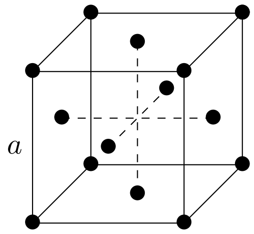
1 Cristallographie

1. La maille élémentaire est un cube d'arête a. Il y a un atome sur chaque sommet du cube et un au centre de chaque face.



Dans une maille, il y a en propre :

$$N = 8/8 + 6/2 = 4 \text{ atomes}$$

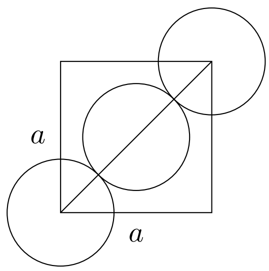
ce qui donne une masse volumique :

$$\rho = \frac{N\,m}{a^3} = \frac{N\,\mathrm{M(Rh)}}{\mathcal{N}_A\,a^3}$$

où m est la masse d'un atome, égale à $\mathrm{M(Rh)}/\mathcal{N}_A$ où $\mathcal{N}_A$ est la constante d'Avogadro. On en déduit :

$$\boxed{a = \left(\frac{N\,\mathrm{M(Rh)}}{\mathcal{N}_A\,\rho}\right)^{1/3} = 381 \text{ pm}}$$

Les atomes, assimilés à des boules de rayon R (rayon métallique), se touchent le long de la diagonale d'une face du cube :



On a donc :

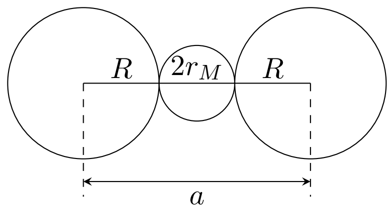
$$\boxed{4R = \sqrt{2}\,a \iff R = \frac{\sqrt{2}}{4}\,a = 135 \text{ pm}}$$

2. La coordinence d'un atome est son *nombre de plus proches voisins.* Dans un réseau métallique cubique faces centrées elle est identique pour chaque atome du réseau et elle vaut 12.

3. La compacité C est le rapport entre le volume effectivement occupé par les atomes (assimilés à des boules de rayon R) et le volume de la maille cubique :

$$\boxed{C = \frac{N \times \frac{4\pi}{3}\,R^3}{a^3} = 4 \times \frac{4\pi}{3}\,\frac{2\sqrt{2}}{4\times 4\times 4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0{,}74}$$

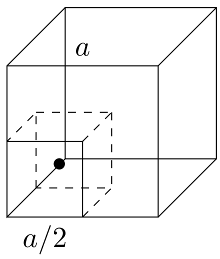
4. Les sites octaédriques O d'un réseau cubique à faces centrées occupent le milieu de chaque arête, ainsi que le centre du cube. Ils sont tous équivalents. Si on raisonne sur un milieu d'arête on peut y insérer une boule de rayon r_M, entre les deux atomes de rayon R qui occupent les sommets



On a :

$$\boxed{2R + 2r_M = a \iff r_M = \frac{a}{2} - R = 55 \text{ pm}}$$

Les sites tétraédriques occupent les centres des 8 petits cubes d'arête $a/2$. Un de ces 8 sites est représenté sur le schéma ci-dessous :



Il y a contact le long de la demi-grande diagonale du petit cube :

$$R + r_T = \sqrt{3}\ \frac{a}{4}$$

et donc :

$$\boxed{r_T = \sqrt{3}\ \frac{a}{4} - R = 30 \text{ pm}}$$

5. Comptons le nombre de sites octaédriques qui appartiennent en propre à un maille cubique :

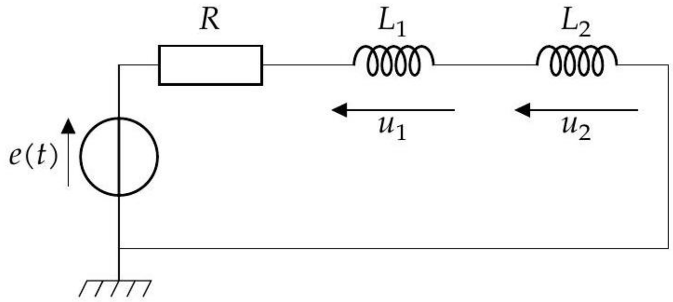
$$N_O = 12/4 + 1 = 4$$

On en déduit :

$$\boxed{C = \frac{N \times \frac{4\pi}{3} R^3 + N_O \times \frac{4\pi}{3} r_M^3}{a^3} = \frac{16\pi}{3}\ \frac{R^3 + r_M^3}{a^3} = 0{,}80}$$

2 Capteur de position. Extrait Centrale - PSI - 2018

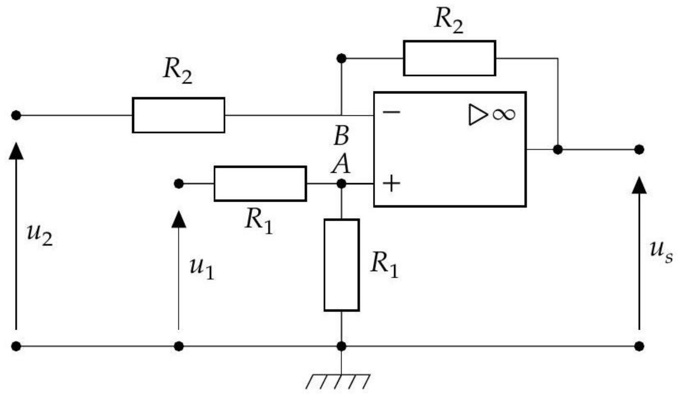
1. On considère le montage :



Le montage a une structure de pont diviseur de tension :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{u}_1(t) = \dfrac{L_1 j\omega}{(L_1+L_2)\,j\omega + R}\,\underline{e}(t) \\[2ex] \underline{u}_2(t) = \dfrac{L_2 j\omega}{(L_1+L_2)\,j\omega + R}\,\underline{e}(t) \end{cases}}$$

2. On va voir qu'il s'agit d'un montage soustracteur :



Les équations électriques sont :

$$\begin{cases} \underline{V}_+ = \underline{V}_- & \text{AO idéal en régime linéaire} \\ \underline{V}_+ = \frac{R_1}{2R_1}\underline{u}_1 & \text{pont diviseur en } A \\ \frac{\underline{u}_2 - \underline{V}}{R_2} + \frac{\underline{u}_s - \underline{V}}{R_2} = 0 & \text{loi des nœuds en } B \end{cases}$$

En éliminant $\underline{V}_+$et $\underline{V}_-$: $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 + \underline{u}_s$. Donc $\underline{u}_s = K\left(\underline{u}_1 - \underline{u}_2\right)$ avec $\boxed{K=1}$.

3. En utilisant les résultats des deux questions précédentes :

$$\underline{u}_s = \frac{(L_1 - L_2)\,j\omega}{(L_1+L_2)\,j\omega + R}\,\underline{e} \quad \text{donc} \quad \underline{u}_s = \frac{\Delta z}{\delta}\,\frac{\frac{2L_e j\omega}{R}}{1 + \frac{2L_e j\omega}{R}}\,\underline{e}$$

La fonction de transfert est don bien $\underline{T}(j\omega) = T_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\boxed{\begin{cases} T_0 = \frac{\Delta z}{\delta} \\ \omega_0 = \frac{R}{2L_e} \end{cases}}$

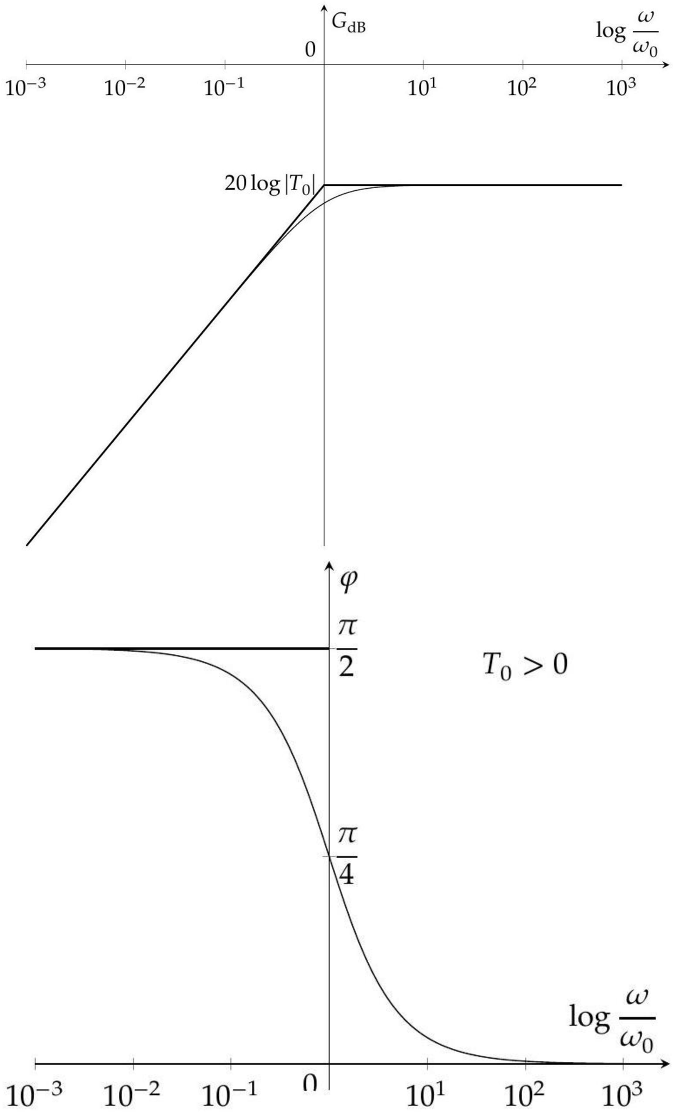
4. En basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$: $\underline{T}(j\omega) \simeq T_0 j \frac{\omega}{\omega_0}$

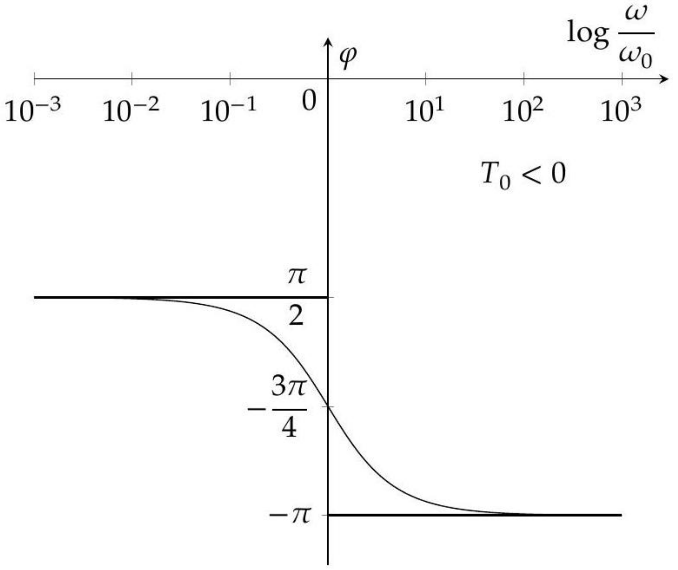
   Donc si $T_0 > 0$: $\begin{cases} G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20\log|T_0| + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi(\omega) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et si $T_0 < 0$: $\begin{cases} G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20\log|T_0| + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi(\omega) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

   En haute fréquence : $\omega \gg \omega_0$: $\underline{T}(j\omega) \simeq T_0$.

   Donc si $T_0 > 0$: $\begin{cases} G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20\log|T_0| \\ \varphi(\omega) \to 0 \end{cases}$ et si $T_0 < 0$: $\begin{cases} G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20\log|T_0| \\ \varphi(\omega) \simeq -\pi \end{cases}$

   Le diagramme de Bode asymptotique du filtre est alors :





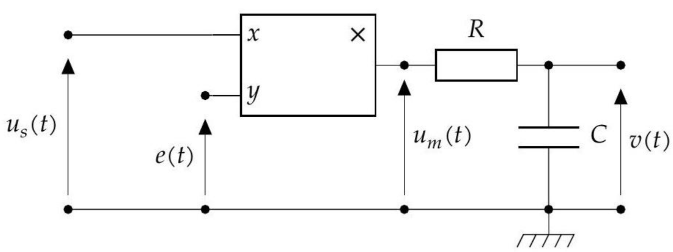
5. Le filtre étudié est un filtre passe-haut du premier ordre. ω_0 est la pulsation de coupure du filtre.
6. Si $\omega \gg \omega_0$, alors $\underline{T}(j\omega) \simeq T_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$. Notons f_0 la fréquence de coupure : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Lorsque $f \gg f_0$, la fonction de transfert est proportionnelle au déplacement de l'objet.
7. La fréquence de coupure est $f_0 = 0{,}99$ kHz et f =4 kHz.

   Si on considère que $f \gg f_0$ (ce qui est discutable), alors $u_s(t) = T_0\, e(t)$ ce qui entraîne $u_s(t) = E\,\frac{\Delta z}{\delta}\cos(\omega t)$. On a donc $\varphi = 0$.

   Électronique de conditionnement
8. À la sortie du multiplieur : $s_m(t) = K_m e(t) u_s(t)$, donc $s_m(t) = K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta}\cos^2(\omega t)$ et, en définitive :

$$\boxed{s_m(t) = \frac{1}{2}K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta}[1 + \cos(2\omega t)]}$$

   La valeur moyenne de $s_m(t)$ est proportionnelle au déplacement de l'objet.
9. Un filtre passe bas permet d'obtenir une tension continue $S_m = \langle s_m(t)\rangle_T$.



La fonction de transfert du filtre est $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}}{\underline{u}_m} = \frac{1}{1+RCj\omega}$

La fréquence de coupure de ce fitre est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Si $f \gg f_c$, alors la composante variable de $u_m(t)$ est fortement atténuée et $v(t) \simeq \langle u_m(t)\rangle_T$.

10. Avec le montage étudié : $S_m = \frac{1}{2}K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta}$. On a donc $\boxed{\frac{S_m}{\Delta z} = \frac{K_m E^2}{2\delta}}$

11. L'écart relatif de position est : $\frac{\Delta z}{\delta} = \frac{2S_m}{K_m E^2}$.
    La plus petite valeur mesurable correspond à S_m =10 mV. On en déduit que :

$$\boxed{\left(\frac{\Delta z}{\delta}\right)_{\text{min}} = 5{,}6 \cdot 10^{-4}}$$