
CCINP 2023 - Physique

corrigé

N'hésitez pas à me contacter (yohan.poirier@ac-poitiers.fr) pour toute remarque concernant ce corrigé.

I. Gomu no jet pistol : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I.1. Oscillateur harmonique

1. La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$V'(x_{eq}) = 0$$

$$V_0 a e^{-a(x_{eq}-x_0)} (1 - e^{-a(x_{eq}-x_0)}) = 0$$

$$\boxed{x_{eq} = x_0}$$

Il s'agit nécessairement d'un minimum car $V(x) \geq 0$ et $V(x_{eq}) = 0$.

2. Avec le changement de variable proposé :

$$V(x) = V_0 (1 - e^{-a\varepsilon})^2$$

Un développement limité au second ordre en ε donne :

$$V(x) = V_0 a^2 \varepsilon^2$$

On obtient bien une énergie potentielle de la même forme que celle associée à un ressort :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2}$$

avec $\boxed{k = 2a^2 V_0}$.

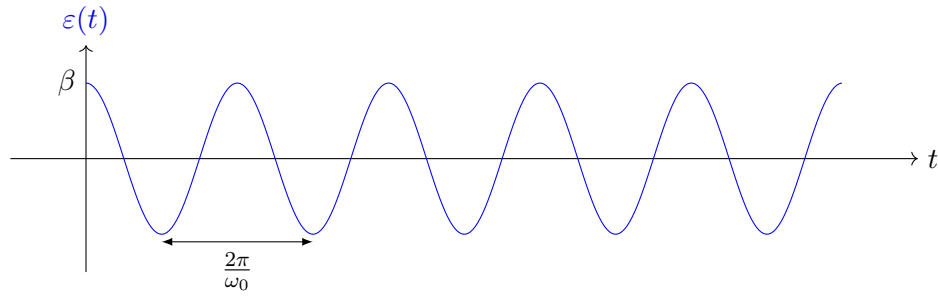
3. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la particule de masse m dans un référentiel galiléen, donne l'équation différentielle :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon = 0$$

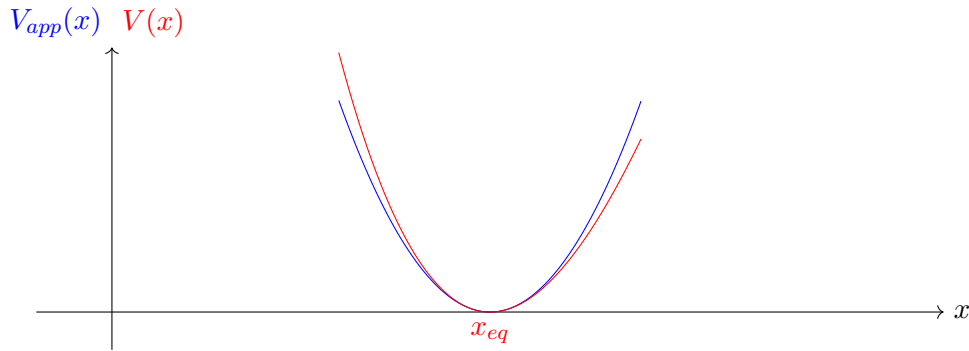
On identifie donc la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

La résolution de cette équation donne :

$$\varepsilon(t) = \beta \cos(\omega_0 t)$$



4. Dans le graphique suivant, $V(x)$ et $V_{app}(x)$ désignent respectivement le potentiel de Morse et son expression approchée.



I.2. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

5. A l'équilibre, les atomes sont séparés d'une distance a et le choix de l'origine impose $x_n(0) = 0$ donc $x_n(0) = na$. On en déduit $u_n(t) = x_n(t) - na$.
6. La masse d'indice n subit deux forces de rappel de la part :
- du ressort situé à sa gauche et de longueur $l_g = x_n(t) - x_{n-1}(t)$,
 - du ressort situé à sa droite et de longueur $l_f = x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse d'indice n dans un référentiel galiléen, donne :

$$m\ddot{x}_n(t) = -k(l_g - l_0) + k(l_d - l_0)$$

On retrouve bien la forme proposée :

$$\ddot{u}_n(t) = \frac{k}{m} [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n]$$

avec $\alpha = 2$.

7. Il s'agit bien d'une onde harmonique puisqu'elle évolue temporellement de façon sinusoïdale. U_0 représente l'amplitude de l'onde et sa pulsation.
8. La fonction $\exp(ix)$ est 2π -périodique donc la longueur d'onde doit vérifier :

$$\omega t - q(na + \lambda) = \omega t - qna + 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{q}$$

q correspond donc à la norme du vecteur d'onde.

9. En injectant la solution proposée dans l'équation différentielle obtenue précédemment on obtient :

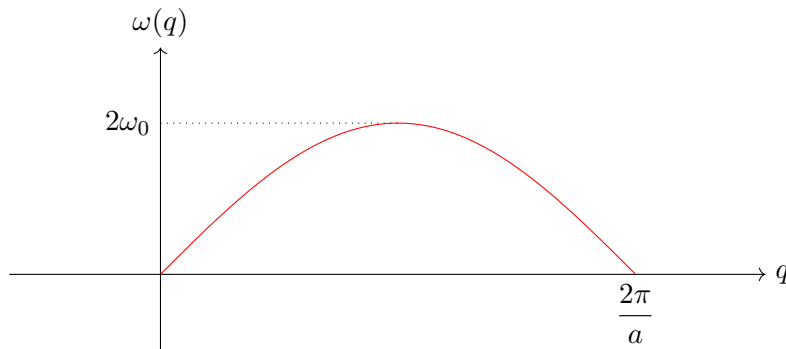
$$-\omega^2 U_0 e^{i(\omega t - qna)} = \omega_0^2 \left[U_0 e^{i(\omega t - q(n+1)a)} + U_0 e^{i(\omega t - q(n-1)a)} - 2U_0 e^{i(\omega t - qna)} \right]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 [2 - e^{iqa} - e^{-iqa}]$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 [1 - \cos(qa)]$$

Avec le formulaire de trigonométrie en fin d'énoncé, on retrouve bien l'expression demandée :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$



10. La vitesse de phase, $v_\phi = \frac{\omega}{q}$ correspond à la vitesse de propagation d'une onde monochromatique.

La vitesse de groupe, $v_g = \frac{d\omega}{dq}$ correspond à la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde quasi-monochromatique.

Graphiquement, la vitesse de groupe correspond, pour une valeur de q donnée, à la pente de la courbe en ce point. La vitesse de phase correspond à la pente que fait la droite reliant ce point à l'origine du graphique.

11. La pulsation ω et la norme du vecteur d'onde q ne sont pas proportionnels donc la vitesse de phase dépend de la pulsation : le milieu est donc dispersif.

On remarque que :

$$\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \geq 1$$

La pulsation doit donc respecter la condition :

$$\omega \leq 2\omega_0$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

12. Pour $q \ll \frac{\pi}{a}$, un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{qa}{2}$ donne :

$$\omega^2 = \omega_0^2 q^2 a^2$$

$$\omega = \omega_0 qa$$

Donc :

$$v_\phi = v_g = \omega_0 a$$

Pour les faibles pulsation, le milieu devient donc non-dispersif.

Pour $q = \frac{\pi}{a}$:

$$v_\phi = \frac{2\omega_0 a}{\pi}$$

De plus, pour cette valeur, la pulsation atteint un extremum donc :

$$v_g = 0$$

Il s'agit donc d'une onde stationnaire.

I.3. Solide cristallin

13. Le terme $-\frac{B}{x^6}$ correspond aux interactions attractives de Van der Waals prépondérantes à grande distance. Le terme $\frac{A}{x^{12}}$ correspond à des interactions répulsives entre les nuages électroniques des particules prépondérantes à courte distance.
14. Par identification

$$\begin{cases} \Theta_0 a^{12} = A \\ 2\Theta_0 a^6 = B \end{cases}$$

On retrouve donc bien la forme demandée avec :

$$\begin{cases} a = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}} \\ \Theta_0 = \frac{B}{2a^6} \end{cases}$$

15. Courbe 1 : $f_1 : \frac{x}{a} \rightarrow \frac{V(x)}{\Theta_0}$ car $f_1(1) = -1$.
 Courbe 2 : $f_2 : \frac{x}{a} \rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^{12}$ car $f_2(1) = 1$.
 Courbe 3 : $f_2 : \frac{x}{a} \rightarrow 2\left(\frac{a}{x}\right)^6$ car $f_3(1) = 2$.
16. On pose ε tel que $x = a(1 + \varepsilon)$:

$$V(\varepsilon) = \Theta_0 \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon)^{12}} - \frac{2}{(1 + \varepsilon)^6} \right]$$

Pour $\varepsilon \ll 1$, un développement limité en 0 à l'ordre 2 en ε donne :

$$V(\varepsilon) = \Theta_0 [-1 + 36\varepsilon^2]$$

$$V(x) = \frac{\Theta_0}{a^2} [-a^2 + 36(x - a)^2]$$

On obtient bien la même forme que l'énergie potentielle associée à un ressort avec, par identification :

$$k = 72 \frac{\Theta_0}{a^2}$$

17. Applications numériques :

$$k = 2,9 \times 10^1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\omega_0 = 1,7 \times 10^{13} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

18. Le déplacement, en notation réelle, s'écrit pour la masse d'indice n :

$$u_n(t) = U_0 \cos(\omega t - qna)$$

La vitesse s'écrit donc :

$$\dot{u}_n(t) = -\omega U_0 \sin(\omega t - qna)$$

Et donc l'énergie cinétique :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 U_0^2 \sin^2(\omega t - qna)$$

Soit en moyenne :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 U_0^2$$

Donc pour N atomes :

$$\langle E_{c,N} \rangle = \frac{1}{4} N m \omega^2 U_0^2$$

19. En tenant compte des ressorts de part et d'autre de l'atome, l'énergie potentielle de l'atome d'indice n s'écrit :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k (u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 + \frac{1}{2} k (u_n(t) - u_{n-1}(t))^2$$

En utilisant la notation complexe :

$$\langle (u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}((\underline{u}_{n+1}(t) - \underline{u}_n(t))(\underline{u}_{n+1}^*(t) - \underline{u}_n^*(t)))$$

$$\langle (u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{u}_{n+1}(t) - \underline{u}_n(t)|^2$$

Finalement :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k (|\underline{u}_{n+1}(t) - \underline{u}_n(t)|^2 + |\underline{u}_n(t) - \underline{u}_{n-1}(t)|^2)$$

L'expression proposée par l'énoncé comporte donc deux erreurs :

- une erreur de signe,
- u_{n-1} au lieu de $\underline{u}_{n-1}$.

Par exemple, pour $q = \frac{\pi}{a}$, l'expression proposée donne une énergie potentielle nulle en moyenne, ce qui n'est pas cohérent avec les résultats qui suivent.

20. Avec la forme de l'onde :

$$|\underline{u}_{n+1}(t) - \underline{u}_n(t)| = U_0 |e^{i(\omega t - q(n+1)a)} - e^{i(\omega t - qna)}| = U_0 |e^{i(\omega t - qa(n + \frac{1}{2}))}| |e^{-iq\frac{a}{2}} - e^{+iq\frac{a}{2}}|$$

$$|\underline{u}_{n+1}(t) - \underline{u}_n(t)| = 2U_0 \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|$$

Donc :

$$\langle E_p \rangle = 2kU_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

Avec la relation de dispersion :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 U_0^2$$

21. On en déduit l'énergie interne du cristal :

$$U = \frac{N}{2} \langle E_p \rangle + N \langle E_c \rangle$$

$$U = \frac{1}{2} N m \omega^2 U_0^2$$

Le terme $\frac{N}{2}$ tient compte du fait que l'énergie potentielle calculée précédemment est associée à deux interactions interatomiques.

22. En se restreignant à l'intervalle $q \in [0, \frac{2\pi}{a}]$, la relation de dispersion donne :

$$q = \frac{2}{a} \arcsin \left(\frac{2\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\lambda = \frac{\pi a}{\arcsin \left(\frac{2\omega}{\omega_0} \right)}$$

Application numérique :

$$\lambda = 1,7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

On remarque que $\lambda \gg a$, ce qui justifie le passage au continu effectué à la question suivante.

23. Application numérique :

$$c = 3,4 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

II. Kami no Sabaki - Electrodynamique classique

24. Soit M un point de l'espace. Si on néglige les effets de bords, tout plan contenant le point M et le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ est un plan de symétrie de la distribution de charge et donc, d'après le principe de Curie, un plan de symétrie du champ électrique. Par conséquent, le champ électrique est porté par le vecteur $\vec{u}_z$.

De plus, la distribution de charge est invariante par translation selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. La norme du champ électrique possède la même invariance.

$$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$$

Considérons dans un premier temps, uniquement la surface au sol, de charge $-Q$.

Appliquons le théorème de Gauss en utilisant la surface fermée Σ_g délimitant un cylindre d'axe (Oz) et dont les deux bases, de surfaces S sont situées respectivement aux altitudes $z > 0$ et $-z$ (on note Σ_1 et Σ_2 ces deux bases).

$$\oiint_{P \in \Sigma_g} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}(P) dS_p = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$$

Le flux sur la surface latérale est nulle car le champ électrique est tangent à la surface.

$$\oiint_{P \in \Sigma_g} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}(P) dS_p = \iint_{P \in \Sigma_1} \vec{E}(P) \cdot \vec{u}_z dS_p - \iint_{P \in \Sigma_2} \vec{E}(P) \cdot \vec{u}_z dS_p = E(z)S - E(-z)S$$

De plus, lorsqu'on considère la charge du sol seule, le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la charge et donc du champ électrique. Le champ électrique étant perpendiculaire à ce plan : $E(-z) = -E(z)$

Finalement, pour $z > 0$:

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

On montre de la même façon que la couche d'air chargée crée, pour $z < d$, le champ électrique :

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

D'après le principe de superposition, le champ électrique total est donc :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

25. En calculant la circulation du champ électrique de la couche d'air jusqu'au sol :

$$U_0 = \int_{air}^{sol} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_{z=d}^{z=0} -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} dz$$

$$U_0 = \frac{d\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

26. Applications numériques :

$$\sigma_0 = 1,8 \times 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$E = 2,0 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

27. Cette tension n'est pas dangereuse car elle est appliquée entre deux points très éloignés. On remarque en effet que la valeur du champ électrique créée est bien inférieure (deux ordres de grandeur) à la valeur du champ disruptif de l'air, valeur à partir de laquelle un arc électrique se formerait.

28. En reprenant les résultats précédents, on a directement :

$$\vec{E} = \frac{U_0}{d} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

29. Équations de Maxwell :

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

30. Dans la région située entre les deux armatures (vide de charge et de courant), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Ampère montre que si le champ électrique est variable, alors le champ magnétique ne peut pas être nul.

De plus, tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie du champ électrique et donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc orthoradial.

31. En calculant le flux des deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère à travers une surface notée S délimitée par un contour fermé noté C , le théorème de Stokes-Ampère donne :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

En échangeant la dérivée et l'intégrale :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

On obtient bien l'expression proposée avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

II.1. Écrantage dans un plasma thermique

32. L'énergie potentielle d'une charge e vaut :

$$E_p = eU$$

33. En supposant que la densité est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$n_+ = K e^{\frac{-eU}{k_B T}}$$

A haute température ($T \gg \frac{eU}{k_B}$) un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{eU}{k_B T}$ donne :

$$n_+ = K \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

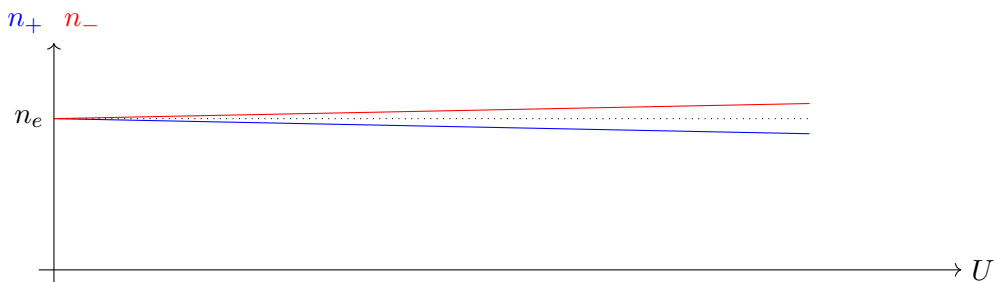
En notant $n_e = n_+(V=0)$:

$$n_+ = n_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

34. De même, en remplaçant e par $-e$ on obtient :

$$n_- = K \left(1 + \frac{eU}{k_B T} \right)$$

35. Allures graphiques :



36. En régime stationnaire, le champ électrique dérive d'un potentiel tel que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}U$. L'équation de Maxwell-Gauss donne donc :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}U) = \frac{-en_- + en_+}{\varepsilon_0}$$

En utilisant le formulaire et les deux questions précédentes :

$$\Delta U = -\frac{2n_e e^2 U}{k_B T \varepsilon_0}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r U}{dr^2} = -\frac{2n_e e^2 U}{k_B T \varepsilon_0}$$

37. Avec le changement de variable proposé, on obtient directement :

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} = -\frac{2n_e e^2}{k_B T \varepsilon_0} Z$$

Et donc :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{n_e k_B T \varepsilon_0}{2n_e e^2}}$$

38. On obtient la solution :

$$Z(r) = A e^{-\frac{r}{\lambda_D}} + B e^{+\frac{r}{\lambda_D}}$$

On a nécessairement $B = 0$ pour que le potentiel et le champ électrique ne divergent pas à l'infini.

$$U(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

En supposant que lorsque $r \ll \lambda_D$ le champ électrique créé par l'ion situé à l'origine devient prépondérant, on doit donc avoir :

$$U(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On identifie ainsi $A = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$ et on retrouve donc l'expression proposée par l'énoncé.

39. On en déduit la densité volumique de charge :

$$\rho(r) = -en_- + en_+$$

$$\rho(r) = -\frac{n_e e^3}{2\pi\varepsilon_0 k_B T} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

On en déduit, par intégration, la charge contenue dans une sphère de rayon r :

$$Q(r) = e + \iiint_{r' < r} \rho(r') dV = \int_{r'=0}^{r'=r} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho(r') r'^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\varphi$$

$$Q(r) = e - \frac{2n_e e^3}{\varepsilon_0 k_B T} \int_{r'=0}^{r'=r} r' e^{-\frac{r'}{\lambda_D}} dr'$$

$$Q(r) = e \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

Remarque : Il y avait deux coquilles dans l'intégrale fournie par l'énoncé. Il fallait lire $\int_0^r x e^{-\frac{x}{\lambda_D}} dx = \lambda_D^2 \left[1 - e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right]$ au lieu de $\int_0^r r e^{-\frac{x}{\lambda_D}} dx = \left[1 - e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right]$

II.2. Décharge du condensateur de plasma

40. γ s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

41. D'après la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{j} = -\gamma \frac{\sigma_{air}}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

42. Un bilan de charge sur la couche d'air chargée donne :

$$\frac{dq}{dt} = -\vec{j} \cdot \vec{u}_z S$$

$$\frac{d(S\sigma_{air})}{dt} = -\gamma \frac{\sigma_{air}}{\varepsilon_0} S$$

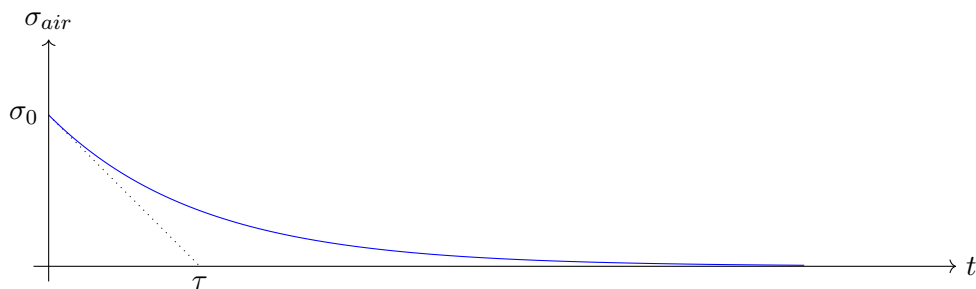
On retrouve bien la forme demandée :

$$\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \sigma_{air} = 0$$

avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$.

43. La résolution donne directement :

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



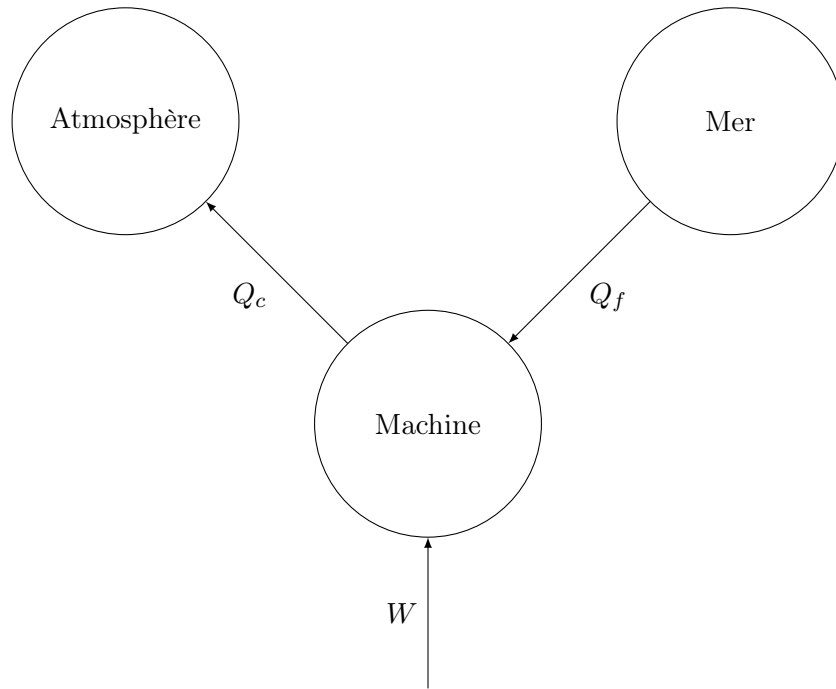
44. Application numérique :

$$\tau = 8,9 \times 10^{-32} \text{ s}$$

III. Hie Hie no Mi - Thermodynamique

L'énoncé n'est pas clair sur la signification de ce qui est appelé de façon générique "la puissance de la machine thermique". Dans la première partie il s'agit vraisemblablement de la puissance mécanique sans que cela ne soit précisé, alors que dans la deuxième partie cette puissance désigne la puissance reçue de la part de la source froide (cette fois l'énoncé le précise).

45. Schéma de principe :



46. En considérant un nombre entier de cycles et sachant que la transformation est réversible, le second principe appliqué à la machine s'écrit sous forme infinitésimale s'écrit :

$$0 = \frac{\delta Q_f}{T'} + \frac{\delta Q_c}{\theta_c}$$

47. En considérant un nombre entier de cycles, le premier principe appliqué à la machine s'écrit sous forme infinitésimale :

$$0 = \delta Q_f + \delta Q_c + \delta W = \delta Q_f + \delta Q_c + \mathcal{P}dt$$

On en déduit :

$$\delta Q_f = \frac{T'}{\theta_c - T'} \mathcal{P}dt$$

Le premier principe appliqué à la mer s'écrit sous forme infinitésimale :

$$mc_{eau}dT' = -\delta Q_f$$

$$mc_{eau}dT' = -\frac{T'}{\theta_c - T'} \mathcal{P}dt$$

$$mc_{eau} \left(\frac{\theta_c}{T'} - 1 \right) dT' = -\mathcal{P}dt$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final :

$$mc_{eau}\theta_c \ln \left(\frac{T_f}{\theta_c} \right) - (T_f - \theta_c) = -\mathcal{P}\Delta t$$

$$\Delta t = -\frac{mc_{eau}}{\mathcal{P}} \left[\theta_c \ln \left(\frac{T_f}{\theta_c} \right) - (T_f - \theta_c) \right]$$

48. Application numérique :

$$\mathcal{P}_{min} = 5,0 \times 10^3 \text{ W}$$

49. En reprenant le premier principe effectué précédemment, mais pour un changement d'état à température constante T_f et en notant dm la masse qui change d'état pendant dt

$$L_{fus}dm = \frac{T_f}{\theta_c - T_f} \mathcal{P}_{min} dt$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final :

$$mL_{fus} = \frac{T_f}{\theta_c - T_f} \mathcal{P}_{min} \Delta t'$$

Application numérique :

$$\Delta t' = 4,9 \times 10^3 \text{ s} = 82 \text{ min}$$

50. La mer fournit à la machine l'énergie $mc_{eau}(\theta_c - T_f) + mL_{fus}$ la machine reçoit une puissance mécanique $\mathcal{P}(\Delta t + \Delta t')$. L'efficacité totale de la machine est donc :

$$\eta = \frac{mc_{eau}(\theta_c - T_f) + mL_{fus}}{\mathcal{P}(\Delta t + \Delta t')}$$

Application numérique :

$$\eta = 15$$

III.1. Cinétique de la formation de la glace

51. On considère un système de section S et situé entre les abscisses x et $x + dx$. En régime stationnaire, l'énergie interne du système est constante. Le premier principe appliqué à ce système par unité de temps donne donc :

$$0 = j_Q(x)S - j_Q(x + dx)S + \sigma S dx$$

Avec un développement limité à l'ordre 1 en dx :

$$\frac{dj_Q(x)}{dx} = \sigma$$

L'énoncé ne précise pas à quel phénomène correspond cette puissance créée et il semble qu'il faille la prendre nulle dans la suite pour obtenir des résultats cohérents. Pourquoi avoir introduit cette grandeur ?

52. En prenant $\sigma = 0$:

$$\frac{dj_Q(x)}{dx} = 0$$

Le flux est donc uniforme, et le vecteur densité de courant thermique est donc bien à flux conservatif.

53. En $x = 0$ le flux thermique est égal à la puissance $-\mathcal{P}'$ fournie par la machine.

Pendant un intervalle de temps dt un volume $v_0 S dt$ de glace est formée. Le premier principe appliqué à ce volume pendant dt donne donc :

$$-\rho_{glace} L_{fus} v_0 S dt = j_Q(x = L) dt = -\mathcal{P}' dt$$

La vitesse de formation du front de glace est donc bien constante :

$$v_0 = \frac{\mathcal{P}'}{S \rho_{glace} L_{fus}}$$

La longueur du pont est $D = v_0 \delta t$ donc :

$$\mathcal{P}' = \frac{D S \rho_{glace} L_{fus}}{\delta t}$$

Application numérique :

$$v_0 = 83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mathcal{P}' = 2,7 \times 10^7 \text{ W}$$

En utilisant la loi de Fourier et en intégrant :

$$T(x=0) = T_f - \frac{\mathcal{P}' D}{S \lambda_g}$$

Application numérique ($\lambda_g = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) : $T(x=0) = -6,4 \times 10^{13} \text{ K}$

Le modèle proposé par l'énoncé ne semble donc pas du tout satisfaisant...

54. Le coefficient h s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

55. On reprend le bilan établi à la question 51 en ajoutant les transferts conducto-convectifs :

$$0 = j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S + \sigma S dx - h(T(x) - \theta_c)\sqrt{S}dx$$

Toujours avec $\sigma = 0$ et avec un développement limité à l'ordre 1 en dx :

$$\frac{dj_Q(x)}{dx} = -\frac{h}{\sqrt{S}}(T(x) - \theta_c)$$

A priori la vitesse d'avance du front n'est plus constante. En effet, une partie de l'énergie absorbée en $x=0$ est fournie par l'atmosphère et donc plus D est important plus le flux thermique en $x=D$ est faible (en valeur absolue).

En dérivant et en utilisant la loi de Fourier, on obtient l'équation différentielle vérifiée par la densité de flux thermique :

$$\frac{d^2 j_Q(x)}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} j_Q(x) = 0$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda_g \sqrt{S}}{h}}$$

Application numérique (pour $\lambda_g = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) :

$$\delta = 4,0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Pour une distance $D = 50 \text{ km}$ la densité de flux thermique est donc largement négligeable par rapport à la densité de flux thermique de la situation précédente. La situation est donc largement modifiée et le front de glace ne progresse plus du tout. Que veut dire l'énoncé par "en supposant que la situation est peu modifiée" ?