Donnée générale : constante des gaz parfaits $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.kg^{-1}

1 Compresseur adiabatique

Un compresseur dont les parois sont adiabatiques amène de l'air de l'état 1 ($P_1 = 1{,}0$ bar, $T_1 = 293$ K) jusqu'à l'état 2 ($P_2 = 6{,}0$ bar, T_2). Le régime est stationnaire et le travail utile massique est noté w_u. L'air est assimilé à un gaz parfait pour lequel :

$$\gamma = 1{,}40 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$$

Dans le cas où la transformation de l'air dans le compresseur serait isentropique on note T_{2is} la valeur de la température en sortie et w_{is} la valeur de w_u. En revanche, lorsque la transformation est réelle, elle n'est pas isentropique et on note T_{2r} la température du gaz en sortie et $w_{\text{réel}}$ le travail utile massique réel.

On définit alors coefficient de performance η comme le rapport :

$$\eta = \frac{w_{is}}{w_{\text{réel}}}$$

et on donne $\eta = 0{,}8$

1) Montrer que si la transformation de l'air dans le compresseur est isentropique alors le fonctionnement de la machine est réversible

2) Calculer la température de sortie T_{2is} ainsi que le travail w_{is}.

3) Déterminer T_2 et $w_{\text{réel}}$ pour le compresseur réel. On souhaite que le compresseur reçoive une puissance utile $P_u = 1\,500$ W. Quel doit être le débit massique D_m ?

4) Calculer l'entropie s_C créé par unité de masse du fluide comprimé. Déterminer de même l'entropie créée par unité de temps τ_C (ou taux de création d'entropie). Conclure.

2 Étude d'une transformation du fluide R728 dans le diagramme des frigoristes

On peut voir sur la Figure 1 une partie du diagramme ($\ln P, h$) du fluide R728, dans le domaine où ce fluide est gazeux. Les températures sont en °C, les volumes massiques en m^3.kg^{-1} et les entropies massiques en kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

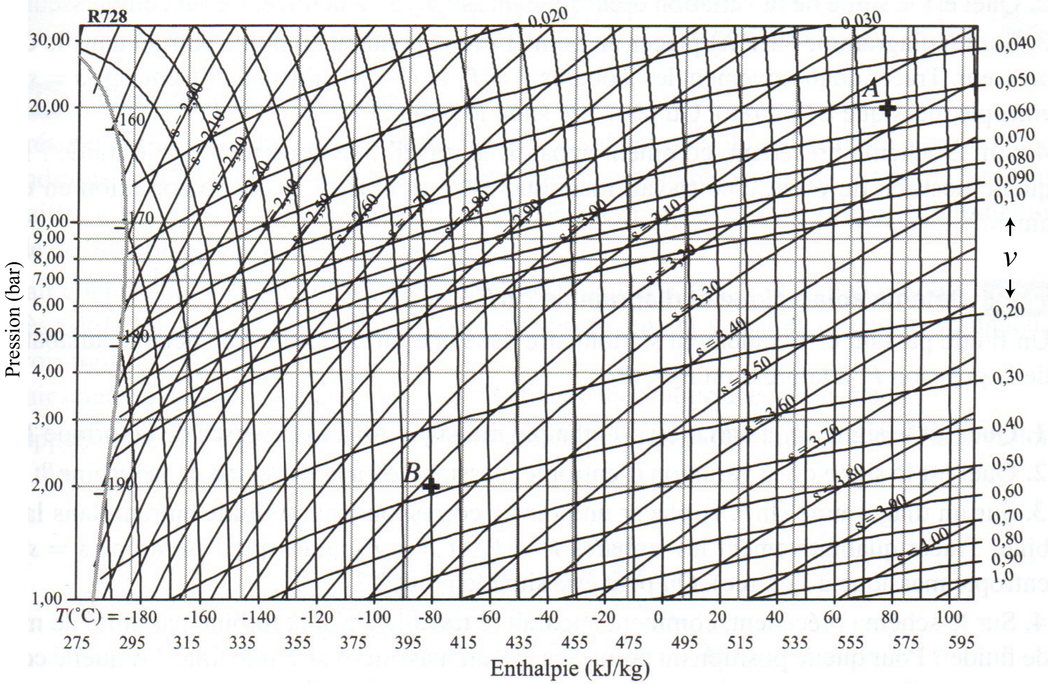


FIGURE 1 – Extrait du diagramme (h,$\ln P$) du fluide R728

1) a) Dans quelle partie du diagramme le gaz se comporte-t-il comme un gaz parfait ?

b) Montrer que la pente des courbes isentropiques est positive.

2) Évaluer la capacité thermique massique à pression constante c_p du fluide du fluide pour $P = 1{,}0$ bar en la supposant constante sur tout le domaine de température étudié. Sachant qu'il s'agit d'un gaz diatomique, évaluer sa masse molaire et en déduire la nature du fluide R728.

3) On considère maintenant une transformation du fluide entre les états A et B représentés sur la figure précédente, par écoulement stationnaire à travers une machine thermique.

Cette transformation se fait dans une tuyère horizontale, adiabatique et ne contenant aucune pièce mécanique mobile. Ce dispositif sert à détendre le fluide d'une zone de haute pression vers une zone de basse pression tout en lui conférant une vitesse importante. Évaluer :

a) la vitesse du gaz à la sortie de la tuyère sachant que la vitesse à l'entrée est quasiment nulle.

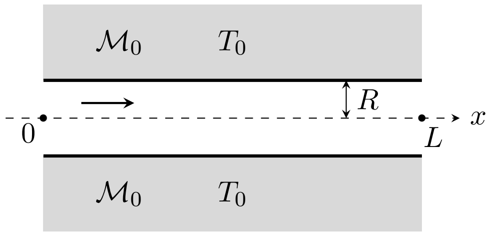
b) L'entropie créée par unité de masse de gaz entrant dans la tuyère.

3 Étude d'échangeurs thermiques

1) Échangeur thermique simple.

Un fluide s'écoule à vitesse constante et en régime stationnaire dans un tube cylindrique horizontal de rayon R. Ce tube est diathermane et on suppose que le milieu matériel situé à l'extérieur du tube, qu'on appellera $\mathcal{M}_0$, a une température uniforme et stationnaire $T_0 = 25$°C.

La température du fluide dans le cylindre ne dépend que de x ; il entre à $T(0) = 95$°C et sort de l'échangeur de longueur L à $T(L) = 70$°C. On note c_p la capacité thermique massique à pression constante du fluide et D_m son débit massique.



L'échange de chaleur entre une tranche de fluide située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ et $\mathcal{M}_0$ est bien décrit par une loi de la forme :

$$|\delta P_{th}(x)| = h\,|T(x) - T_0|\,2\pi R\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

où $\delta P_{th}(x)$ est la puissance thermique élémentaire échangée entre le fluide de la tranche et $\mathcal{M}_0$, $2\pi R\,dx$ étant la surface latérale de la tranche et h étant un coefficient constant

a) En appliquant le premier principe industriel pour une tranche élémentaire de fluide, établir que $T(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{T(x) - T_0}{\ell}$$

où ℓ est une longueur caractéristique dont on donnera l'expression en fonction de R, h, D_m et c_p.

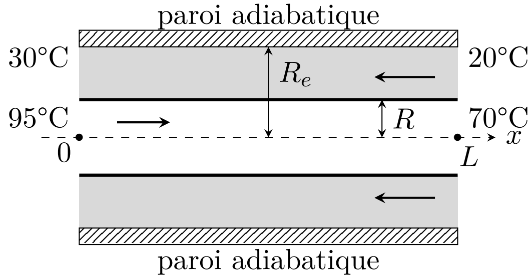
b) En déduire $T(x)$ en fonction de x, ℓ et $T(0)$.

c) Le cahier des charges impose $T(L) = 70$°C. Quelle est alors la valeur numérique du rapport ℓ/L ? Pour $h = 130$ W.m^{-1}.K^{-1}, $R = 2{,}0$ cm et $L = 1{,}0$ m, quelle valeur numérique du produit $D_m c_p$ en déduit-on ?

d) Quelle est alors la puissance thermique totale P_{th} échangée entre le fluide et $\mathcal{M}_0$ sur toute la longueur du tube ?

2) Échangeur thermique à contre-courant

Dans un échangeur à contre-courant le milieu $\mathcal{M}_0$ est remplacé par un fluide qui s'écoule en régime stationnaire dans un cylindre concentrique au cylindre de rayon R, de rayon $R_e > R$. L'écoulement de ce fluide se fait en sens opposé et à vitesse constante.



À nouveau les températures des deux fluides sont supposées ne dépendre que de x. On note respectivent $T_C(x)$ et $T_F(x)$ les températures du fluide chaud et froid à l'abscisse x et on pose $\Delta T(x) = T_C(x) - T_F(x)$.

Pour simplifier, les capacités thermiques massiques à pression constante des deux fluides sont identiques et on les note c_p. On appelle respectivement D_C et D_F les débit massiques des fluides chaud et froid. Les températures aux extrémités du tube sont indiquées sur le schéma.

La loi du transfert thermique est encore donnée par la relation (1) à condition de remplacer $T(x)$ par $T_C(x)$ et T_0 par $T_F(x)$.

a) Montrer que $T_C(x)$ et $T_F(x)$ obéissent aux équations différentielles couplées :

$$\frac{\mathrm{d}T_C}{\mathrm{d}x} = -\frac{\Delta T(x)}{\ell_C} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}T_F}{\mathrm{d}x} = -\frac{\Delta T(x)}{\ell_F}$$

et donner les expressions de ℓ_C et ℓ_F

b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\Delta T(x)$ et la résoudre.

c) Les températures d'entrée et de sortie étant imposés dans le cahier des charges de l'installation, quel doit être le signe de $D_C - D_F$?

4 Compression étagée

On considère un gaz parfait d'exposant adiabatique $\gamma = 1{,}40$ et dont la capacité thermique massique à pression constante s'écrit

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = 1{,}0 \text{ kJK.}^{-1}\text{.kg}^{-1}$$

où $r = R/M$, M étant la masse molaire du gaz.

Partant de conditions initiales ($P_0 = 1$ bar, $T_0 = 273$ K), le gaz est comprimé jusqu'à la pression $P_2 = 25$ bar. On appelle $\beta = P_2/P_0$ le taux de compression.

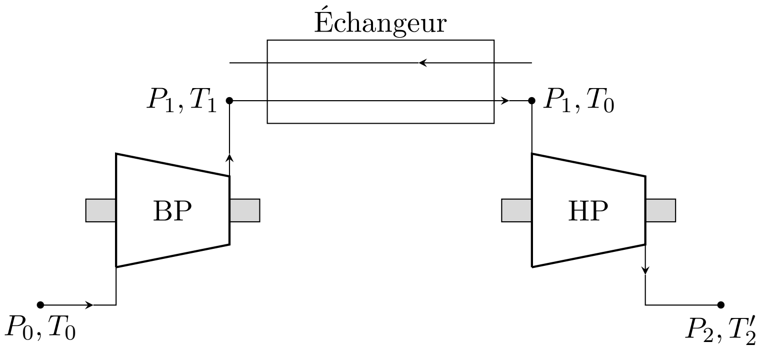
Cet exercice propose de comparer les performances d'un compresseur simple à celles de deux compresseurs, où la compression est réalisée en deux étapes successives séparées d'un refroidissement du fluide (compression étagée).

On suppose que les transformations dans les compresseurs sont adiabatiques, réversibles et sans variation d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur du fluide. On note D_m le débit massique du fluide.

1) Exprimer la température T_2 en sortie du compresseur en fonction du taux de compression et de la température d'entrée T_0.

2) Montrer que la puissance utile reçue par le fluide dans le compresseur simple vaut

$$\mathscr{P}_u = D_m \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left(\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$



La température T_2 est relativement élevée, et peut risquer d'endommager certains éléments du compresseur. Pour contourner cette difficulté, on préfère utiliser deux compresseurs qui permettent d'atteindre le même rapport de compression mais avec une température finale plus faible ; on parle de compression à deux étages.

- Dans l'étage basse pression (BP), le gaz est comprimé de façon isentropique jusqu'à la pression P_1. On note $\beta_1 = P_1/P_0$ le taux de compression correspondant.
- Dans l'étage haute pression (HP), le fluide est comprimé de façon isentropique jusqu'à la pression P_2. On note $\beta_2 = P_2/P_1$ le taux de compression correspondant.
- Entre les deux étages, le fluide subit un refroidissement isobare dans un échangeur thermique jusqu'à retrouver sa température initiale T_0.

3) Montrer que la puissance utile totale $\mathscr{P}_{u,t}$ que le fluide reçoit dans les deux compresseurs vaut :

$$\mathscr{P}_{u,t} = D_m \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left(\beta_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \beta_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

4) On étudie les variations de $\mathscr{P}_{u,t}$ en fonction de la pression intermédiaire P_1, tous les autres paramètres étant fixés. Montrer que $\mathscr{P}_{u,t}$ est minimale si P_1 vérifie :

$$P_1 = \sqrt{P_0 P_2}$$

Calculer littéralement et numériquement β_1 et β_2 lorsque cette condition est satisfaite.

5) Calculer numériquement T_1 et T_2' dans le cas de la compression étagée optimisée. Comparer à la température T_2 obtenue précédemment.

6) Calculer numériquement le travail utile massique $w_{u,t}$ reçu par le fluide lors de la compression étagée optimisée et comparer au travail utile massique w_u dépensé dans un compresseur simple.

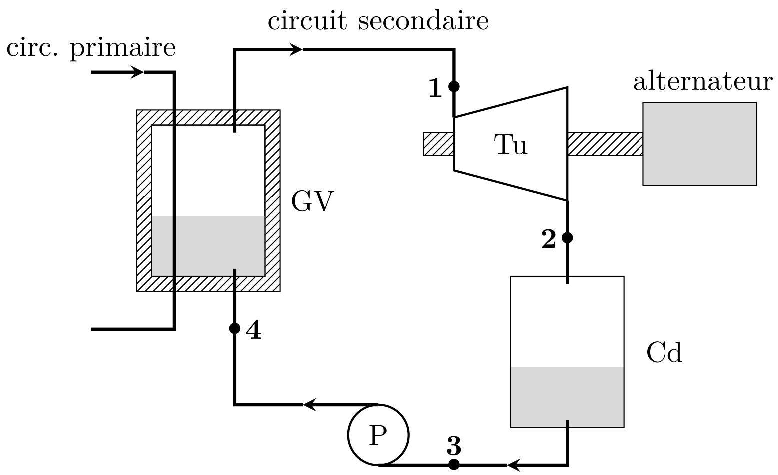
5 Cycle de Rankine d'une centrale nucléaire

Le parc de production nucléaire français est composé de centrales de la filière REP (Réacteurs à Eau Pressurisée). On étudie les transformations de l'eau dans le circuit fermé secondaire (voir figure) qui est constitué en première approche d'un générateur de vapeur (GV), d'une tubine (Tu) reliée à un alternateur, d'un condenseur (Cd) et d'une pompe d'alimentation secondaire (P).

L'écoulement est supposé stationnaire, sans variation d'énergie cinétique ou d'énergie potentielle de pesanteur.

Le fluide secondaire (eau) subit le cycle thermodynamique suivant :

- $1 \to 2$: détente adiabatique réversible dans la turbine ;
- $2 \to 3$: liquéfaction isobare totale dans le condenseur ;
- $3 \to 4$: compression adiabatique dans la pompe d'alimentation secondaire. Au cours de cette transformation la température de l'eau ne varie pratiquement pas ;



- 4 → 1 : échauffement puis vaporisation isobare totale dans le générateur de vapeur.

Le tableau ci-dessous donne l'état de l'eau en certains points du cycle.

Point	Pression (bar)	Température (°C)	État physique
1	80	295	vapeur sèche saturante
2	0,23	63	mélange diphasé
3		63	liquide
4	80		liquide

Le tableau suivant est un extrait de table thermodynamique de l'eau diphasée. Les enthalpies massiques h_ℓ du liquide et h_g de la vapeur sont en kJ.kg^{-1} et les entropies massiques s_ℓ du liquide et s_g de la vapeur sont en kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

T (°C)	P_{sat} (bar)	h_ℓ	h_g	s_ℓ	s_g
63	0,23	266	2615	0,877	7,85
295	80	1319	2757		5,74

L'eau liquide sera assimilée à une phase condensée idéale de volume massique $v_\ell = 10^{-3}$ m^3.kg^{-1} et de capacité thermique massique constante $c_\ell = 4{,}18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}

1) a) Calculer l'entropie massique de l'eau liquide s_ℓ à la température 295°C et sous la pression 80 bar.

b) Sachant que la vapeur d'eau sous une pression de 0,23 bar et à la température de 63°C peut être considérée comme un gaz parfait, calculer son volume massique v_g. La masse molaire de l'eau est $M = 18$ g.mol^{-1}.

c) Démontrer que la transformation 1→ 2 est isentropique.

2) Tracer le cycle effectué par 1 kg d'eau sur un diagramme $(h, \ln P)$ puis sur le diagramme de clapeyron (v, P) en plaçant les points 1, 2, 3 et 4.

3) a) Calculer le titre massique x_2 en vapeur dans l'état 2.

b) Déterminer le travail utile massique w_u cédé par le fluide dans la turbine. Application numérique.

4) Montrer que le travail utile massique $w_u(P)$ dans la pompe est donné par :

$$w_u(P) = v_\ell\,(P_4 - P_3)$$

Application numérique.

5) a) Calculer le transfert thermique massique $q_{4\to1}$ dans le passage dans le générateur de vapeur

b) Définir le rendement thermodynamique r de cette installation. Le comparer au rendement d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les sources froide $T_F = 63$°C et chaude $T_C = 295$°C.

6 Congélation d'une masse d'eau

Une masse $m = 1{,}0$ kg d'eau liquide, à la température initiale $\theta_1 = 20°\text{C}$, est placée dans un congélateur. Après un certain temps, l'eau est sortie du congélateur sous forme de glace à la température $\theta_2 = -\ 10°\text{C}$.

On assimile le congélateur à une machine thermique (réfrigérateur) en régime stationnaire, fonctionnant de façon réversible, les transferts thermiques se faisant uniquement avec :

- l'air du local de température constante $\theta_E = 25°\text{C}$;
- l'intérieur du congélateur "réduit" à la seule masse m d'eau.

Données :

L'eau liquide et la glace sont assimilées à des phases condensées idéales ;

capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4{,}2$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
capacité thermique massique de la glace : $c_g = 2{,}1$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
enthalpie massique de fusion de la glace à 0°C, sous $P = 1$ bar : $\Delta_{\text{fus}}h = 335$ kJ.kg^{-1}

Le fluide circulant dans le congélateur reçoit du travail utile uniquement au niveau d'un compresseur (C) alimenté par un moteur électrique consommant une puissance électrique $\text{P}_{\text{él}} = 50$ W. Ce moteur électrique transforme intégralement la puissance électrique qu'il reçoit en puissance mécanique.

On note Δt la durée nécessaire pour transformer la masse m d'eau de l'état liquide à $\theta_1 = 20°\text{C}$ en glace à $\theta_2 = -\ 10°\text{C}$. Tous les échanges d'énergie (chaleurs et travaux) seront calculés pour cette durée Δt.

1) Faire un schéma symbolique du dispositif (machine, corps chaud et corps froid) en représentant de façon claire :

— l'échange thermique Q_F entre la masse m d'eau et le fluide frigorifique ;

— l'échange thermique Q_C entre l'air du local et le fluide frigorifique ;

— le travail utile W_u reçu par le fluide frigorifique.

2) Exprimer Q_F en fonction des données. Application numérique.

3) Établir un bilan énergétique de fonctionnement de la machine reliant W_u, Q_C et Q_F.

4) Considérons le système { fluide frigorifique + masse m d'eau }. Calculer sa variation d'entropie ΔS. En déduire la valeur de Q_C en fonction des données. Application numérique.

5) Quelle est alors la durée Δt nécessaire à la transformation de l'eau en glace ? Application numérique : calculer Δt en minutes.