Corrigé proposé par :
A.HMAIRROU (CPGE Med V)
Casablanca

DES OBJETS ASTRONOMIQUES, DE MARS À SIRIUS

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

I.A Mouvement d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

❒ **1—** La condition forte permettant de considérer A fixe est

$$\boxed{m_A \gg m_P} \tag{1}$$

Si les deux astres sont assimilés à deux points matériels, alors la force qu'applique A sur P est

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r} \tag{2}$$

❒ **2—** Si l'astre A possède une répartition de masse à symétrie sphérique, le champ gravitationnel créé par cette répartition en un point P tel que $(AP = r > R_A)$ est celui que créerait un point matériel, de masse m_A placé au centre de la sphère, ainsi, l'expression de la force reste inchangée :

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r} \tag{3}$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le théorème de Gauss de la gravitation

$$\oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}} \tag{4}$$

Le centre A de la sphère est considéré comme origine du repère. Ainsi, par des considérations de symétrie et d'invariances, on montre que $\vec{G}(P) = \vec{G}(r)\vec{u}_r$; le point P est repèré par ses coordonnées (r, θ, φ). Le flux de $\vec{G}$ à travres la surface de Gauss est

$$\oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 G(r) \tag{5}$$

La masse intérieure à la surface de Gauss est $M_{\text{int}} = m_A$. Ce qui donne $4\pi r^2 G(r) = -4\pi\mathcal{G}m_A$. Soit

$$\vec{G}(r > R_A) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\vec{u}_r \tag{6}$$

d'où

$$\vec{F} = m_p\vec{G}(P) = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r \tag{7}$$

❒ **3—** Oui, l'expression de cette force reste valable si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{A}$ sont à symétrie sphérique, puisque si l'on cherche la force appliquée par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{P}$, on procède de la même façon que la question précédente et d'après le principe de l'action et de la réaction, nous avons $\vec{F}_{\mathscr{P}/\mathscr{A}} = -\vec{F}_{\mathscr{P}/\mathscr{A}}$.

❒ **4—** Appliquons le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}/_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AP} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0} \tag{8}$$

Le moment cinétique est donc une constante du mouvement $\vec{L}_A = m_P \vec{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{\mathrm{Cte}}$
Le vecteur position $\vec{AP}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R}_0)$ sont contenus dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_A$; ce dernier est fixé par les conditions initiales : le mouvement est donc plan.
La constante des aire est apparait dans l'expression du moment cinétique

$$\|\vec{L}_A\| = m_P|C| \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\|\vec{L}_A\|}{m_P} \tag{9}$$

En associant au mouvement plan un système de coordonnées polaires (r, θ), le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_A = m_P C\vec{u}_z = r\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = m_P r^2\dot{\theta}u_z \tag{10}$$

Soit

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}} \tag{11}$$

❒ **5—** On a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\vec{a}}{\dot{\theta}}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à P, donne

$$\vec{a} = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2}\vec{u}_r$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2\dot{\theta}}\vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}m_A}{C}\vec{u}_r} \tag{12}$$

On intègre $\mathrm{d}\vec{v} = -\dfrac{\mathcal{G}m_A}{C}\vec{u}_r\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathcal{G}m_A}{C}\,\mathrm{d}(\vec{u}_\theta)$, on obtient

$$\boxed{\vec{v}(\theta) = \frac{Gm_A}{C}\,(\vec{u}_\theta + \vec{e}) = \frac{C}{p}\,(\vec{u}_\theta + \vec{e}) \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{Gm_A}} \tag{13}$$

Le vecteur $\vec{e}$ a la même dimension que $\vec{u}_\theta$ à partir de l'expression précédente, et comme $\vec{u}_\theta$ est sans dimension $\vec{e}$ est sans dimension. Les deux vecteurs $\vec{v}(\theta)$ et $\vec{u}_\theta$ sont dans le plan (Axy) et puisque $\vec{e} = \dfrac{p}{C}\vec{v} - \vec{u}_\theta$, $\vec{e}$ est donc dans le plan (Axy).

❒ **6—** Le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

De la question précédente, nous avons

$$\vec{v}(\theta) = \frac{C}{p}\vec{u}_\theta + \frac{C}{p}\vec{e}$$

Comme $\vec{e} = e\vec{u}_y = e\,(\cos\theta\vec{u}_\theta + \sin\theta\vec{u}_r)$, il vient

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \frac{C}{p}\,(1 + e\cos\theta)\,\vec{u}_\theta + \frac{C}{p}e\sin\theta\vec{u}_r \tag{14}$$

Soit par identification

$$\boxed{\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{Ce}{p}\sin\theta \\ r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}\left(1 + e\cos\theta\right) \end{cases}} \tag{15}$$

On remplace $\dot{\theta}$ par $\dfrac{C}{r^2}$ dans $r\dot{\theta} = \dfrac{C}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)$, on tire l'expression de $r(\theta)$, soit

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}} \tag{16}$$

Pour un mouvement borné, nous avons $\dfrac{p}{1+e} \leq r \leq \dfrac{p}{1-e}$, soit $\dfrac{1-e}{p} \leq \dfrac{1}{r} \leq \dfrac{1+e}{p}$ et puisque r est toujours positif, il vient donc que

$$1 - e > 0 \quad \Longrightarrow \quad e < 1 \ \text{ puisque } p > 0 \tag{17}$$

Dans cette situation, la trajectoire est elliptique.

I.B Période du mouvement

❒ **7—** On a $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2} = \dfrac{C}{p^2}\left(1 + e\cos\theta\right)^2$, soit

$$\mathrm{d}t = \frac{p^2}{C}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

Le période est obtenue en intégrant θ entre 0 et 2π, soit

$$T = \frac{p^2}{C}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{p^2}{C}\mathcal{I} \ \text{ avec } \ \mathcal{I} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \tag{18}$$

et puisque $p = \dfrac{C^2}{Gm_A}$, il vient finalement

$$\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}\mathcal{I}} \tag{19}$$

❒ **8—** Dans le cas où $e = 0$, la trajectoire est circulaire et $p = r$, r étant le rayon de la trajectoire circulaire. On a :

$$\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}2\pi} \tag{20}$$

On en déduit la troisième loi de Kepler

$$\boxed{\frac{T^2}{p^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_A}} \tag{21}$$

Énoncé

Le carré de la période de révolution T d'une planète sur son orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse. Dans le cas d'une trajectoire circulaire $T^2 \propto r^3$

❒ **9—** Le code du tracé est le suivant

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
# Définition de la fonction à intégrer
def f(theta, e):
return 1 / (1 + e * np.cos(theta))**2
# Définition des bornes d'intégration
a = 0
b = 2 * np.pi
# Valeurs de e pour lesquelles on veut tracer l'intégrale
e_valeurs = np.linspace(0, .5, 10)
# Calcul de l'intégrale pour chaque valeur de e
integral_values = []
for e in e_valeurs:
resultat, _ = quad(f, a, b, args=(e,))
integral_values.append(resultat)
# Tracer l'intégrale en fonction de e
figure=plt.figure(figsize=(8,8))
plt.plot(e_valeurs, integral_values,'o-')
plt.ylabel('Intégrale $\mathcal{I}$')
plt.xlabel('Paramètre $e$')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Le résultat de l'exécution du code est donné par la figure suivante

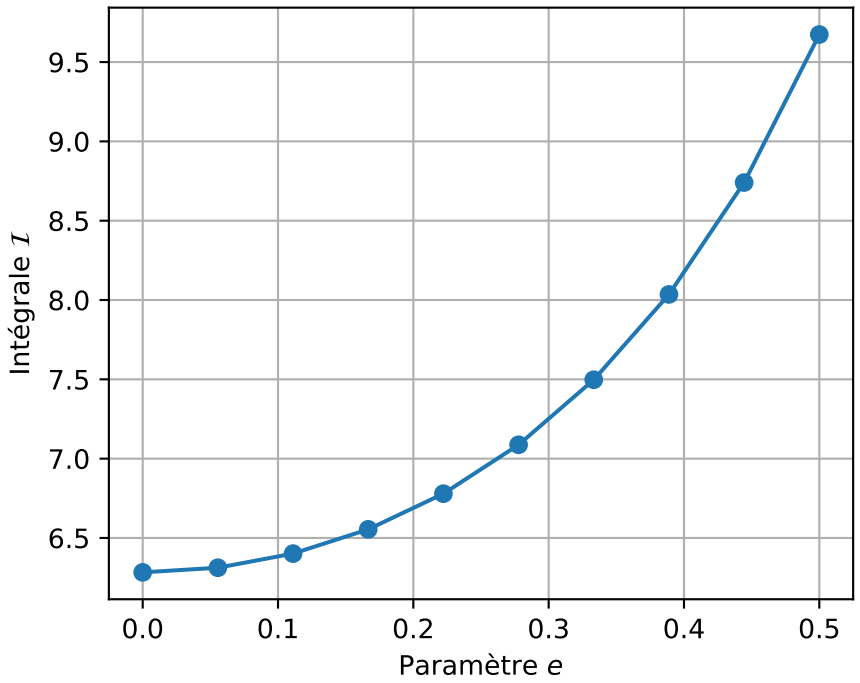

FIGURE 1

I.C Mesure de l'unité astronomique

❒ 10—

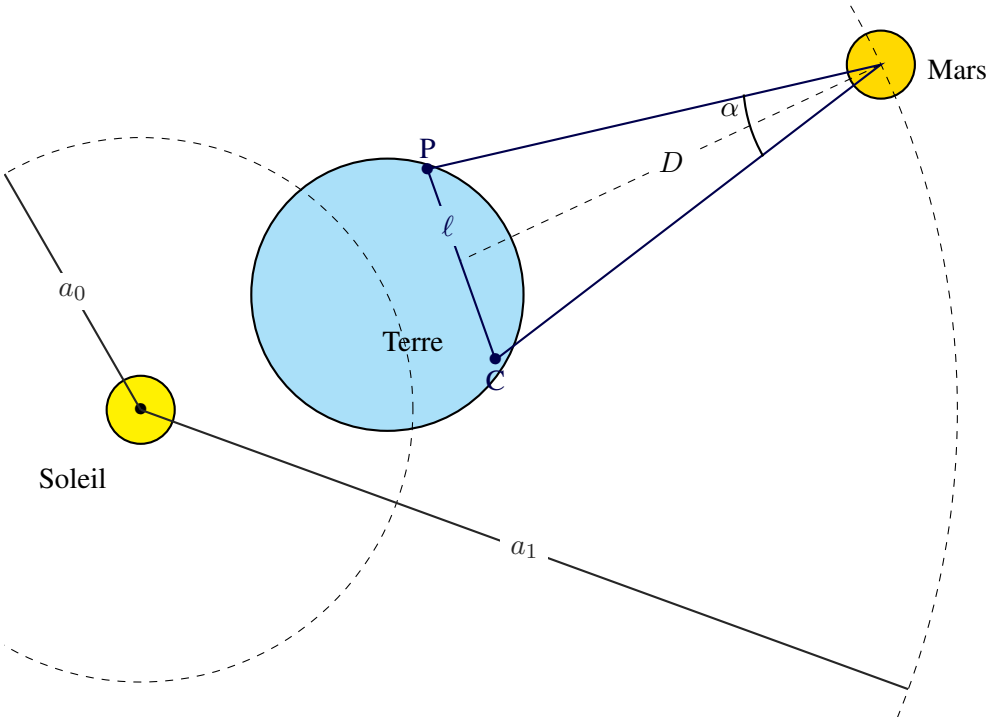

FIGURE 2 – Présentation des différentes paramètres a_0, a_1, ℓ et α. L'échelle n'est pas respecté.

❒ **11—** D'après la figure 2 de la question ❒ **10—**, nous avons $\tan\alpha = \alpha \backsimeq \dfrac{\ell}{d} \backsimeq \dfrac{\ell}{a_1 - a_0}$, soit

$$a_1 = a_0 + \frac{\ell}{\alpha}$$

D'après la troisième loi de Kepler, nous avons $\dfrac{a_1^3}{a_0^3} = \dfrac{T_1^2}{T_0^2}$, soit

$$a_0 = a_1 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}$$

On en déduit donc l'expression de a_0

$$\boxed{a_0 = \frac{\ell}{\alpha\left[\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right]}} \tag{22}$$

❒ **12— Application numérique**

$$a_0 = \frac{7070 \times 10^3}{14 \times 4,85\left[\left(\dfrac{687}{365}\right)2/3 - 1\right] \times 10^{-6}} \backsimeq \frac{7,1 \times 10^{12}}{19,4\,[1,6-1]} \backsimeq 1,7 \times 10^{11}\ \text{m}$$

La valeur est compatible avec la formule de l'équation 22, même que l'écart relatif entre la valeur tabulée et la valeur trouvée est de 13%.

II Structure et énergie des étoiles

II.A L'énergie gravitationnelle

❒ **13—** W_g est négatif, puisqu'il correspond à une interaction attractive (énergie potentielle négative). L'énergie de liaison, correspond à l'énergie qu'elle faut fournir à un système pour le dissocier. D'où on nomme parfois $E_\ell = -W_g$.

❒ **14—** La masse de l'étoile est donnée par

$$M = \iiint \rho(P)\mathrm{d}\tau(P) = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{23}$$

puisque la masse volumique est uniforme, soit

$$\boxed{\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}} \tag{24}$$

La masse m d'une sphère de rayon r est donc

$$\boxed{m = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = M\frac{r^3}{R^3}} \tag{25}$$

La masse $\mathrm{d}m$ à apporter pour faire passer le rayon de r à $r + \mathrm{d}r$ est

$$\boxed{\mathrm{d}m = 3M\frac{r^2}{R^3}\mathrm{d}r} \tag{26}$$

❒ **15—** Le système mécanique à considérer est la couche de masse $\mathrm{d}m$, situé initialement à l'infini (isolée) avec une énergie cinétique nulle, un opérateur la ramène à la position r où elle sera au repos à nouveau. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système

$$\mathrm{d}W_{\text{op}} + \mathrm{d}W_G = \Delta E_c = 0$$

soit

$$\mathrm{d}W_{\text{op}} = -\mathrm{d}W_G = -\int_\infty^r \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^r -\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r'^2}\mathrm{d}r' = -\mathcal{G}m\mathrm{d}m\left[\frac{1}{r'}\right]_\infty^r = -\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r}$$

D'où la contribution à l'énergie gravitationnelle au passage de r à $r + \mathrm{d}r$ est

$$\mathrm{d}W_g = -\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r} \tag{27}$$

L'énergie totale s'obtient par intégration

$$\begin{aligned} W_g &= -\int_0^R \mathcal{G}m\frac{\mathrm{d}m}{r} \\ &= -\mathcal{G}\frac{3M^2}{R^6}\int_0^R r^4\mathrm{d}r \\ &= -\mathcal{G}\frac{3M^2}{5R^6}\left[r^5\right]_0^R \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{W_g = -\frac{3}{5}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}} \tag{28}$$

II.B Pression cinétique

❒ **16—** Sur le fluide s'applique :

- le poids

$$\vec{p} = \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\vec{G}(z)S\mathrm{d}z$$

- la force de pression en z_1

$$\vec{F}_{z_1} = p(z_1)S\vec{u}_z$$

► la force de pression en z_2

$$\vec{F}_{z_2} = -p(z_2)S\vec{u}_z$$

À l'équilibre, on a $\vec{p} + \vec{F}_{z_1} + \vec{F}_{z_2} = \vec{0}$, soit

$$\vec{p} = \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)G(z)S\mathrm{d}z - (p(z_2) - p(z_1))\,S = 0 \tag{29}$$

Si l'on s'intéresse maintenant à une couche de fluide situé entre z et $z + \mathrm{d}z$, l'équation précédente devient

$$\rho(z)G(z)\mathrm{d}z - (p(z + \mathrm{d}z) - p(z))\,S = 0 \tag{30}$$

Ainsi, $p(z + \mathrm{d}z) \backsimeq p(z) + \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$, soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho(z)G(z)} \tag{31}$$

❒ **17—** L'énergie cinétique s'écrit comme $E_c = \dfrac{3}{2}PV = \dfrac{3}{2}nRT$ dans le cas d'un gaz parfait monoatomique.

Démonstration

En effet, on peut utiliser le théorème d'équipartition de l'énergie, l'énergie d'un gaz parfait monoatomique comportant N atomes (chaque atome est de masse m) en équilibre thermique à la température T est donnée par

$$\begin{aligned} E_c &= N\left[\frac{1}{2}m\langle v_x^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_z^2\rangle\right] \\ &= N\left[\frac{1}{2}k_BT + \frac{1}{2}k_BT + \frac{1}{2}k_BT\right] \\ &= \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}n\underbrace{\mathcal{N}_Ak_B}_{R}T \\ &= \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV \end{aligned} \tag{32}$$

❒ **18—** On utilise le théorème de Gauss de la gravitation, on montre que $\vec{G}(r < R)$ vaut

$$\boxed{\vec{G}(r < R) = -\frac{\mathcal{G}M\vec{r}}{R^3}} \tag{33}$$

Démonstration

Pour démonter ce résultat, on utilise toujours le théorème de Gauss de la gravitation $\oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$. Le flux $\phi = \oiint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2G(r)$. Le point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) est à l'intérieur de la sphère de rayon R. La sphère de Gauss englobe donc une masse intérieure

$$M_{\text{int}} = 4\pi\rho\int_0^r r'^2\mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 = M\frac{r^3}{R^3}$$

Ainsi

$$4\pi r^2G(r) = -4\pi\mathcal{G}M\frac{r^3}{R^3}$$

soit finalement

$$\vec{G}(r < R) = -\mathcal{G}\frac{M\vec{r}}{R^3} \tag{34}$$

Soit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho G(r) = -\mathcal{G}\frac{3M^2}{4\pi R^6}r \implies \mathrm{d}p = -\mathcal{G}\frac{3M^2}{4\pi R^6}r\mathrm{d}r$$

On intègre l'expression précédente entre r et R, on obtient

$$p(r) - p(R) = \frac{-3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^6}\left[r^2 - R^2\right]$$

La non présence de la matière au delà de $r = R$, impose $p(R^+) = 0$. La continuité de la pression en $r = R$ impose à ce que $p(R) = 0$. Soit

$$\boxed{p(r) = \frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{R^6}\left[R^2 - r^2\right]} \tag{35}$$

❒ **19—** Si nous considérons un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ autour d'un point M de l'étoile repéré par ses coordonnées (r,θ,φ), alors l'énergie cinétique élémentaire vaut $\mathrm{d}E_c = \frac{3}{2}P\mathrm{d}\tau$. L'énergie cinétique s'obtient par intégration

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{3}{2} \times 4\pi \int_0^R \frac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^6}\left(R^2 - r^2\right) r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{9}{4}\frac{\mathcal{G}M^2}{R^6}\left[\int_0^R R^2 r^2 \mathrm{d}r - \int_0^R r^4 \mathrm{d}r\right] \\ &= \frac{9}{4}\frac{\mathcal{G}M^2}{R^6}\left[\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5}\right] \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{E_c = \frac{3}{10}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}} \tag{36}$$

Remarquons que $E_c = -\dfrac{W_g}{2}$, soit $2E_c + W_g = 0$. On retrouve le théorème de Viriel.

II.C Pression de confinement quantique

❒ **20—** On a $\mathscr{V} = \dfrac{V}{N} = a^3$, la masse M est donnée par

$$M = N(m_p + m_e) \backsimeq N m_p \quad \textbf{puisque} \quad m_e \ll m_p$$

soit

$$V = Na^3 = \frac{M}{m_p}a^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

on obtient finalement

$$\boxed{a = \left(\frac{4}{3}\pi\frac{m_p}{M}\right)^{1/3} R} \tag{37}$$

❒ **21—** On injecte $\Psi(x,t) = \psi(x,t)e^{-j\omega t}$ dans l'équation de Schrödinger fournie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\cancel{e^{-j\omega t}} = \hbar\omega\psi(x)\cancel{e^{-j\omega t}}$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar}\omega} \tag{38}$$

dont la solution s'écrit :

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \tag{39}$$

On applique les conditions aux limites

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 = B \\ \psi(a) = 0 = A\sin(ka) \end{cases}$$

soit $ka = n\pi$ avec $n \in \mathbf{N}^*$, le nombre d'onde k est quantifié. Ainsi, nous avons

$$\omega_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2} \quad \text{et} \quad e_n = \hbar\omega_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \tag{40}$$

L'énergie du fondamental est

$$\boxed{e_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8ma^2}} \tag{41}$$

La constante A est déterminée grâce à la condition de normalisation

$$\int_0^a |\psi|^2 \mathrm{d}x = 1$$

soit

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{42}$$

ce qui donne finalement

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{43}$$

et

$$\boxed{\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)} \tag{44}$$

La particule étant libre d'énergie $e_1 = \dfrac{p_x^2}{2m} = \mathrm{C}^{te}$, et on a aussi, $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2\rangle - \langle p_x\rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2\rangle} = 2me_1$; $\langle p_x\rangle = 0$ (équiprobabilité des directions). En prenant $\Delta x = a$, on a

$$\boxed{\Delta p_x \Delta x = \sqrt{2me_1} \times a = \frac{\hbar\pi}{a} \times a = \frac{h}{2} > \frac{\hbar}{2}} \tag{45}$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg est donc vérifié.

❒ **22—** Les expressions de la fonction d'onde et de l'énergie du fondamental s'écrivent

$$\boxed{\Psi_{1,1,1}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \quad \text{et} \quad e_{1,1,1} = \frac{3}{8}\frac{h^2}{ma^2}} \tag{46}$$

Démonstration

Dans le modèle 3D (particule dans une boite), la fonction d'onde sera donc une fonction des trois variables (x, y, z) et du temps t et doit obéir à l'équation de Schrödinger suivante

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = j\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{47}$$

Cherchons une solution de la forme

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x)\varphi(y)\chi(z)e^{-j\omega t}$$

On injecte Ψ dans l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\varphi(y)\chi(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x^2}+\psi(x)\chi(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y^2}+\psi(x)\varphi(y)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z^2}\right)=\hbar\omega\psi(x)\varphi(y)\chi(z)$$

On divise les deux membres de l'équation par Ψ

$$\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{\chi}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{2m\hbar\omega}{\hbar^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}e$$

La seule configuration possible est que chacune des équations de x, y et z soit une constante. L'énergie totale e doit s'écrire

$$e=e_x+e_y+e_z$$

Ainsi, on obtient les trois équations suivantes

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2\psi=0 \quad \text{avec} \quad k_x^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}e_x\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2\varphi=0 \quad \text{avec} \quad k_y^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}e_y\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2\chi=0 \quad \text{avec} \quad k_z^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}e_z\end{cases}$$

Les solutions s'écrivent en tenant compte des conditions aux limites qui imposent la quantification des nombres d'ondes k_x, k_y et k_z.

$$\begin{cases}\psi(x)=A_x\sin\left(n_x\dfrac{\pi}{a}x\right) \quad \text{avec} \quad n_x\in\mathbf{N}^*\\ \varphi(y)=A_y\sin\left(n_y\dfrac{\pi}{a}y\right) \quad \text{avec} \quad n_y\in\mathbf{N}^*\\ \chi(z)=A_z\sin\left(n_z\dfrac{\pi}{a}z\right) \quad \text{avec} \quad n_z\in\mathbf{N}^*\end{cases}$$

D'où

$$\Psi(x,y,z)=A\sin\left(n_x\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n_y\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(n_z\frac{\pi}{a}z\right)$$

La constante A s'obtient par la condition de normalisation, soit

$$A=\sqrt{\frac{8}{a^3}}$$

d'où

$$\sqrt{\frac{8}{a^3}}\sin\left(n_x\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n_y\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(n_z\frac{\pi}{a}z\right) \tag{48}$$

L'énergie s'exprime ainsi

$$e_{n_x,n_y,n_z}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \tag{49}$$

❒ **23—** L'énergie cinétique de confinement s'écrit comme la somme des énergies de confinement des protons et des électrons

$$E_c=N\frac{3h^2}{8m_ea^2}+N\frac{3h^2}{8m_pa^2}=N\frac{3h^2}{8a^2}\frac{m_p+m_e}{m_pm_e}$$

Comme $N = \dfrac{M}{m_p + m_e}$, il vient

$$E_c = \frac{3h^2}{8a^2}\frac{M}{m_e m_p}$$

D'après la question ❒ **20—**, nous avons $a = \left(\frac{4}{3}\pi\frac{m_p}{M}\right)^{1/3} R$, on obtient finalement

$$\boxed{E_c = \gamma\frac{M^{5/3}}{R^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{-2/3}\frac{h^2}{m_e m_p^{5/3}}} \tag{50}$$

II.D Le cas des naines blanches

❒ **24—** L'énergie totale est

$$E_t = E_c + W_g = \gamma\frac{M^{5/3}}{R^2} - \frac{3}{5}\mathcal{G}\frac{M^2}{R}$$

On dérive E_t par rapport à R

$$\frac{\mathrm{d}E_t}{\mathrm{d}R} = -2\gamma\frac{M^{5/3}}{R^3} + \frac{3}{5}\mathcal{G}\frac{M^2}{R^2}$$

Au minimum d'énergie $\dfrac{\mathrm{d}E_t}{\mathrm{d}R}|_{R_{\text{eq}}} = 0$, soit

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{10}{3}\frac{\gamma}{\mathcal{G}M^{1/3}}} \tag{51}$$

❒ **25—** pour le Soleil $M_\odot = 1,99 \times 10^{-30}$ kg

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{10}{3}\frac{1,6\times 10^6}{2^{1/3}\times 10^{10}\times 6,67\times 10^{-11}} \backsimeq 6,3\times 10^6 \text{ m}} \tag{52}$$

On remarque que $R_\odot \sim 100 R_{\text{eq}}$

❒ **26—** On a d'après la question ❒ **23—**

$$E_c(R_{eq}) = \gamma\frac{M^{5/3}}{R_{eq}^2} \sim \frac{1}{2}Nm_e v^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{m_p}m_e v^2$$

soit

$$\boxed{v \sim \left(2\gamma\frac{M^{2/3}m_p}{R_{eq}^2 m_e}\right)^{1/2} \qquad \text{A.N } v \sim 1,6\times 10^8 \text{m.s}^{-1}} \tag{53}$$

La vitesse des électrons $v \backsimeq c/2 > c/10$ dans le modèle de Flower, il faut donc prendre en compte le caractère relativiste.