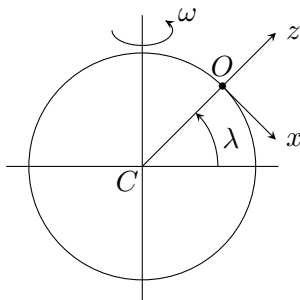


1 Déviation d'un objet lâché du haut de la tour Montparnasse

Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. Le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$) est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω . On considère un repère $(Oxyz)$ lié à ($\mathcal{R}_T$) tel que la latitude du point O soit $\lambda = 49^\circ$ (latitude de Paris).



Données :

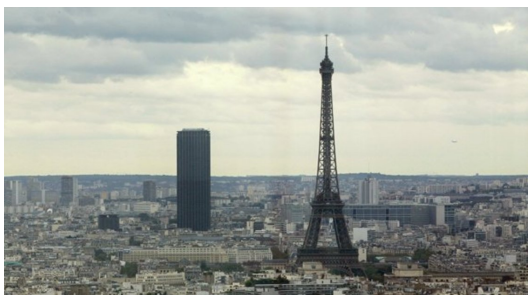
- Rayon terrestre : $R_T = 6371 \text{ km}$
- Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Constante de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ uSI}$

1. Estimer la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur g au point O .

On peut supposer (pour estimer un ordre de grandeur) que l'accélération de la pesanteur est uniquement due au champ de gravitation (force centrifuge négligée). Au niveau de la surface terrestre on a donc :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

On lâche une bille de plomb sans vitesse initiale du haut de la tour Montparnasse (209 m), un jour sans vent.



2. Expliquer pourquoi la bille ne tombe pas exactement au pied de la tour.

Le référentiel terrestre n'est pas galiléen. La bille est donc soumise à la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = +m\omega^2 \vec{HM}$ qui est incluse dans la valeur de $\vec{g}$ et à la force d'inertie de Coriolis $-2m \vec{F}_{ic} = + - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$.

$\vec{F}_{ic}$ dévie la trajectoire par rapport à la verticale locale représentée par $\vec{g}$.

3. On donne les équations du mouvement de la bille dans le référentiel terrestre :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\omega \sin(\lambda) \dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\omega \sin(\lambda) \dot{x} - 2\omega \cos(\lambda) \dot{z} \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \cos(\lambda) \dot{y} \end{cases}$$

Expliquer d'où proviennent ces équations ainsi que les approximations qui ont été faites pour les établir. Résoudre ces équations à l'ordre 1 en ω et en déduire la déviation que subirait la bille par rapport à un fil à plomb suspendu en haut de la tour. On justifiera clairement les approximations faites.

On a appliqué le PFD à la bille dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$). La force d'inertie d'entraînement a été incluse dans g et on a supposé que g restait uniforme (valable dans une zone limitée de l'espace).

On intègre la seconde équation par rapport au temps. Compte-tenu des conditions initiales on obtient :

$$\dot{y} = -2\omega \sin(\lambda) x - 2\omega \cos(\lambda) (z - h)$$

où h est la hauteur de la tour. On reporte ceci dans les première et troisième équations pour trouver :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -4\omega^2 \sin(\lambda) (\sin(\lambda) x + \cos(\lambda) (z - h)) \approx 0 \\ \ddot{z} &= -g - 4\omega^2 \cos(\lambda) (\sin(\lambda) x + \cos(\lambda) (z - h)) \approx -g \end{cases}$$

à l'ordre 1 au plus en ω . On peut donc résoudre :

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + h$$

En reportant dans la seconde équation on obtient donc :

$$\ddot{y} \approx 2\omega \cos(\lambda) gt \implies y(t) = \omega \cos(\lambda) \frac{gt^3}{3}$$

À l'arrivée sur le sol $z(t_f) = 0$ donc :

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{et} \quad y(t_f) = \frac{\omega \cos(\lambda) g}{3} \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

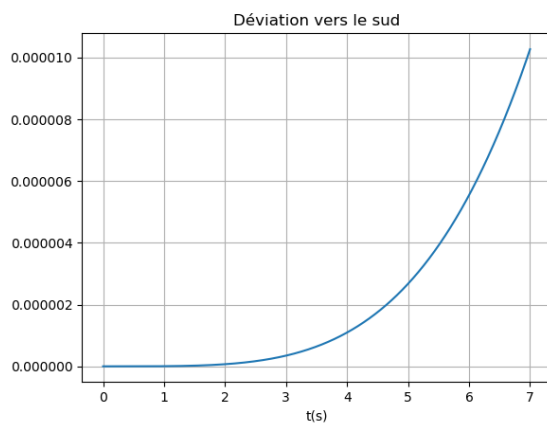
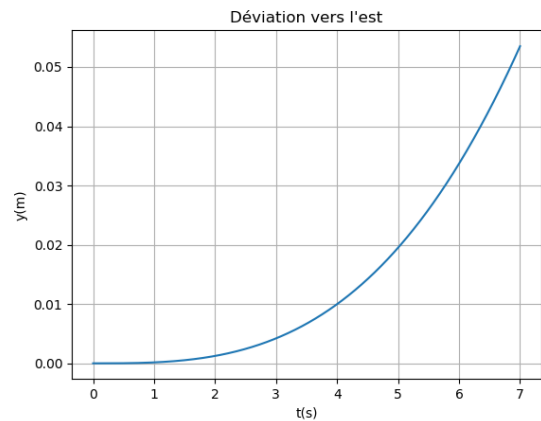
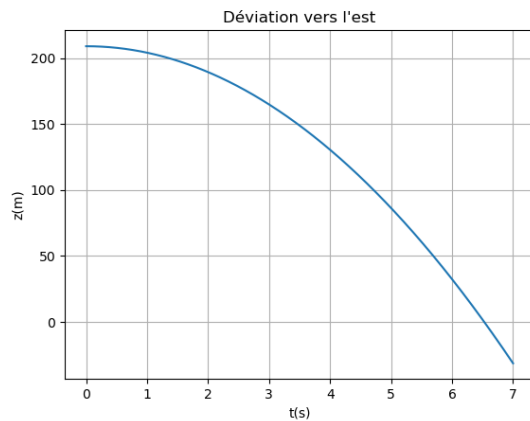
A.N. D'après wikipédia : $h = 209$ m. Avec $\lambda = 49^\circ$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $\omega = 2\pi/(24 \times 3600) = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, on obtient :

$$t_f = 6,52 \text{ s} ; \quad y(t_f) = 4,3 \text{ cm} > 0 \quad \text{et} \quad x(t_f) = 0$$

On observe une déviation vers l'Est mais pas de déviation vers le Sud (à l'ordre 1 en ω)

4.  Discuter de la validité de la résolution précédente en complétant le fichier `Python DeviationEst-TourMontpartnasse.py` de façon à faire une résolution complète du système d'équations. En déduire les déviations vers l'est et vers le sud.

On obtient les graphes ci-dessous :



La résolution exacte montre qu'on obtient les mêmes valeurs pour le temps de chute et la déviation vers l'Est que dans la résolution approchée. En revanche on constate une déviation vers le Sud de l'ordre $7 \mu\text{m}$, ce qui n'est pas mesurable.

Ces expériences sont très difficiles à réaliser notamment en raison du vent et des frottements de l'air. Elle a été menée en 1833 dans un puits de Mine et a permis de mesurer la déviation vers l'Est.

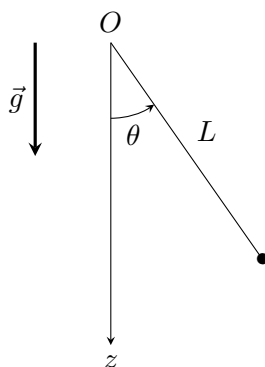
2 Pendule aux grandes oscillations

On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée en un point O fixe à un fil inextensible, sans masse, de longueur ℓ . On note θ l'angle entre le pendule et la verticale. Le pendule est lâché d'un angle θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi/2$, sans vitesse initiale.

1. Montrer que l'angle θ vérifie l'équation :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos(\theta) = \text{constante}$$

Préciser les expressions de ω et de la constante.



La conservation de l'énergie mécanique du pendule conduit à :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - m g L \cos \theta = \text{Cste}$$

d'où :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta = \text{Cste} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

2. Montrer que l'expression de la période peut s'écrire :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

On précisera l'expression de T_0 .

À $t = 0$, $E_m = -m g L \cos \theta_0$. Il s'ensuit que :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

En l'absence d'effets dissipatifs, le pendule n'arrête pas d'osciller entre les angles limites $-\theta_0$ et θ_0 . Durant la phase de croissance de θ ($\dot{\theta} > 0$) On a :

$$\dot{\theta} = \omega \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Cette phase dure une demi-période T . Une résolution par séparation des variables conduit donc à :

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = \omega \int_0^{T/2} = \frac{\omega T}{2}$$

La parité de la fonction à intégrer permet ensuite de mettre le résultat sous la forme :

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

et en posant $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ qui est la période des petites oscillations, on obtient bien le résultat demandé par l'énoncé.

3. On réalise le changement de variable $\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$. En déduire que T se met sous la forme :

$$T = T_0 f\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}$$

On remarque que si $\theta \in [0, \theta_0]$ alors $\sin(\phi) \in [0, 1]$, ce qui permet de choisir $\phi \in [0, \pi/2]$. On a alors :

$$\cos(\phi) d\phi = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \frac{d\theta}{2}$$

D'autre part :

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \cos \theta_0 = 1 - 2 \sin^2 \theta_0$$

À partir de là on a :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2) \sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos(\theta/2)} = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}$$

avec $x = \sin(\theta_0/2)$

4. Montrer que, pour de petites oscillations, l'expression précédente conduit à la formule approchée de Borda :

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

On fait un développement limité puisque $x \ll 1$ et donc $x \sin^2 \phi \ll 1$. On obtient :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x^2}{2} \sin^2 \phi\right) d\phi = T_0 \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

en linéarisant $\sin^2 \phi$ pour pouvoir intégrer et en remarquant que $x = \sin(\theta_0/2) \approx \theta_0/2$.

5.  On se place dans le cas particulier où $\ell = 1,0 \text{ m}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

En utilisant le script Python du fichier `PenduleGrandesOscillations.py`, déterminer l'angle limite θ_ℓ au delà duquel la période T s'écarte de plus de 1% de T_0 , puis de plus de 1% de l'expression de la période approchée avec la formule de Borda.

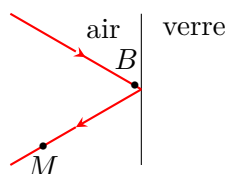
On constate que le premier angle limite est d'environ 22° et le second de 72° .

3 Panneaux solaires anti-reflet

Les panneaux solaires les plus performants ont actuellement un rendement de 25%. On cherche à savoir ici quel gain on peut obtenir en utilisant une couche anti-reflet. L'ensemble des cellules photovoltaïques est protégé par une plaque de verre d'indice $N = 1,50$. Les coefficients de réflexion r et transmission t d'un dioptré sont donnés par

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

1. On suppose qu'une onde incidente monochromatique, d'éclairement E_0 et de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et de pulsation ω_0 arrive sur la plaque. En considérant $n_{\text{air}} = 1$, quelle est la puissance perdue par réflexion sur un panneau ?



Supposons que la vibration lumineuse incidente soit $\underline{s}_0(t) = A \exp(i\omega t)$ juste à l'entrée de la plaque de verre, en B . L'éclairement associé est donc $E_0 = \frac{|\underline{s}_0(t)|^2}{2} = \frac{A^2}{2}$. L'onde réfléchie en M s'écrira donc :

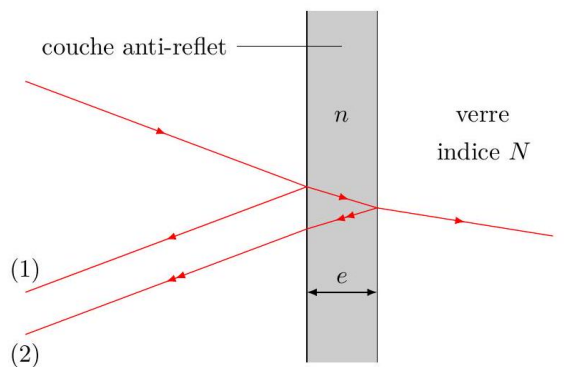
$$\underline{s}_r(M, t) = \frac{1 - N}{1 + N} \underline{s}_0(t - \tau) = \frac{1 - N}{1 + N} A e^{i\omega t} e^{-i\omega \tau}$$

où τ est le temps de propagation de B en M . L'éclairement (ou intensité) de l'onde réfléchie est alors :

$$E_r = \frac{|\underline{s}_r(M, t)|^2}{2} = \left(\frac{1 - N}{1 + N} \right)^2 E_0 = 0,04 E_0$$

Ainsi, 4% de la puissance incidente est réfléchie (ce qui est peu) et donc 96% de la puissance est transmise à la lame.

Une couche d'épaisseur e d'un milieu transparent d'indice n tel que $1 \leq n \leq N$ est déposée sur le verre. On ne tiendra compte que des deux premières réflexions sur chacun des dioptrés.



2. Expliquer qualitativement comment un tel dispositif peut réduire la puissance réfléchie.

L'œil qui n'accomode pas peut être assimilé à une lentille mince (le cristallin), la surface sensible (rétine) étant placée dans son plan focal image. Ainsi les deux rayons réfléchis (1) et (2) vont venir interférer sur la rétine. Si les interférences sont destructives un tel dispositif peut donc réduire la puissance réfléchie.

3. On suppose que l'onde incidente arrive en incidence normale. Quels sont les éclairissements E_1 et E_2 des ondes réfléchies ? Exprimer la différence de marche δ ; en déduire l'épaisseur minimale de la couche anti-reflets. En utilisant le script Python grâce au script Python CoucheAntiReflets.py, déterminer la valeur optimale de n .

Nous reprenons les notations de la question 1. Le signal lumineux incident en B juste à l'entrée de la couche anti-reflet d'indice n est $\underline{s}_0(t) = A e^{i\omega t}$. On a ensuite :

- Voie 1 : une réflexion air - couche et temps de propagation jusqu'à l'œil τ_1 :

$$\underline{s}_1(M, t) = \frac{1-n}{1+n} s_0(t - \tau_1) = \frac{1-n}{1+n} A e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau_1}$$

d'où :

$$E_1 = \frac{|\underline{s}_1(M, t)|^2}{2} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \frac{A^2}{2} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 E_0$$

- Voie 2 : une transmission air - couche, puis une réflexion couche - lame de verre suivie d'une transmission couche - air. Le temps de propagation jusqu'à l'œil est τ_2 :

$$\underline{s}_2(M, t) = \frac{2}{1+n} \frac{n-N}{n+N} \frac{2n}{1+n} s_0(t - \tau_2) = \frac{2}{1+n} \frac{n-N}{n+N} \frac{2n}{1+n} A e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau_2}$$

d'où :

$$E_2 = \frac{|\underline{s}_2(M, t)|^2}{2} = \left(\frac{2}{1+n} \right)^2 \left(\frac{n-N}{n+N} \right)^2 \left(\frac{2n}{1+n} \right)^2 E_0$$

La différence de marche en incidence normale est $\boxed{\delta = 2ne}$ correspondant à un aller retour dans la couche d'indice n .

L'éclairement en M (où est placé l'œil) est alors donné par la formule de Fresnel (interférence à deux ondes sinusoïdales) :

$$E_r = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)$$

Les interférences destructives sont obtenues pour $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) = -1$, c'est à dire :

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = p\pi \iff e = \frac{p\lambda_0}{4n}, p \in \mathbb{N}^*$$

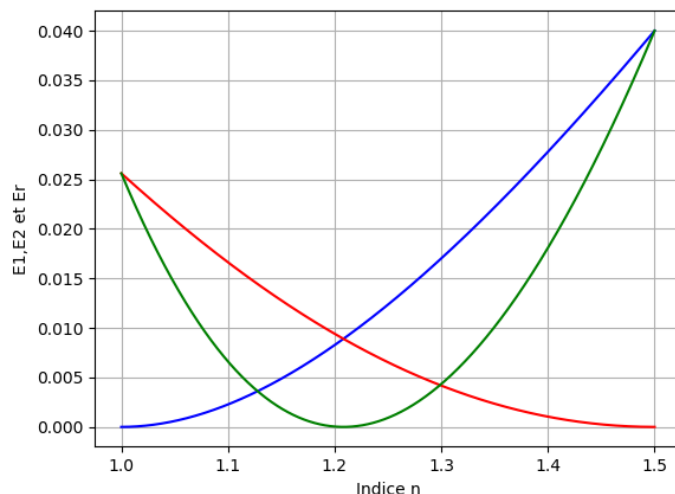
et la couche anti-reflets la plus mince possible correspond à $p = 1$, ce qui donne :

$$\boxed{e_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n}}$$

Pour cette valeur de e , l'éclairement réfléchi est :

$$\boxed{E_r = (\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2})^2}$$

Étudions E_r lorsque n varie entre 1 et N grâce au script Python fourni. En y représentant les courbes donnant E_1 et E_2 en fonction de n on constate qu'il existe une valeur de $n \approx 1,21$ telle que $E_1 = E_2$, ce qui annule complètement E_r . La couche anti-reflets fonctionne alors parfaitement et son épaisseur minimale est $e_{\min} = 124 \text{ nm}$



La lumière du soleil n'est pas monochromatique, on considère alors que la densité spectrale de l'onde incidente est $J_0(\omega)$. Les densités spectrales des ondes réfléchies sont alors $J_1(\omega) = \alpha_1 J_0(\omega)$ et $J_2(\omega) = \alpha_2 J_0(\omega)$ où les coefficients α_1 et α_2 dépendent de n et N et ont été calculés à la question 2.

L'éclairement de l'onde totale réfléchie à pour la bande de pulsations comprise entre ω et $\omega + d\omega$ est :

$$dE_r = \left[J_1(\omega) + J_2(\omega) + 2\sqrt{J_1(\omega)J_2(\omega)} \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) \right] d\omega \quad \text{avec} \quad \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

4. En supposant $J_0(\omega)$ constante sur tout le spectre, exprimer l'éclairement total E_r de l'onde réfléchie ; étudier le coefficient de réflexion en éclairement $R = E_r/E_0$ grâce au programme Python `CoucheAntiReflets.py`. Quelle doit être l'épaisseur de la couche pour une efficacité maximale ? Quel gain obtient-on par rapport à un panneau solaire dépourvu d'une telle couche ?

On a :

$$dE_r = J_0 \left[\alpha_1 + \alpha_2 + 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) \right] d\omega$$

avec :

$$\alpha_1 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 \left(\frac{n-N}{n+N}\right)^2 \left(\frac{2n}{1+n}\right)^2$$

Une intégration sur ω conduit à l'expression :

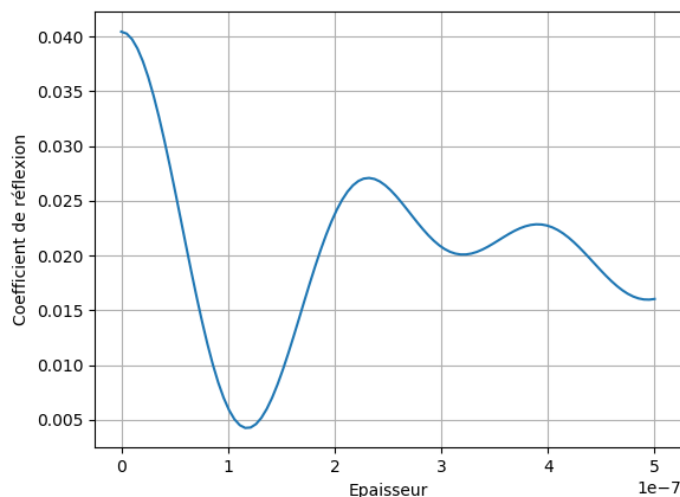
$$E_r = J_0\Delta\omega \left[\alpha_1 + \alpha_2 + 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\delta}{2c}\right) \cos\left(\frac{\omega_0\delta}{c}\right) \right]$$

où sinc est le sinus cardinal. En remarquant que $E_0 = J_0\Delta\omega$ est l'éclairement incident, on en déduit que :

$$R = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\delta}{2c}\right) \cos\left(\frac{\omega_0\delta}{c}\right)$$

avec $\delta = 2ne$ (on suppose toujours l'incidence normale).

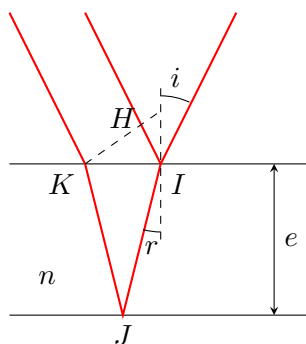
La courbe obtenue grâce au script Python (avec $n = 1,21$, valeur optimale obtenue à la question 3.) permet de voir que pour $e = 119 \text{ nm}$, R est minimal et que $R_{\min} = 4,3 \times 10^{-3}$. On a donc gagné un facteur 10 par rapport au coefficient de réflexion en puissance calculé à la question 1.



Toutefois, si on voulait réaliser une étude la plus précise possible, il faudrait faire varier à la fois n et e pour déterminer leur valeur optimale qui réduit R le plus possible.

5. Comment peut-on définir un coefficient de réflexion $R(i)$ en puissance pour une incidence i quelconque ? Compléter éventuellement le programme Python pour étudier ce coefficient $R(i)$. Que pensez-vous de l'efficacité d'une telle couche pour des angles d'incidence importants ?

En incidence oblique, il faut recalculer la différence de marche δ .



Soit M le point où est situé l'œil. Le principe du retour inverse et le théorème de Malus impliquent : $(MK) = (MH)$. La différence de marche entre les deux rayons est donc :

$$\delta = n IJ + n JK - IH \quad \text{avec} \quad IJ = JK = \frac{e}{\cos r} \quad \text{et} \quad IH = KI \sin i = 2e \tan r \sin i$$

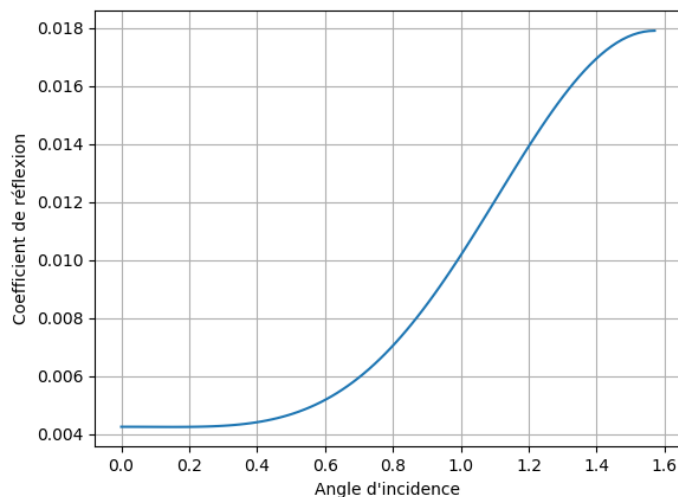
On a donc :

$$\delta = \frac{2e}{\cos r} (n - \sin r \sin i) = \frac{2ne}{\cos r} (1 - \sin^2 r) \quad \text{car} \quad n \sin r = \sin i$$

d'où :

$$\delta = 2ne \cos r$$

On modifie donc la fonction Python qui donne la différence de marche. Par souci de simplicité, on garde la valeur de $n = 1,21$ et de $e_{\min} = 119$ nm trouvées aux questions précédentes (en toute rigueur il faudrait aussi faire varier ces deux grandeurs pour trouver exactement les conditions optimales).



On constate que R reste sensiblement constant pour $0 \leq i \leq 0,4$ (ce qui correspond à 23°). Au-delà, R augmente fortement pour atteindre $R = 0,018$ lorsque $i \rightarrow \pi/2$. Cette dernière valeur est cependant encore égale à la moitié de la valeur obtenue à la question 1. (c'est à dire 0,04).

4 Méthode Flash-Laser

On considère une pièce cylindrique de rayon r , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et d'épaisseur e .

1. On suppose d'abord l'épaisseur e très petite de façon à pouvoir supposer la température uniforme $T(t)$ au sein de la pièce à un instant donné. La pièce est chauffée uniformément par une source de puissance P mise en route à l'instant $t = 0$, instant auquel la température intérieure T initiale vaut T_0 , température de l'extérieur.

- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T de la pièce en considérant que le flux thermique des pertes conducto-convectives est modélisé par une loi de Newton de la forme $P_{th} = h(T - T_0)S$, où h est le coefficient d'échange et S la surface de la pièce.

On applique le premier principe de la thermodynamique à la pièce entre t et $t + dt$. Son volume est $V = \pi r^2 e$ et sa variation d'énergie interne s'écrit :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \rho \pi r^2 e c \{ T(t + dt) - T(t) \} = \rho \pi r^2 e c \frac{dT}{dt}$$

et donc :

$$dU = P dt - h(T - T_0) S dt$$

avec :

$$S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r e = 2\pi r^2 \left(1 + \frac{e}{r} \right) \approx 2\pi r^2$$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{2h}{\rho e c} T = \frac{2h}{\rho e c} T_0 + \frac{P}{\rho \pi r^2 e c}}$$

- b) En déduire l'expression de la température T de la pièce en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique τ .

On peut introduire la constante de temps :

$$\boxed{\tau = \frac{\rho e c}{2h}}$$

et la solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_0 + \frac{P}{2\pi r^2 h} \quad \text{avec} \quad T(0) = T_0$$

d'où :

$$\boxed{T(t) = \frac{P}{2\pi r^2 h} (1 - e^{-t/\tau}) + T_0}$$

- c) On suppose que le chauffage s'effectue pendant une durée t_0 très inférieure à τ . En déduire une expression approchée de la température sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$. Quelle est la valeur maximale $T_{\max}$ atteinte par T ?

Comme $t \leq t_0 \ll \tau$ on peut se contenter d'un développement limité de l'exponentielle : $1 - e^{-t/\tau} \approx t/\tau$. L'expression de $T(t)$ devient :

$$\boxed{T(t) = \frac{P}{\rho \pi r^2 e c} t + T_0}$$

qui est une fonction affine du temps. La température maximale est donc atteinte à l'instant t_0 , ce qui conduit à :

$$T_{\max} = \frac{P}{\rho\pi r^2 ec} t_0 + T_0$$

d) Donner ensuite l'expression de T sur l'intervalle $[t_0, +\infty]$.

Pour $t > t_0$ on a $P = 0$ et l'équation différentielle vérifiée par la température devient :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}$$

Sa solution générale est :

$$T(t) = A' e^{-t/\tau} + T_0 \quad \text{avec} \quad T(t_0) = T_{\max}$$

ce qui conduit à :

$$T(t) = (T_{\max} - T_0) e^{-(t-t_0)/\tau} + T_0$$

e) En supposant que $\forall t_0, P \times t_0 = E$ (constant), que devient l'allure de la température si $t_0 \rightarrow 0$?

Si $P t_0 = E = \text{constante}$ et $t_0 \rightarrow 0$ (ce qui signifie que $P \rightarrow +\infty$ pour que le produit reste constant), on obtient :

$$T_{\max} = \frac{E}{\rho\pi r^2 ec} + T_0$$

d'où :

$$\forall t > 0, T(t) = \frac{E}{\rho\pi r^2 ec} e^{-t/\tau} + T_0$$

2. On s'intéresse désormais à la conduction axiale au sein de la pièce.

a) Établir l'équation de la diffusion thermique en supposant que $T = T(z, t)$ au sein du solide.

C'est une question de cours. On applique le premier principe à une tranche élémentaire de pièce située entre z et $z + dz$ et entre les instants t et $t + dt$. On obtient alors :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

b) En utilisant le modèle de Parker (voir l'annexe), donner l'expression de la température réduite sur la face arrière de la pièce définie par $u(t) = (T(e, t) - T_0)/(T_{\max} - T_0)$. Approcher cette expression pour les instants supérieurs au temps caractéristique de la diffusion (d'après le modèle de Parker).

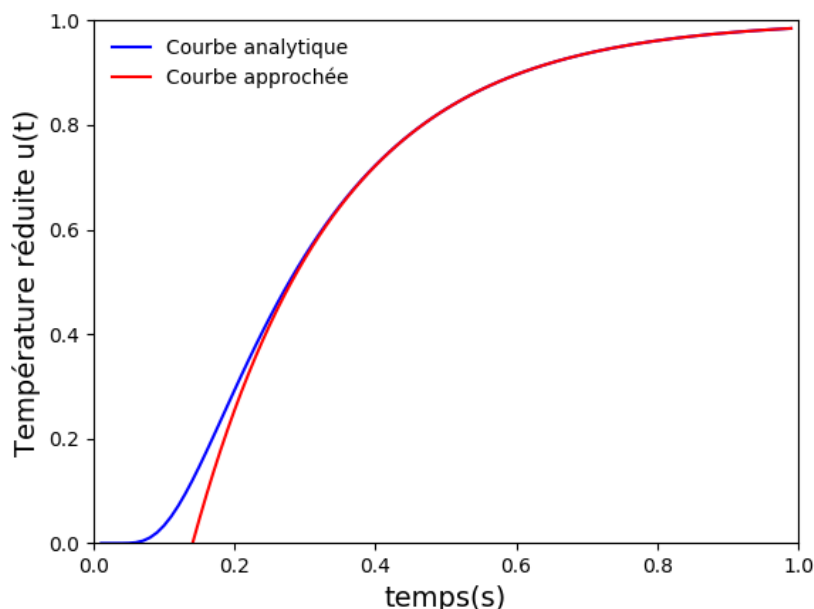
On obtient :

$$u(t) = \frac{T(e, t) - T(0, t)}{T_{\max} - T_0} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{e^2}\right) \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad t \gg e^2/(\pi D) = t_{\text{diff}}$$

En se contentant du premier terme de la série on obtient la valeur approchée :

$$u_{\text{approchée}}(t) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 D t}{e^2}\right)$$

- c) Compléter le script *PYTHON* fourni pour donner les représentations graphiques analytique exacte et approchée de la température réduite.



En traçant la courbe $u(t)$ avec Python, on se rend compte de la courbe n'évolue pratiquement pas au dessus de $u = 1/2$, qu'on prenne uniquement le premier terme de la série ou bien une centaine. On pourra donc déterminer D à partir de $u_{\text{approchée}}(t) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 Dt}{e^2}\right)$.

- d) En déduire que le temps de demi-montée $t_{1/2}$ (pour lequel u vaut $1/2$) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériaux.

On a :

$$u(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \approx 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 Dt}{e^2}\right)$$

donc :

$$D \approx \frac{2 \ln(2) e^2}{\pi^2 t_{1/2}}$$

Or on lit $t_{1/2} = 0,28$ s sur le graphique ce qui donne $D = 0,5 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ ce qui est bien cohérent avec le fichier fourni.

3. Étude du Dural.

- a) À l'aide de l'expérience de Balageas (détaillée dans l'annexe), estimer la diffusivité D du Dural.

En utilisant la méthode précédente :

$$D_{\text{Dural}} = \frac{2 \ln(2) e^2}{\pi^2 t_{1/2}}$$

et en prenant $e \approx 1$ cm (précisé en légende de la figure 2) et $t_{1/2} = 0,248$ s lu sur le graphique, on obtient :

$$D_{\text{Dural}} = 0,57 \text{ cm}.\text{s}^{-1}$$

- b) Comparer les temps caractéristiques des pertes convectives (pour $h = 5 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$) et de la conduction au sein de la pièce. Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives ?

Le temps caractéristique de convection est :

$$t_{\text{conv}} = \frac{\rho e S c}{h S} = \frac{\rho e c}{h} = \frac{2,8.10^3 \times 10^{-2} \times 880}{5} = 4,9.10^3 \text{ s}$$

et

$$t_{\text{diff}} = \frac{e^2}{\pi^2 D} = 0,18 \text{ s}$$

On a donc $t_{\text{conv}} \gg t_{\text{diff}}$. La convection n'a pas le temps de se faire et elle est donc négligeable sur des intervalles de temps caractéristiques inférieurs à la seconde.

- c) Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.

D'après l'étude faite au 1), pour un temps $t_0 \ll t_{\text{conv}}$, on peut écrire :

$$T_{\text{max}} = T_0 + \frac{E}{hS}$$

lorsque la conduction s'est établie (c'est à dire que la température est uniforme).

Comme on lit $\Delta T_{\text{max}} = T_{\text{max}} - T_0 = 0,316 \text{ K}$ sur la courbe, on peut en déduire $E_{\text{source}} \approx \Delta T_{\text{max}} hS = 0,316 \times 5 \times 0,01$ d'où :

$$E_{\text{source}} = 1,6.10^{-2} \text{ J}$$

C'est une énergie très faible ce qui est cohérent avec une impulsion IR-flash

- d) Quelles critiques peuvent être formulées concernant le modèle de Parker ?

La méthode paraît adaptée. La difficulté réside probablement dans le fait d'éviter les pertes latérales pour la pièce. L'ensemble de la mesure doit être réalisée dans un environnement très stable en température pour pouvoir mesurer des écarts aussi faibles.

Annexe

Méthode de Parker

La technique flash laser a été développée par Parker (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le Modèle de Parker consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur e et de rayon r . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposées nulles sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe de l'échantillon. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace. À une profondeur z donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où D est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(z, t) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right) \right)$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail. La figure 1 donne un exemple de montage :

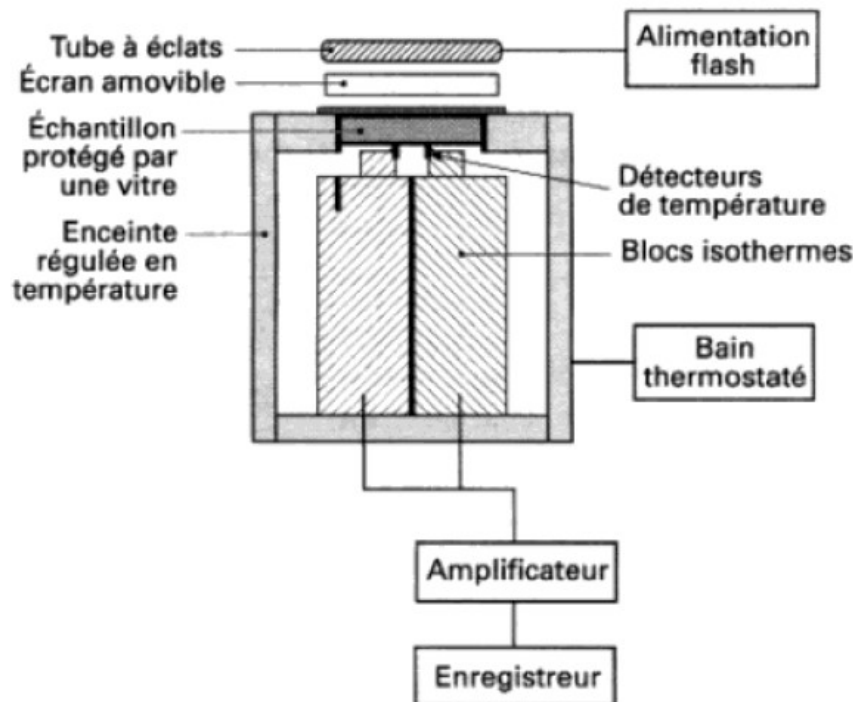


FIGURE 1 – Exemple de montage expérimental de méthode Flash-Laser

Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est $c = 880 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Des mesures de diffusivité en faces arrière ont été réalisées (Daniel Balageas, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms (maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique ϵ . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur à priori fiable de la diffusivité (méthode de Parker). Deux thermogrammes sont présentés : la température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62.

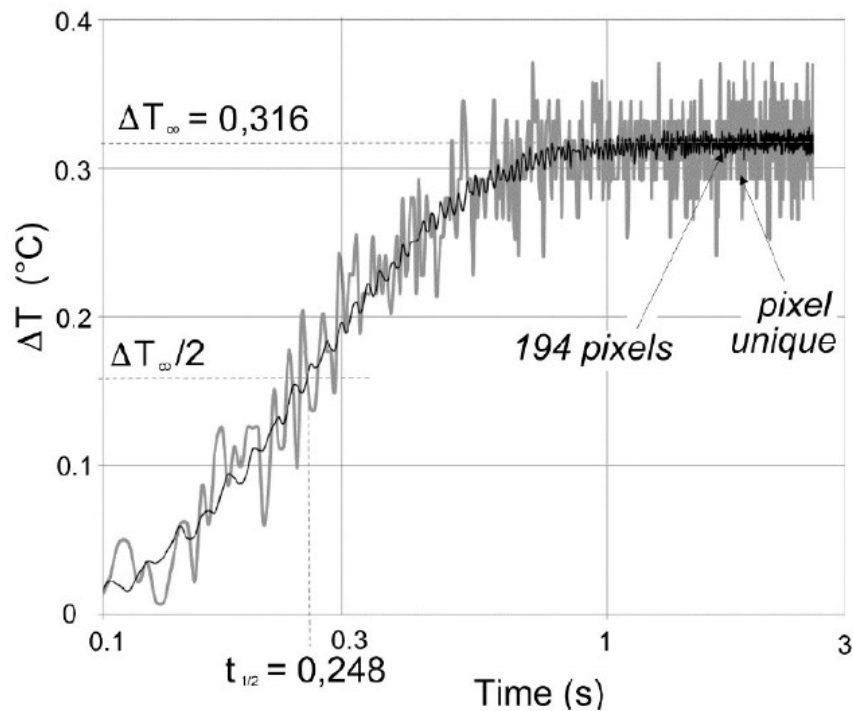


FIGURE 2 – Thermogramme d'une plaque de Dural de surface $S = 0,01 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$