

DS n°1

(Samedi 27 septembre 2025 - Durée 3h30)

Données générales pour toute l'épreuve :Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ Célérité de la lumière : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ **1 Atomistique**

1. L'élément oxygène possède le numéro atomique $Z = 8$. Indiquer sa configuration électronique dans son état fondamental.
2. Quel est son nombre d'électrons de valence ? Dans quelle colonne du tableau périodique est-il situé ? Dans quelle période ?

L'électronégativité de O est assez élevée, ce qui lui donne un caractère oxydant relativement marqué. C'est pour cela que la plupart des éléments que l'on rencontre à l'état naturel se trouvent sous forme d'oxydes, comme le carbone C ($Z = 6$) dans la molécule CO_2 ou encore l'azote N ($Z = 7$) avec l'ion NO_3^- .

3. Donner en la justifiant la formule de Lewis de CO_2 et donner sa géométrie.
4. Dans l'ion NO_3^- , l'azote est l'atome central. Donner la formule de Lewis la plus stable de cet ion, c'est à dire celle qui contient le moins de charge formelles possibles. Donner la géométrie de cet ion.
5. L'oxygène oxyde aussi la plupart des métaux et forme des oxydes ioniques solides. Un de ceux-ci est l'oxyde de plomb $\text{PbO}_{(s)}$.

Données : $Z(\text{Pb}) = 82$; $M(\text{Pb}) = 207 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g.mol}^{-1}$.Rayons ioniques : $\text{Pb}^{2+} : r_+ = 120 \text{ pm}$; $\text{O}^{2-} : r_- = 140 \text{ pm}$

- a) Justifier l'ordre de grandeur de la masse molaire du plomb par rapport à $Z(\text{Pb})$.
- b) Définir les énergies de première et de deuxième ionisation du plomb. Sachant que leurs valeurs respectives sont 715 kJ.mol^{-1} et 1450 kJ.mol^{-1} , si on soumet des atomes de plomb à un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 120 \text{ nm}$, peut-on observer la première ionisation ? La deuxième ?

L'oxyde de plomb PbO a une structure cristalline de type CsCl : les anions forment une structure cubique simple et les cations occupent le centre de la maille cubique, d'arête a . Dans une structure idéale, les anions et cations plus proches voisins sont en contact, c'est à dire que les sphères associées au ions de charges opposées sont tangentes entre elles.

- c) Déterminer la longueur a de l'arête de la maille cubique en supposant la structure idéale.
- d) Définir et calculer sa compacité C .
- e) En utilisant r_+ et r_- donner l'expression de la masse volumique ρ de PbO . Application numérique : calculer ρ .

2 Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects de l'accordeur électronique d'une guitare qui comporte les six cordes traditionnelles qui, lorsqu'elles sont bien accordées, possèdent les fréquences suivantes :

Corde	Fréquence f_{ac}
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196,0 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée de fréquence f_{co} . Le principe de fonctionnement de l'accordeur est le suivant :

- Sélection de la corde à accorder (f_{ac} est donc fixée par le choix de la corde).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplification assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification de ce signal et filtrage.
- Extraction de la fréquence fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Informations sur l'amplificateur opérationnel :

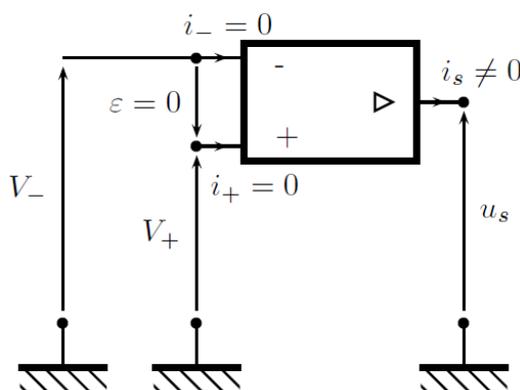


FIGURE 1 – Amplificateur opérationnel idéal utilisé en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Il est alimenté en ± 15 V par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel idéal présente de très fortes impédances d'entrée, les

courants en entrée sont extrêmement faibles (comme pour un circuit multiplieur par exemple). On considère que :

$$i_+ = i_- = 0$$

L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le **régime linéaire** où la tension de sortie est reliée à la tension différentielle d'entrée ε par la loi (1) donnée ci-dessous et le **régime non linéaire** où la tension de sortie sature au niveau des tensions $\pm 15 \text{ V} = \pm V_{\text{sat}}$. C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \underline{\mu}\varepsilon = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\varepsilon \quad (1)$$

avec $\mu_0 \simeq 10^6$ et $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi en considérant, dans le cadre du modèle d'amplificateur opérationnel idéal, que le gain $\mu_0 \rightarrow \infty$, on n'obtient une sortie bornée que si $\varepsilon = 0$, donc

$$\text{en régime linéaire : } \varepsilon = 0 \quad \text{soit} \quad V_+ = V_-$$

En fonctionnement non linéaire, on a $u_s = +V_{\text{sat}}$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $u_s = -V_{\text{sat}}$ lorsque $\varepsilon < 0$.

A. Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

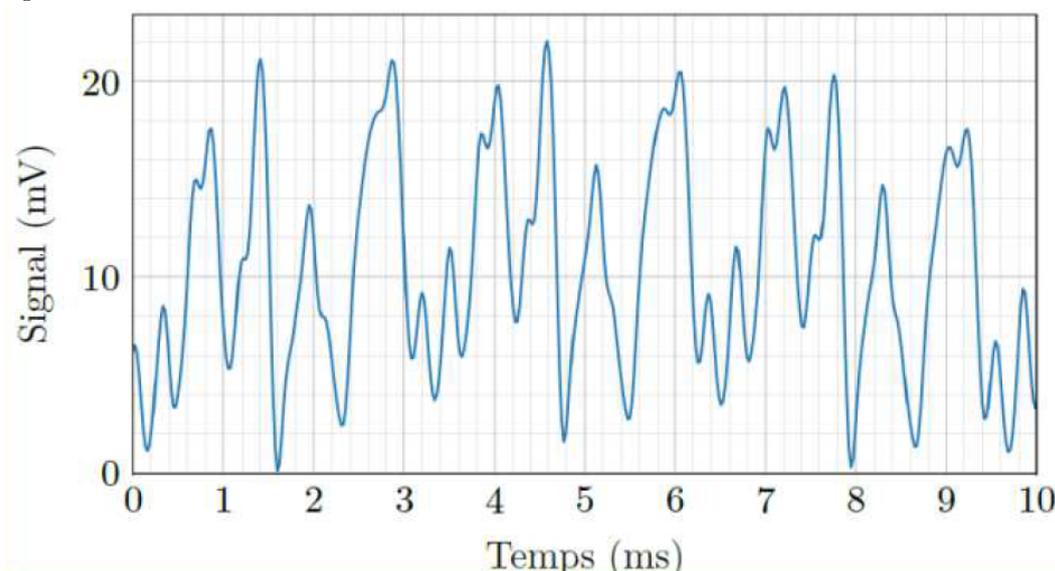


FIGURE 2 – Signal de la guitare

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (si on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

B. Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre (F_a) de la figure 3.

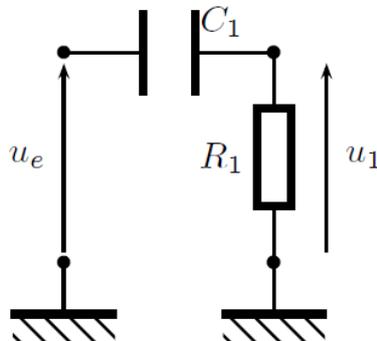


FIGURE 3 – Filtre (F_a)

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω de ce signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre?

C. Deuxième filtre

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On étudie les filtres de la figure 4.

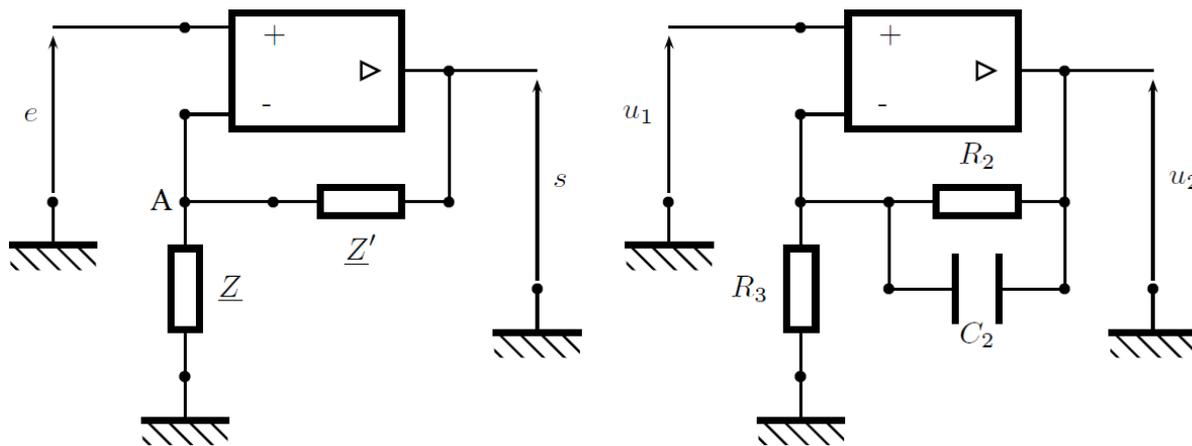


FIGURE 4 – Deuxième filtre (à droite) (F_b)

9. Soit le filtre de la figure 4 à gauche. Montrer que sa fonction de transfert \underline{H} est donnée par¹ :

$$\underline{H} = 1 + \frac{Z'}{Z}$$

1. On pourra par exemple utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels

Que devient \underline{H} si les impédances sont $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = R'$? Quel serait dans ce cas l'intérêt du montage?

En réalité, en sortie du filtre (F_a), le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre (F_b) de la figure 4 à droite.

10. Quelle est l'impédance \underline{Z}_{eq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
11. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \frac{u_2}{u_1}$ de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2 .
12. Mettre \underline{H}_2 sous la forme :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

13. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence? en haute fréquence?
14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega, R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

D. Filtrage sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur f_{ac} (on suppose la corde légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera étudié dans la dernière partie du problème (partie supprimée).

Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

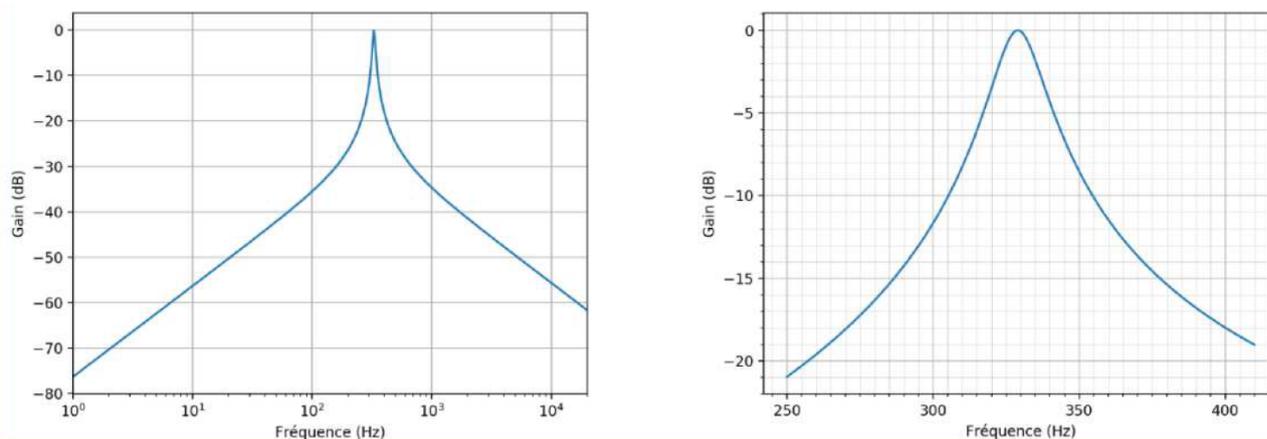


FIGURE 5 – Diagramme de BODE en gain du filtre (F_c)

15. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique?
16. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB et de son facteur de qualité. Commenter.

17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2 .

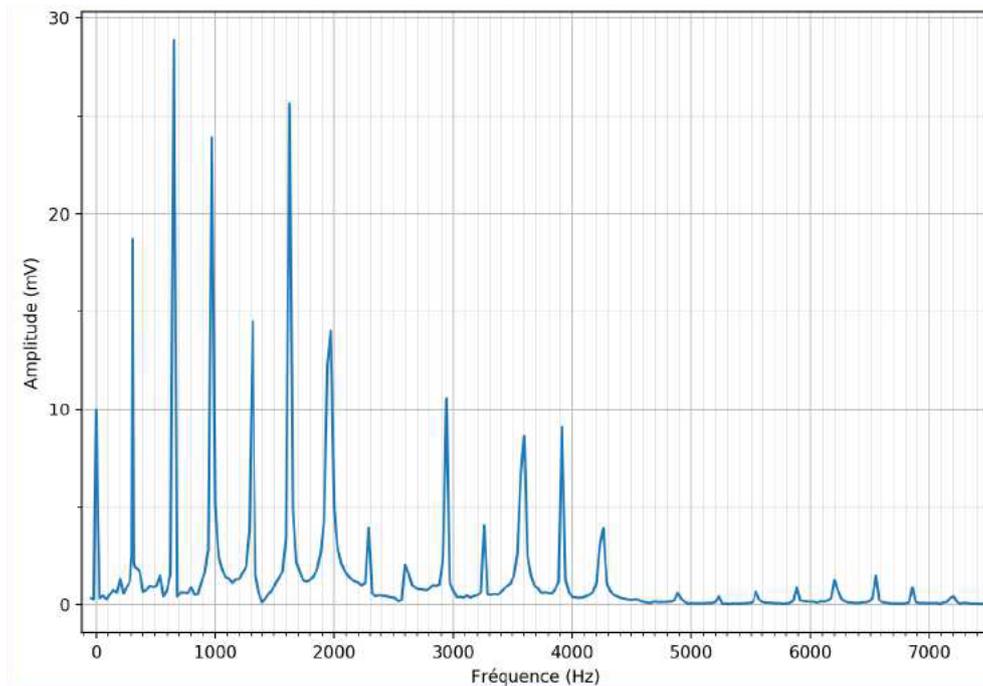


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

18. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
19. En le justifiant soigneusement, préciser quel spectre correspond à la sortie du premier filtre (F_a), parmi les 4 spectres présentés dans la figure 7.
20. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
21. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

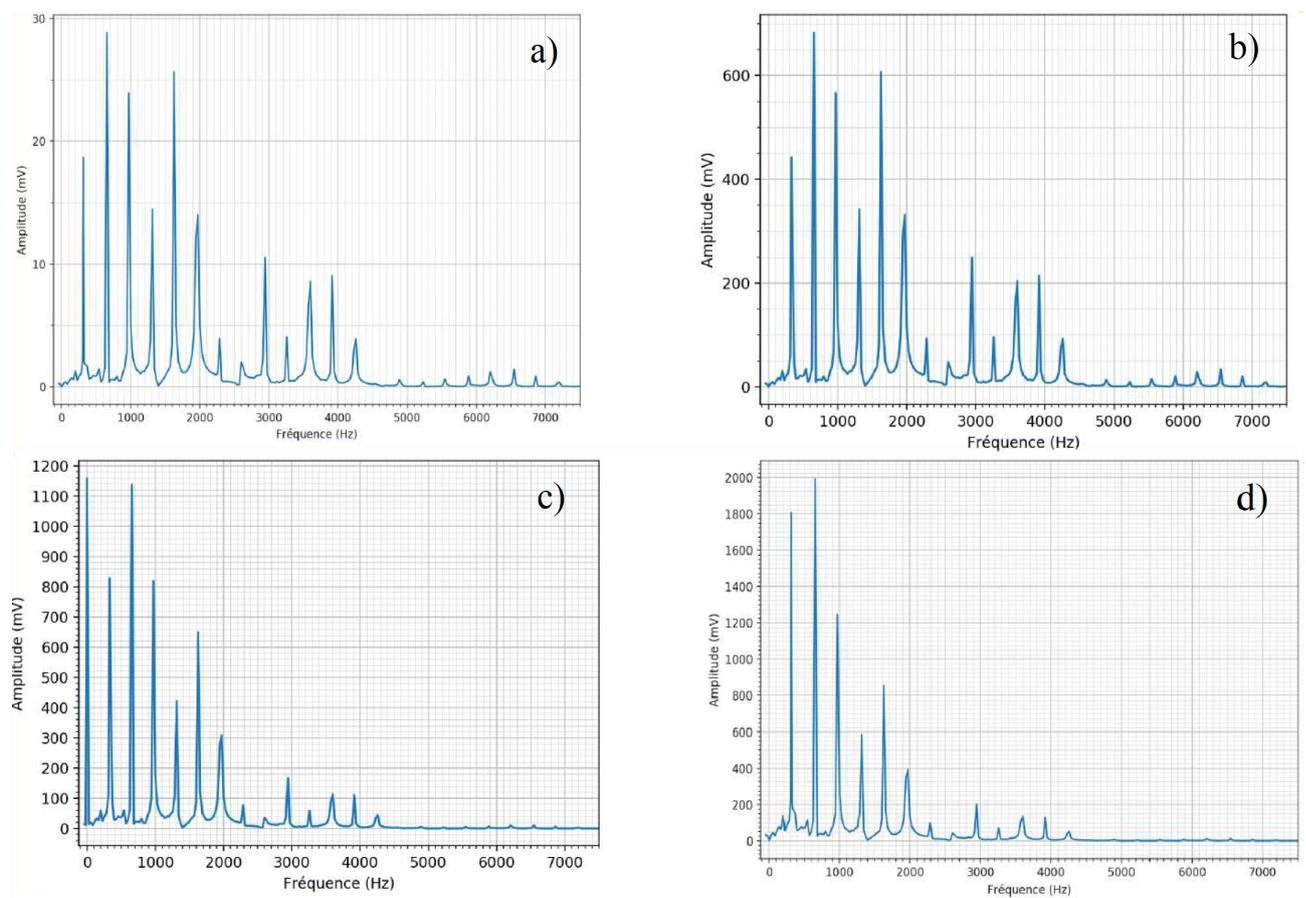


FIGURE 7 – Spectres (a), (b), (c) et (d).

3 Mesure de vitesses et de distances par un radar

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

On notera j l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$.

Un radar est un dispositif émettant une onde électromagnétique sinusoïdale de la bande HF (haute fréquence, entre 3 et 30 MHz) et recevant l'onde réfléchi par un objet métallique. Ce dispositif permet de mesurer à la fois la vitesse de l'objet et sa distance au radar selon des principes que l'on va étudier dans ce problème. Aucune connaissance sur les ondes électromagnétiques n'est nécessaire pour traiter le sujet.

Lorsque l'onde radar incidente se réfléchit sur un objet métallique mobile à la vitesse $\pm U\vec{u}_x$, cela entraîne un décalage de la fréquence f_r de l'onde réfléchi par rapport à celle f de l'onde incidente. Ce phénomène nommé effet Doppler est régi par la relation ci-dessous, valable dans la limite où U est très inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide :

$$f_r - f \approx \pm \frac{2U}{c} f. \quad (1)$$

La relation (1) est à la base de la vélocimétrie radar, par exemple pour le contrôle routier. Le symbole \pm (plus ou moins) regroupe des situations où l'objet s'éloigne ou s'approche du radar. L'écart entre ces deux fréquences, $f_D = |f_r - f|$, proportionnel à la vitesse à mesurer est appelé décalage Doppler. Il est souvent inférieur à 1 Hz et il concerne une onde dont la fréquence initiale est de l'ordre de 10 MHz. La mesure précise de cette minuscule variation est réalisée par détection synchrone, technique dont la section I introduit le principe.

Parallèlement, l'analyse de l'onde réfléchi permet aussi de déterminer la distance entre l'objet et le radar. Ce calcul de distance fait lui-aussi appel à la détection synchrone (section II) et, dans les installations modernes, on la conduit conjointement à la détermination des décalages Doppler. Par souci de simplicité, on dissocie l'étude de ces deux aspects.

On admettra que l'onde émise par le radar provient d'une tension sinusoïdale $v_e(t)$ de fréquence f et que l'onde reçue est convertie en une tension sinusoïdale $v_r(t)$ de fréquence f_r .

I - Mesure d'une différence de fréquence par détection synchrone

On considère deux tensions sinusoïdales $v_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ et $v_2 = B \cos(2\pi f_2 t + \varphi_0)$, où A, B et φ_0 sont des constantes, dont on souhaite mesurer l'écart de fréquence $f_2 - f_1$, supposé très inférieur aux fréquences f_1 et f_2 . Le montage de détection synchrone qui permet d'y parvenir est représenté schématiquement sur la figure 8 : il est formé d'un multiplieur analogique \mathcal{M} (qui donne une tension de sortie proportionnelle au produit de ses deux tensions d'entrée) et d'un filtre \mathcal{F} dont la nature sera étudiée plus loin.

Q18. Exprimer à un facteur près le signal intermédiaire v_i , puis justifier que son spectre fait apparaître les fréquences $f_2 + f_1$ et $|f_2 - f_1|$. Indiquer le type de filtrage qui permet d'obtenir, à la sortie du filtre, un signal v_d de fréquence $|f_2 - f_1|$.

Le traitement des signaux radars fait intervenir des composants spécifiques aux hautes fréquences. Pour des ultrasons au contraire, avec des fréquences de l'ordre de 10^4 Hz, des composants usuels disponibles dans un lycée (résistances, condensateurs et bobines d'auto-induction) fonctionneraient.

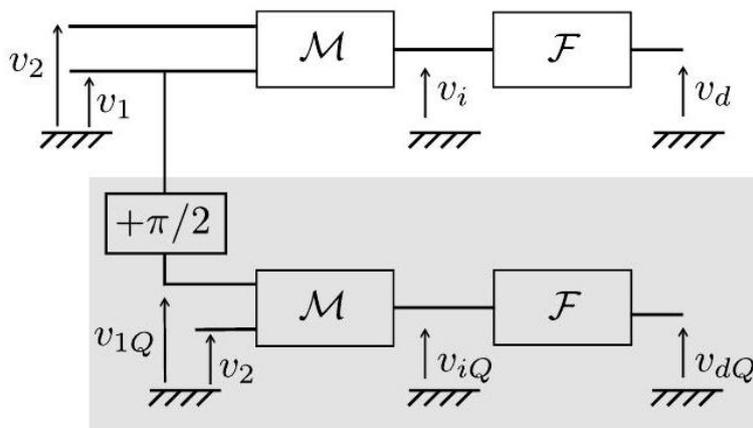


FIGURE 8 – Principe d'un montage de détection synchrone. Jusqu'à la question Q20 incluse, la partie inférieure sur fond gris n'a pas à être considérée.

- Q19.** Proposer pour \mathcal{F} un schéma électrique de filtre passif convenable, sans préciser pour l'instant les valeurs des composants. Un filtre d'ordre 1 est acceptable mais le jury valorisera davantage un filtre d'ordre 2, plus efficace.
- Q20.** Exprimer la fonction de transfert du montage de la question précédente. Pour $f_1 \approx f_2 \approx 40$ kHz, proposer des valeurs réalistes pour les composants du filtre \mathcal{F} .

À l'issue du filtrage, v_d est pratiquement sinusoïdal et mesurer sa fréquence revient à mesurer $|f_2 - f_1|$, ce qui était le but à atteindre. Cependant, dans le cas de l'effet Doppler (où $f_1 = f$ et $f_2 = f_r$), il est important de connaître le signe de $f_2 - f_1$. Pour cela, on complète le montage de la figure 8 par une seconde voie (représentée sur fond gris) dans laquelle on applique des opérations analogues après avoir déphasé v_1 de $+\pi/2$ (démodulation en quadrature).

- Q21.** Dans l'hypothèse d'un filtrage idéal, exprimer le signal v_{dQ} et expliquer comment son observation conjointe à celle de v_d permet d'obtenir le signe de $f_2 - f_1$.

II - Mesure de distance par modulation de fréquence

La mesure de la distance des objets réflecteurs fonctionne elle aussi par détection synchrone grâce à une modulation de la fréquence de l'onde émise. Alors qu'un signal de fréquence f_0 constante varie selon $\cos(2\pi f_0 t)$, le champ électrique émis par l'antenne du radar est proportionnel à la tension d'émission $v_e(t)$, T_m -périodique et définie sur une période par :

$$\forall t \in \left[0, T_m\right], v_e(t) = A \cos \Phi(t) \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = 2\pi \left(f_0 + \frac{Bt}{2T_m}\right)t \quad (2)$$

La grandeur positive B , homogène à une fréquence et très inférieure à f_0 , est appelée largeur de bande. La période de répétition T_m est de l'ordre de quelques centièmes de secondes et f_0 de l'ordre de 10 MHz .

On définit la fréquence instantanée $f(t)$ de v_e par $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}(t)$.

- Q22.** Exprimer $f(t)$ et tracer schématiquement le graphe de ses variations sur deux périodes.

La cible qui réfléchit l'onde est supposée ici immobile et se trouve à la distance d de l'antenne émettrice. À l'instant t , la station radar dispose du signal d'émission $v_e(t)$ et du signal réfléchi $v_r(t)$. Ce dernier provient de la réflexion par la cible du signal émis un peu plus tôt, de sorte que sa fréquence $f_r(t)$ à l'instant t est celle que possédait v_e à l'instant $t - \tau$.

- Q23.** Donner l'expression de τ . Pour $d = 10$ km, vérifier qu'il est très inférieur à T_m , puis représenter sur un même graphique les variations de $f(t)$ et $f_r(t)$. Les deux courbes seront légendées et tracées en deux couleurs distinctes. Pour ce graphique seulement, on prendra $\tau = T_m/10$.

Les tensions $v_e(t)$ et $v_r(t)$ sont appliquées à l'entrée du montage de détection synchrone (représenté figure 8 et étudié dans la section I).

- Q24.** Exprimer la fréquence f_d du signal démodulé v_d . Montrer que sa mesure permet d'accéder à la distance d de la cible, qu'on exprimera en fonction de c , B et T_m .

III - Questions liées à l'échantillonnage

En pratique, l'onde réfléchie reçue par un radar n'est pas parfaitement sinusoïdale et la tension v_d issue de la détection synchrone présente de petites variations aléatoires qui se superposent au signal sinusoïdal idéal attendu et en compliquent l'exploitation. Pour mesurer la fréquence f_d , le signal bruité est échantillonné et numérisé, puis on procède à son analyse spectrale par transformée de Fourier discrète (TFD).

III. 1 - Analyse spectrale par TFD

L'analyse spectrale par TFD est une technique couramment mise en œuvre dans les oscilloscopes numériques et les logiciels accompagnant les cartes d'acquisition. Son calcul est généralement conduit par l'algorithme de transformée de Fourier rapide (de sigle fréquemment rencontré FFT).

On considère un signal analogique $v(t)$ dont on a prélevé N_e échantillons $v_n = v(t_n)$ aux instants $t_n = nT_e$ avec $n \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$. La TFD permet d'afficher N_e valeurs $|S(f_k)|$ associées aux fréquences $f_k = k/(N_e T_e)$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$. Selon les paramètres N_e et T_e choisis pour l'échantillonnage, ces nombres $|S(f_k)|$ constituent une représentation plus ou moins fidèle du spectre en amplitude de $v(t)$.

Dans la suite on posera $\delta f = \frac{1}{N_e T_e}$. Cette grandeur est appelée résolution spectrale de la TFD.

- Q25.** Expliquer en quoi consiste le phénomène de "repliement du spectre" du signal échantillonné et à quelle condition on peut étudier le spectre de $v(t)$ à partir de l'analyse du spectre du signal échantillonné de $v(t)$.

L'échantillonnage sur une durée finie limite la capacité à distinguer, dans le spectre de v , des composantes harmoniques possédant des fréquences f_1 et f_2 très proches. À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 9 la TFD de la fonction $v(t)$ suivante, qui comporte un léger bruit aléatoire $\epsilon(t)$ superposé :

$$v(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t) + \epsilon(t) \quad (2)$$

avec $A = 2$ V, $f_1 = 150$ Hz, $f_2 = 160$ Hz et $|\epsilon(t)| < 0,1$ V.

Sur le spectre de gauche, $N_e = 100, T_e = 2$ ms; sur celui de droite $N_e = 100, T_e = 0,5$ ms. Ces valeurs numériques ont été choisies dans un but illustratif et n'ont aucun lien avec celles mises en jeu dans le traitement des signaux radars. Pour plus de lisibilité, le graphique a été restreint aux fréquences inférieures à 250 Hz .

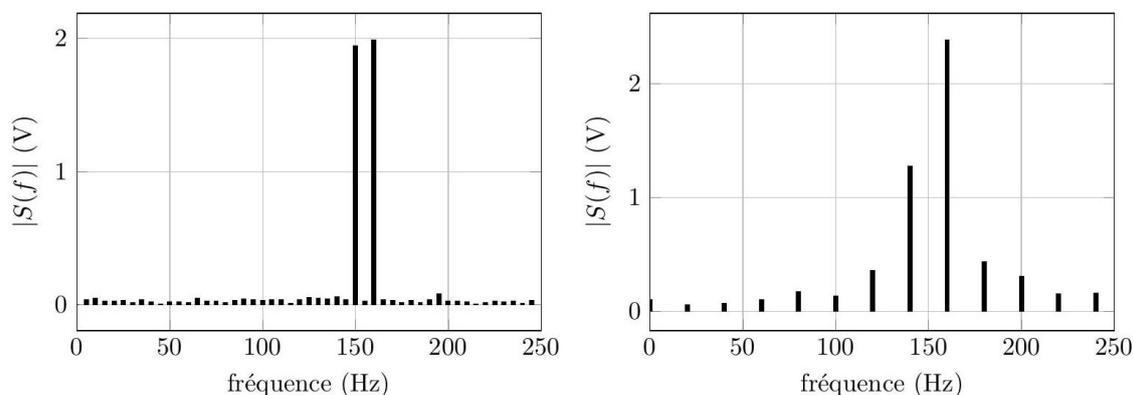


FIGURE 9 – Exemples de spectres obtenus par TFD du signal donné par l'expression (2) pour deux choix des paramètres d'échantillonnage.

- Q26.** Commenter ces deux spectres et analyser leur capacité à révéler les composantes spectrales de $v(t)$. Donner la valeur numérique de δf dans chacun des deux cas.

Dans certains radars, une double TFD permet d'obtenir simultanément les informations relatives à la vitesse U de la cible et celles relatives à sa distance ($f_r - f$ est lié à d , question Q24). Comme annoncé au début de la partie, on traite séparément ces deux phénomènes dans les sous-sections **III.2** et **III.3** respectivement, comme si chacun existait indépendamment de l'autre.

III. 2 - Limite et résolution en vitesse

Sur chaque rampe de modulation, de durée T_m , un échantillon de v_d est acquis et on répète cette opération N fois pour une durée d'acquisition $T_a = NT_m$. Les données sont ici $f = 29,85$ MHz, $T_m = 26,2$ ms et $B = 125$ kHz (radar WERA de la société Helzel Messtechnik).

- Q27.** Indiquer jusqu'à quelle fréquence maximale on peut obtenir le spectre pour en déduire $f_r - f$. En déduire la valeur maximale du décalage Doppler f_D atteignable et la vitesse U maximale associée. On rappelle que ces grandeurs sont reliées l'une à l'autre dans la relation (1).
- Q28.** Pour $N = 4096$, fournir la résolution spectrale de la mesure de $f - f_r$. En déduire la résolution ΔU sur la vitesse U .

III. 3 - Limite et résolution en distance

Au sein d'une unique rampe de modulation de durée $T_m = 26,2$ ms, M échantillons équidistants de v_d sont acquis en vue du calcul de la TFD.

- Q29.** Exprimer la valeur maximale $f_{d \max}$ de f_d que l'on peut déduire de l'analyse de ce spectre. Pour une portée de radar d_{\max} égale à 50 km, proposer une valeur de M compatible. On rappelle que d et f_d ont été reliées l'une à l'autre dans la question Q24.

- Q30.** Indiquer quelle est la résolution spectrale sur la mesure de f_d . En déduire la résolution en distance Δd . Pour information, la société Helzel Messtechnik indique que l'utilisateur peut paramétrer le radar et choisir des résolutions de 0,6 km, 1,2 km et 2,4 km.

FIN DU DEVOIR