Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$

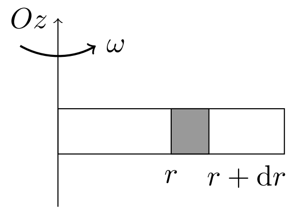
# 1 Équilibre de l'atmosphère

On considère l'atmosphère assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M$, en équilibre dans le champ de pesanteur $g$ supposé uniforme. On suppose que la pression $P$ ne dépend que de l'altitude $z$ et on note $P_0$ la pression en $z = 0$.

1. On suppose que $T(z) = T_0 - az$ ($a$ constante $> 0$). Montrer que dans ce cas :
$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^q$$
et donner l'expression de l'exposant $q$ en fonction de $M$, $g$, $R$ et $a$.
2. On suppose maintenant que $P(z)$ et $\rho(z)$ sont liés par $P(z)/[\rho(z)]^\gamma =$ Cste où $\gamma$ est l'exposant adiabatique du gaz. C'est le modèle de l'atmosphère "adiabatique". Montrer qu'il s'agit d'un cas particulier de la question précédente et déterminer l'exposant $q$ associé en fonction de $\gamma$. En déduire que la température vérifie une loi de la forme :
$$T(z) = T_0 - az$$
et déterminer l'expression du coefficient $a$ en fonction de $\gamma$, $M$, $g$ et $R$. En déduire aussi que :
$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Mgz}{RT_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

# 2 Centrifugeuse

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R$ et de longueur $L$, tournant autour d'un axe vertical $Oz$ à la vitesse angulaire constante $\omega$. Un gaz supposé parfait est injecté dans le cylindre. Nous allons étudier la répartition des molécules de gaz dans le cylindre en fonction de la distance $r$ à l'axe $Oz$ lorsque ce gaz est en équilibre relatif dans le cylindre.




1. On considère que les molécules sont de masse $m$ et thermostatées à la température $T$. On note $P(r)$ la pression, $n^*(r)$ la densité particulaire (nombre de molécules par unité de volume) et $\rho(r)$ la masse volumique du gaz à la distance $r$ de $Oz$.

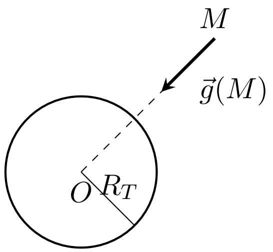
   Faire un bilan des forces appliquée à une tranche de gaz comprise entre $r$ et $r + \mathrm{d}r$, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On exprimera la résultante des forces de pression en fonction de la dérivée de $P(r)$.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche de gaz (dans le référentiel terreste), assimilée à un point matériel de masse $\delta m$ situé à la distance $r$ de $Oz$, trouver l'équation qui relie $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, $\rho(r)$, $S = \pi R^2$ et $\omega$.
3. En déduire la densité $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre en fonction de $r$. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation.

# 3 Atmosphère d'une planète

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère de la Terre et on l'assimile à un gaz parfait de molécules de masse molaire

$M_a = 29$ g.mol$^{-1}$. On note respectivement $P(M)$ et $\mu(M)$ la pression et la masse volumique au point $M$. La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée $T_0$. La pression au sol est notée $P_0$.

On suppose l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ radiale et d'intensité uniforme : $\|\vec{g}(M)\| = g_0 = 9{,}8$ m.s$^{-2}$.



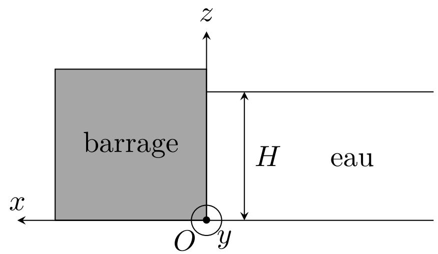

1. À l'aide de l'équation locale de la statique des fluides établir la relation entre $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ et l'accélération de la pesanteur $g_0$ à la distance $r \geqslant R_T$ du centre de la planète Terre.
2. Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme $P(r) = C_0 \exp\left(-\frac{r}{H}\right)$ dans l'atmosphère terrestre ($r \geqslant R_T$). Exprimer le facteur $C_0$ et la hauteur d'échelle $H$ en fonction de $P_0, M_a, g_0, R$ et $T_0$.
3. Calculer $H$ pour $T_0 = 293$ K.
4. Expliciter grâce au modèle précédent $\mu(r)$ en fonction de $r$, $R_T$, $H$ et $\mu_0 = \mu(R_T)$. On précisera l'expression de $\mu_0$ en fonction de $P_0$, $M_a$, $R_T$ et $T_0$.
5. Montrer que l'expression de la masse totale de l'atmosphère terrestre, d'extension infinie dans le modèle étudié, se met sous la forme suivante : $m_{\text{atm}} = \frac{4\pi P_0}{g_0}\left[2H^2 + 2HR_T + R_T^2\right]$. En déduire une expression approchée, puis effectuer l'application numérique en prenant $P_0 = 1{,}0$ bar.

On donne les intégrales :

$$\int_0^\infty u^2 \exp(-u)\mathrm{d}u = 2 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty u \exp(-u)\mathrm{d}u = 1$$

# 4 Barrage

Un barrage plan est un édifice qui présente une surface verticale plane en contact avec une retenue d'eau. On suppose la masse volumique $\rho$ de l'eau est constante et on note $H$ la hauteur d'eau.




1. La pression à la surface de l'eau (en $z = H$) est la pression atmosphérique $P_0$. Déterminer la pression $P(z)$ dans l'eau.
2. Calculer la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur la surface solide du barrage, de longueur $L$ selon $Oy$.
3. Même question si la surface du barrage en contact avec l'eau est un morceau de cylindre de rayon $R$ et délimité par l'angle $\alpha$ (cf. figure). La hauteur d'eau est toujours $H$.