquence appartient au domaine ds UV.

II. Découverte du noyau.

Q10 - * Hypothèse: les particules α traversant la feuille de mica sont soumises à un champ élec. uniforme $\vec{E}_\perp = E_\perp \vec{u}_y$ ($\perp$ vitesse initiale $\vec{v}_0$)

* les particules sont donc déviées par la force de Lorentz: $\vec{F}_L = 2q_e \vec{E}_\perp$

(leur poids ne joue toujours aucun rôle: on peut m.q. $m_\alpha \cdot g \ll 2q_e E_\perp$)

et ressortiront en faisant un angle $\theta_f = \frac{v_{sy}}{v_{sx}}$ par rapport à leur direction d'incidence

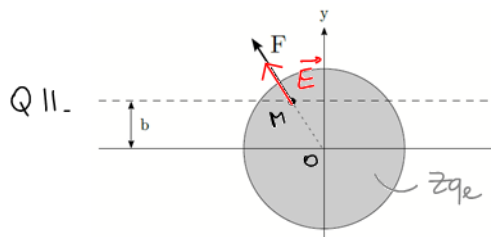
* PFD à une particule α (masse m_α): $m_\alpha \vec{a} = \vec{F}_L = 2q_e \vec{E}_\perp$

Projection selon $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$: $a_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow v_x = v_0 = \text{cte} \Rightarrow x = v_0 t \Rightarrow$ instant de sortie: $t_f = \frac{L}{v_0}$

$a_y = \ddot{y} = \frac{2q_e E_\perp}{m_\alpha} \Rightarrow v_y = \dot{y} = \frac{2q_e E_\perp}{m_\alpha} t \Rightarrow$ vitesse de sortie: $v_{ys} = \frac{2q_e E_\perp L}{m_\alpha v_0}$

↳ angle en sortie: $\theta_f = \frac{v_{ys}}{v_{xs}} = \frac{2q_e E_\perp L}{m_\alpha v_0^2} = \frac{q_e E_\perp L}{E_c} \Rightarrow E_\perp = \frac{\theta_f E_c}{q_e L} \sim \frac{2}{180} \times \pi \times \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-5}} \sim 58 \cdot 10^9 \text{ V.m}^{-1}$

On obtient donc un champ de l'ordre de $58 \cdot 10^9 \text{ V.cm}^{-1}$, conforme aux 100 millions de V par cm de Rutherford.



$\vec{F} = 2q_e \cdot \vec{E}(M) = \frac{2Ze q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{OM} = \frac{2Ze q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} x (\vec{u}_x, \vec{u}_y) \Big|_{(x,y)} = \frac{2Ze^2 b}{a_0^3} \text{ selon } \vec{u}_y$

Q12 - PFD à la particule α (1^{re} réf. du noyau d'or, galiléen): $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow$ selon $\vec{u}_y$: $\frac{dp_y}{dt} = \frac{2Ze^2 b}{a_0^3} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \Delta p_y = \frac{2Ze^2}{a_0^3} b \Delta t \quad \text{ou} \quad \Delta t \approx \frac{\Delta x}{v_0} = \frac{2\sqrt{a_0^2 - b^2}}{v_0} \Rightarrow \Delta p_y = \frac{2Ze^2}{a_0^3 v_0} 2b \sqrt{a_0^2 - b^2}$$

On cherche pour quelle valeur de b cette expression est max $\Leftrightarrow \frac{d}{db}(b \sqrt{a_0^2 - b^2}) = 0 \Rightarrow b = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$

On obtient alors
$$\Delta p_{y, \max} = \frac{2Ze^2}{a_0^3 v_0} \frac{a_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_0^2}{2}} = \frac{2Ze^2}{a_0 v_0}$$

Q13 - La déviation en sortie est donc $\delta\theta = \frac{p_{y, \text{sortie}}}{p_{x, \text{sortie}}} = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{2Ze^2}{a_0 v_0 m v_0} = \frac{Ze^2}{a_0 E}$ AN: $\delta\theta = \frac{79.1.4.10^{-9}}{10^{-10} \cdot 5.10^6} \approx 22.10^{-5} \text{ rad}$
 $= 13.10^{-3} \text{ deg}$
 $= 45''$

Q14 - le nombre d'atomes sur la trajectoire est $N \sim \frac{L}{2a_0} \sim 5.10^3 \Rightarrow \Delta\theta \sim \delta\theta \sqrt{N} \sim 1^\circ$

On ne devrait donc pas observer de déviation importante selon ce modèle!

Q15 - Collision frontale α -atome: $E_H = \text{cste} = E_c + E_p^{\text{el}}$

ou au départ, $E_p^{\text{el}} = 0 \Rightarrow E_H = E_c$

au point où la particule est la plus proche de l'atome, $E_H \approx E_p^{\text{el}} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ (car où α reste à l'ext: $E_p = \frac{1}{2} m v^2$)

Q16 $\Rightarrow E_c = \frac{2Ze^2}{r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{2Ze^2}{E_c}$ AN: $r_0 = \frac{2.79.1.6.10^{-19}}{40.10^6} \approx 5.10^{-15} \text{ m}$ tout à fait l'ordre de la taille du noyau!
 (5 fm)

III - Instabilité d'un modèle classique

Q17 - * Dans l'expression de $\vec{E}$ fournie: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{a}_\perp$ on remarque que nécessairement $\vec{a}_\perp = a_\perp \vec{u}_\theta$ (car $\vec{a}_\perp$ = projé de $\vec{a}$ dans le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ or $\vec{a} \in (0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$).

* Relation de structure pour une onde plane dans le vide: $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

avec ici $\vec{k} = k \vec{u}_r \Rightarrow \vec{B} = \frac{q a_\perp}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \frac{q a_\perp}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \vec{u}_\varphi$

Q18 (cours) - $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$: le flux de $\vec{\Pi}$ au travers d'une surface correspond à la puissance électromagnétique rayonnée à travers cette surface donc $\vec{\Pi}$ représente le vecteur densité surfacique de flux de puissance électromag.

Q19 (cours) - $P = \oint_{\text{sphère}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q^2 a_\perp^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^5} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$ ou $a_\perp = \vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = a \sin\theta$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
 $= \frac{q^2 a^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^5} \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$
 $= 4/3$

Q20 - Modèle planétaire de l'atome H: $\vec{f}_{\text{noyau} \rightarrow e} = -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ associée à $E_p = -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ($r = R = \text{cste}$)

* PFD à l' $e^- \Rightarrow m_e \vec{a} = -m_e \frac{v^2}{R} \vec{u}_r = -\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \Rightarrow n = \frac{e}{\sqrt{m_e R}}$

* D'où une énergie mécanique: $E_H = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{R} = \frac{e^2}{2R} - \frac{e^2}{R} = -\frac{e^2}{2R}$

Q21- TEM: $\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} = \mathcal{P}_{\text{nc}} = \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} \stackrel{\text{cf. Q19}}{=} \frac{q_e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ on ici l'accélération de l'e⁻ s'exprime: $a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{m R^2}$

$$= \frac{2}{3} \underbrace{\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}}_{e^2} \frac{e^4}{c^3 m^2 R^4} = \boxed{\frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3 R^4}}$$

Q22- Et par ailleurs $\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} \underset{\substack{\text{trajectoire} \\ \text{quasi-circulaire}}}{\approx} - \frac{e^2}{2R^2} \frac{dR}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dR}{dt} = - \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3 R^2}}$

Q23- On aura donc $\frac{1}{3} \underbrace{[R^3(\tau) - R^3(r=0)]}_{=0} = - \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \tau \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{e^4}}$

Q24- AN: $\tau \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ ns}$

Partie B - L'atome quantique

IV - Relations d'Heisenberg.

Q25 (cours) - $\|\psi(\vec{r})\|^2 d\tau$ représente la probabilité de trouver l'e⁻ dans un volume $d\tau$ autour de $\vec{r}$.

Condition de normalisation: $\int_{r=0}^{r_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \|\psi(\vec{r})\|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = 1$

$\Leftrightarrow |A|^2 \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 1 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{3}{4\pi r_0^3}}}$ (à une phase près: $e^{i\varphi}$, φ quelconque)

Q26 - * $\langle \vec{r} \rangle = \iiint \vec{r} \|\psi(\vec{r})\|^2 d\tau = \boxed{\vec{0}}$ (par symétrie).

* $\langle \vec{r}^2 \rangle = \iiint r^2 \|\psi(\vec{r})\|^2 d\tau = \int_0^{r_0} r^2 |A|^2 r^2 4\pi dr = 4\pi \cdot \frac{3}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{r_0^5}{5} = \boxed{\frac{3}{5} r_0^2}$

* Finalement: $\Delta r^2 = \langle \vec{r}^2 \rangle - \langle \vec{r} \rangle^2 = \frac{3}{5} r_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta r = \sqrt{\frac{3}{5}} r_0}$

Q27- Par analogie avec $\psi(\vec{r})$, $\|\chi(\vec{p})\|^2 d^3p$ représente la probabilité que l'impulsion de l'e⁻ vaille $\vec{p}$, à d^3p près ($\equiv$ soit compris entre p_x et $p_x + dp_x$; p_y et $p_y + dp_y$; p_z et $p_z + dp_z$).

Q28- De la même manière, on aura $\iiint \|\chi(\vec{p})\|^2 d^3p = 1 \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{3}{4\pi p_0^3}}}$

Et de même encore, on aura: $\langle \vec{p} \rangle = \vec{0}$

$\langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{3}{5} p_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{3}{5}} p_0}$

Q29- Inégalité de Heisenberg spatiale: $\Delta r \cdot \Delta p \underset{\substack{\geq \frac{\hbar}{2} \\ \approx \hbar}}{\geq} \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5} r_0 p_0 \geq \frac{\hbar}{2} \text{ ou } \boxed{\frac{3}{5} r_0 p_0 \gtrsim \hbar}$

Q30 (cours) - On a déjà utilisé l'expression de cette énergie potentielle: $\mathcal{E}_p = - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = - \frac{e^2}{r}$ (e⁻ dans le champ créé par le proton)

Q31- $\langle \mathcal{E}_p \rangle = \iiint \mathcal{E}_p(r) \|\psi(\vec{r})\|^2 d\tau = \int_0^{r_0} - \frac{e^2}{r} |A|^2 4\pi r^2 dr = - e^2 \cdot \frac{3}{r_0^3} \cdot \frac{r_0^2}{2} = \boxed{- \frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0}}$

$$Q32 - \langle E_c \rangle = \iiint E_c(\vec{p}) \cdot \|\chi(\vec{p})\|^2 d^3p = \frac{1}{2m_e} \int_0^{p_0} p^4 \cdot |B|^2 4\pi p^2 dp = \frac{3}{2m_e p_0^3} \frac{p_0^5}{5} = \frac{3}{10} \frac{p_0^2}{m_e}$$

$$Q33 - \langle E_H \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{3}{10m_e} \frac{\hbar^2 \left(\frac{5}{3}\right)^2}{r_0^2} - \frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0} = \frac{5}{6} \frac{\hbar^2}{m_e r_0^2} - \frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0}$$

$$Q34 - \text{Ainsi, l'énergie moyenne est minimale } (\Rightarrow \frac{d\langle E_H \rangle}{dr_0} = 0) (\Rightarrow -\frac{5}{3} \frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0^2} = 0) (\Rightarrow r_0 = \frac{10}{9} \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

conforme à $\approx \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$

$$Q35 - \text{AN: } r_0 \approx \frac{10^{-38}}{10^{-30} \cdot 1,4^2 \cdot 10^{-18}} \approx \underline{0,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \text{ ce qui correspond au rayon de l'atome H à l'état fondamental!}$$

V - L'atome quantique.

$$Q36 - m(\text{C}_3\text{H}_2) = \frac{M(\text{C}_{32}\text{H}_{18}\text{N}_8)}{N_A} = \underline{8,54 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}$$

Q37 - PFD à la particule (masse m) dans le réf. terrestre galiléen, soumise uniquement à son poids:

$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_0 = \text{cte} \Rightarrow x = v_0 t$

$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt \Rightarrow y = -\frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \text{en } \left\{ \begin{array}{l} x=D \\ t=D/v_0 \end{array} \right., \text{ on a } y = -h = -\frac{g}{2} \left(\frac{D}{v_0}\right)^2$

Q38. On a donc $v_0 = D \sqrt{\frac{g}{2|h|}}$ avec $|h|_{\text{moy}} = 200 \mu\text{m} \Rightarrow v_{0,\text{moy}} = 150,3 \text{ m.s}^{-1}$

$\frac{\Delta v_0}{v_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta |h|}{|h|} \Rightarrow \Delta v_0 = 15 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow u(v_0) = \frac{\Delta v_0}{\sqrt{3}} = 8,7 \text{ m.s}^{-1}$

$\hookrightarrow v_0 = 150,3 \pm 8,7 \text{ m.s}^{-1}$

Rq: Je ne trouve pas clair dans l'énoncé ce qui est attendu pour Δv : l'écart-type (avec le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$) ou juste la largeur de la distribution (qui serait donc 15 m.s^{-1})

Q39 - Longueur d'onde de de Broglie: $\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v_0} = 5,18 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Q40 (cours) - Condition d'interférences constructives pour des ondes diffractées par un réseau éclairé à l'incidence normale ($\theta_0 = 0$): il faut $\delta_{12} = k \lambda \ (k \in \mathbb{Z})$

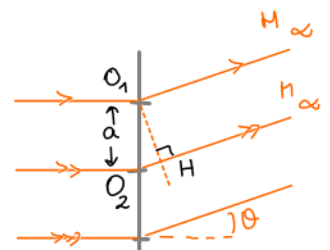
(car alors toutes les ondes seront en phase)

où $\delta_{12} = (O_2 M) - (O_1 M) = (O_2 H)$

$= a \sin \theta$

d'après le théorème de Thalès (surfaces d'ondes $\perp$ rayons lumineux) et le principe du retour inverse de la lumière ($(MO_1) = (MH)$).

$\Rightarrow$ il faut $a \sin \theta = k \lambda_{dB}$ ici ($k \in \mathbb{Z}$).



Q41 - Les molécules arrivent sur un écran placé à distance $L_2 (\gg a)$ du réseau $\Rightarrow \theta_k \approx \frac{x_k}{L_2}$

$\hookrightarrow$ interférence: $i = x_{k+1} - x_k \approx L_2 (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) = L_2 \frac{\lambda_{dB}}{a}$ AN: $i \approx 29,2 \mu\text{m}$

Si la seule source d'incertitude provient de λ_{dB} , à cause de celle sur v_0 , on aura :

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta \lambda_{dB}}{\lambda_{dB}} = \frac{\Delta v_0}{v_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta |h|}{|h|} = 10\% \Rightarrow \Delta i = 2,9 \mu\text{m} \text{ et } u(i) = \frac{\Delta i}{\sqrt{3}} = 1,7 \mu\text{m}$$

$$\hookrightarrow \underline{i = 29,2 \pm 1,7 \mu\text{m}}$$

On lit bien une interférence très légèrement inférieure à $30 \mu\text{m}$ sur la figure
(par contre la largeur des pics n'est clairement pas liée uniquement à l'incertitude sur h !)

PARTIE C - MOUVEMENT BROWNIEN

Q43 (cours) - On rencontre une équation de diffusion pour décrire

→ la conduction thermique (équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$)

→ la conduction électrique dans un milieu ohmique (Maxwell + loi d'Ohm locale $\Rightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma \vec{E}$)

→ l'évolution de la fonction d'onde d'une particule libre en mécanique quantique (Schrödinger : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$)

Q44 - Nombre de particules à l'abscisse k , à l'instant $(m+1)$:

$$u_{k,m+1} = \underbrace{p \cdot u_{k-1,m}}_{\substack{\text{particules ayant transité depuis} \\ \text{l'abscisse } k-1, \text{ pdt } \tau}} + \underbrace{p \cdot u_{k+1,m}}_{\substack{\text{idem depuis} \\ k+1}} + \underbrace{(1-2p) u_{k,m}}_{\substack{\text{particules qui n'ont pas transité et sont restées en } k}} = u_{k,m} + p [u_{k-1,m} + u_{k+1,m} - 2u_{k,m}]$$

Q45 - Par discrétisation de l'équation de diffusion fournie :

$$\begin{aligned} n(t+\tau) - n(t) &= \tau \frac{\partial n}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_{k,m+1} - n_{k,m}}{\tau} \\ \begin{cases} n(x+a) = n(x) + a \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \\ n(x-a) = n(x) - a \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{n(x+a) + n(x-a) - 2n(x)}{a^2} = \frac{n_{k+1,m} + n_{k-1,m} - 2n_{k,m}}{a^2} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \text{en divisant tout par } \tau : \frac{u_{k,m+1} - u_{k,m}}{\tau} = D \cdot \frac{1}{a^2} [u_{k+1,m} + u_{k-1,m} - 2u_{k,m}]$$

$$\Rightarrow \underline{u_{k,m+1} = u_{k,m} + \frac{D\tau}{a^2} [u_{k-1,m} + u_{k+1,m} - 2u_{k,m}]} \text{ identique à l'équation précédente si } \underline{p = \frac{D\tau}{a^2}}$$

Q46 - * En $k=0$, on la paroi : les particules qui s'y adsorbent ne se décollent jamais $\Rightarrow u_{0,m+1} = u_{0,m} + p u_{1,m}$
(et elles ne peuvent venir que de $k=1$, avec une probabilité p)

* En $k=1$, on ne peut recevoir aucune particule de $k=0$ (adsorbées pour toujours), juste de $k=2$

(avec une proba p) et celles qui sont restées en $k=1$ (proba $1-2p$) $\Rightarrow u_{1,m+1} = p u_{2,m} + (1-2p) u_{1,m}$

Q47- On constate sur le graphique que, pour $t \gg 200\tau$, on a $u_0^2 \approx \beta \cdot \frac{t}{\tau} (+\gamma)$ $\beta = \frac{30}{250} = 0,12$ graphiquement

$$\Rightarrow M_0^2 = n_0^2 \alpha^2 u_0^2(t) \approx n_0^2 \alpha^2 \beta \frac{t}{\tau} (+\gamma n_0^2 \alpha^2) \quad \text{ou} \quad \alpha^2 = \frac{D\tau}{p}$$

$$\approx n_0^2 \frac{D}{p} \beta t (+\gamma n_0^2 \frac{D\tau}{p})$$

donc $\alpha = \frac{\beta}{p}$ A.N: $\alpha \approx 1,2$ (voisin de 1, donc)

Q48- * On mesure le nombre de grains sur la surface S c'est $N(t) = S \cdot M_0(t)$

* On attend (et on constate) une loi de type linéaire en $\sqrt{t}$: $N(t) = S M_0(t) = S n_0 \sqrt{\alpha D \tau} \sqrt{t}$

Problème: la légende du graphique et les libellés des axes ne sont pas en accord!
La figure 6 donne-t-elle N^2 en fonction de t ou N en fonction de $\sqrt{t}$?!

(A) Si on suit les libellés des axes, et qu'on mesure le coefficient directeur reliant N à $\sqrt{t}$

$$b = \frac{\Delta N}{\Delta \sqrt{t}} \Rightarrow b = \frac{640}{12\sqrt{3600}} = 0,88 \mu\text{SI} \quad \text{et} \quad \boxed{D = \frac{b^2}{S^2 n_0^2 \alpha}} \quad \text{A.N: } D = 2,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(B) Si on suit le titre du graphique et qu'on mesure le coefficient directeur reliant N^2 à t^2

$$b^2 = \frac{\Delta N^2}{\Delta t} = 1,48 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad \boxed{D = \frac{b^2}{S^2 n_0^2 \alpha}} \quad \text{A.N: } D = 4,5 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Q49- * On va faire l'inverse, pour voir quelle était la bonne interprétation du graphique de la figure 6:

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r_0}} \quad \text{A.N: } D = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{donc c'est l'hypothèse (A) qui est la bonne}$$

* Avec les données issues de (A) on trouve $k_B = \frac{6\pi\eta r_0 D}{T}$ A.N: $k_B \approx 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

$$\text{et } N_A = \frac{R}{k_B} \approx \underline{7,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}$$

ce qui est remarquablement proche de la valeur de $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$!

Si ce sont réellement les résultats obtenus par Boullouin à l'époque qui sont représentés, c'est remarquable !