CONDUCTION THERMIQUE - LOI DE FOURIER

Nous considérons dans ce chapitre un milieu matériel macroscopiquement immobile (à l'échelle macroscopique) par rapport à un repère d'espace R = (Oxyz). Pour des raisons de simplicité, ce milieu sera assimilé à une phase condensée idéale (liquide ou solide).

Nous allons étudier les lois qui régissent les transferts thermiques par conduction thermique au sein de ce milieu matériel. Sauf mention du contraire, nous négligerons tout transfert thermique d'énergie par rayonnement.

Table des matières

I.	Flux thermique. Loi de fourier					
	1)	Conduction thermique : définition qualitative	1			
2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface						
		a) Exemple introductif	2			
		b) Flux d'un champ vectoriel	2			
		c) Exemples	3			
	3)	Vecteur densité de courant thermique				
	4)	Loi de Fourier	4			
II.	Bila	ns d'énergie	6			
	1)	Coordonnées cartésiennes	6			
	2) Coordonnées sphériques					
	4)	Généralisation à trois dimensions	6			
		a) Divergence d'un champ vectoriel	6			
		b) Équation de diffusion thermique à 3D	6			
	5)	Présence d'un terme source	7			
	6) Relations de passage à une interface entre deux solides					

III. Co	onducto-convection. Loi de Newton	9
1)	Phénomènes à une interface solide-fluide	9
2)	Exemple : ailette de refroidissement	10
3)	Conditions aux limites avec conducto-convection	11
IV. Ré	sistance thermique	13
1)	Propriétés du régime stationnaire	13
2)	Résistances thermiques de tiges	15
3)	Résistance thermique de conducto-convection	17
4)	Cas général	18

I. Flux thermique. Loi de fourier

1) Conduction thermique : définition qualitative

Définition

La conduction thermique, aussi appelée diffusion thermique, est un transfert d'énergie thermique (chaleur) dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique dont les causes sont les différences de température entre les différents points du milieu matériel.

Ce transfert d'énergie résulte au niveau microscopique des chocs entre molécules (dans les fluides) ou de la propagation des vibrations des molécules dans un réseau cristallin (dans les solides).

La chaleur est alors transférée des *régions chaudes* vers les **ré-**gions froides.

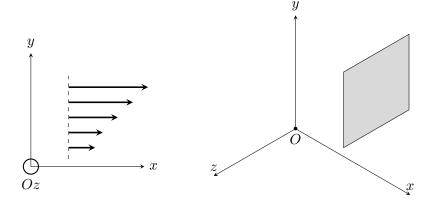
Lorsque de la chaleur est échangée par conduction thermique entre un système et son milieu extérieur (ME), il s'agit toujours d'une énergie qui traverse la surface de contrôle Σ_c qui définit le système. Pour modéliser mathématiquement cela, le bon concept est celui de **flux**.

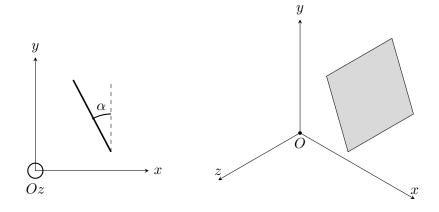
2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface à été introduit pour la première fois en mécanique des fluides au XIXème siècle pour formaliser la notion de débit massique à travers une surface : il s'agissait donc de donner une expression mathématique pour quantifier la masse de fluide qui traverse une surface par unité de temps.

a) Exemple introductif

Imaginons un fluide de masse volumique ρ (constante) dont le champ des vitesses macroscopiques est de la forme $\vec{c}(M) = c(y) \overrightarrow{e_x}$. Soit(S) une surface rectangulaire fixe dans r = (Oxyz). Quelle est l'expression de la masse de fluide qui traverse (S) par unité de temps dans les deux cas suivants :





b) Flux d'un champ vectoriel

Orientation d'une surface

Considérons une surface (S) fixe par rapport au repère d'espace R=(Oxyz) et divisons-la en petits éléments de surface de taille mésoscopique juxtaposés les uns aux autre. On note $\mathrm{d}S_M$ l'élément de surface localisé en M.

Cas particulier d'une surface fermée (S_F)

Définition (Flux)

Étant donné une surface orientée (S), on appelle flux du champ vectoriel \vec{a} à travers (S) la grandeur :

$$\Phi(\vec{a}/S) = \iint_{(S)} \vec{a}(M, t) . \overrightarrow{dS}_M$$

Remarque : l'intégrale se fait à t constant.

Dans le cas particulier d'une surface fermée (S_F) , selon l'orientation de la surface on dispose de la notion de flux sortant ou bien de

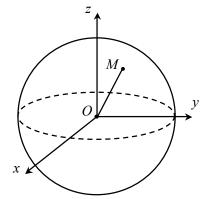
flux entrant, définis par :

$$\Phi_{\rm sortant}(\vec{a}/\mathbf{S}_F) = \oiint_{(\mathbf{S}_F)} \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\rm ext} \quad \text{et} \quad \Phi_{\rm entrant}(\vec{a}/\mathbf{S}_F) = \oiint_{(\mathbf{S}_F)} \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\rm int}$$

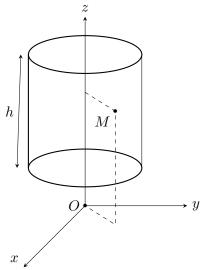
Remarques:

c) Exemples

1. Calculer le flux sortant d'un champ vect. à symétrie sphérique $\vec{a}(M,t) = a(r,t) \overrightarrow{e_r}$ à travers la sphère de centre O et de rayon r.



2. Calculer le flux sortant d'un champ vect. à symétrie cylindrique $\vec{a}(M,t)=a(r,t)\overrightarrow{e_r}$ à travers le cylindre d'axe Oz et de rayon r et de hauteur h.



3) Vecteur densité de courant thermique

Le transfert thermique par conduction possède une direction et un sens (des régions chaudes vers les régions froides). On le modélise par un champ vectoriel $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$, appelé densité de courant thermique ayant les propriétés suivantes :

4) Loi de Fourier

Dans un milieu matériel donné, lorsque les différences de températures ne sont pas trop importantes, une loi expérimentale indique que $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$ est proportionnel au gradient du champ des température au point M:

$$|\overrightarrow{j_Q}(M,t)| = -\lambda \operatorname{grad} T(M,t)|$$

Il s'agit de la **loi de Fourier**. Le coefficient de proportionnalité $\lambda > 0$ est la conductivité thermique du milieu matériel.

Unité de λ :

Ordres de grandeur :

Type conducteur	Nature	$\lambda \; (\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}})$
Bons conducteur thermiques (métaux)	Acier	20
	Fer	80
Bons conducteur thermiques (metaux)	Cuivre	390
	Argent	418
Conducteurs thermiques moyens	Bois	0,2
	Eau	0,6
	Carton	0,11
Igalanta thamaicuag	Polystyrène	$3,5 \times 10^{-2}$
solants thermiques	Laine de verre	$\begin{array}{c} 3.5 \times 10^{-2} \\ 3.0 \times 10^{-2} \\ 2.6 \times 10^{-2} \end{array}$
	air	$2,6 \times 10^{-2}$

Propriété de $\overrightarrow{j_Q}$:

II. Bilans d'énergie

Cette partie a été traitée sur feuille.

- 1) Coordonnées cartésiennes
- 2) Coordonnées sphériques
- 3) Coordonnées cylindriques
- 4) Généralisation à trois dimensions
- a) Divergence d'un champ vectoriel

Par définition en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{div } \vec{a} = \overrightarrow{\nabla} . \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}}$$

Dans les deux autres systèmes de coordonnées, consulter un formulaire

Laplacien d'un champ scalaire :

$$\boxed{ \Delta f \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} }$$

Pour les deux autres systèmes de coordonnées, voir un formulaire.

b) Équation de diffusion thermique à 3D

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \overrightarrow{j_Q} \quad \text{et} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

5) Présence d'un terme source

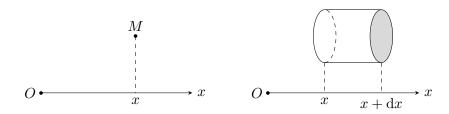
Certaines situations physiques nécessitent d'introduire dans les équations une production locale d'énergie interne en tout point du volume du milieu matériel. On parle d'une source locale d'énergie interne ou terme source.

Exemples typiques:

- Le milieu est radioactif. Les désintégrations radioactives sont à l'origine d'un apport d'énergie en tout point du volume du milieu, qui augmente l'énergie interne;
- Le milieu absorbe du rayonnement électromagnétique (par exemple de l'eau dans un four micro-onde). Cette absorption d'énergie électromagnétique augmente elle-aussi l'énergie interne du milieu.

Cet apport d'énergie interne est modélisé par une densité volumique de puissance $p_{\rm vol}(M,t)$ en W.m⁻³ définie en tout point M du milieu et à chaque instant t.

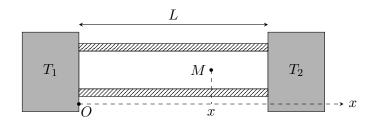
Équation de diffusion thermique avec un terme source. Cas unidimensionnel avec T(M,t) = T(x,t) et $p_{\text{vol}}(M,t) = p_{\text{vol}}(x,t)$.



Exercice:

Considérons une tige (barre) cylindrique de section S, longueur L, taillée dans un matériau de conductivité thermique λ . On suppose que la surface latérale de la tige est isolée thermiquement (par un matériau isolant thermique) et qu'elle est en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures respectives T_1 et T_2 .

On attend que le régime stationnaire soit atteint et on suppose que la température dans la tige ne dépend que de x (modèle unidimensionnel) : T(M) = T(x)



- 1. Déterminer l'expression de T(x) en l'absence de terme source.
- 2. On suppose que la barre est radioactive, ce qui se traduit par l'existence d'une densité volumique de puissant $p_{\rm vol}$ qu'on prendra uniforme et stationnaire.

Déterminer la nouvelle expression de T(x).

6) Relations de passage à une interface entre deux solides

Relations de passage

En tout point M de l'interface entre deux solides et à chaque instant t il y a :

- Continuité de la température : $T(M^-, t) = T(M^+, t)$
- Continuité de la composante normale de $\overrightarrow{j_Q}$:

$$\overrightarrow{j_Q}(M^-,t).\overrightarrow{n}_{12}(M) = \overrightarrow{j_Q}(M^+,t).\overrightarrow{n}_{12}(M)$$

III. Conducto-convection. Loi de Newton

1) Phénomènes à une interface solide-fluide

Les transferts thermiques entre un corps solide et un fluide sont plus complexes que la simple conduction car deux phénomènes sont en jeu simultanément :

- la conduction thermique.
- Une micro-convection du fluide (mouvements microscopiques) au voisinage de la paroi sur une faible épaisseur e de l'ordre de quelques μ m.

Ce mode de transfert thermique est décrit par la loi de Newton.

Propriété (Loi de Newton)

La chaleur élémentaire qui traverse un élément de surface $\mathrm{d}S_M$ d'une interface solide-fluide, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ est donnée par :

$$\delta^2 Q = h \left[T_s(M) - T_f(M) \right] dS_M dt$$

où $T_s(M) = \text{est}$ la température du solide et $T_f(M)$ celle du fluide au voisinage d'un point M de l'interface et où h > 0 est le **coefficient de conducto - convection**. Cette chaleur est toujours transférée de la zone chaude vers la zone froide.

Unité:

2) Exemple : ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement est chargée d'évacuer la chaleur d'un appareil électrique de façon plus efficace.

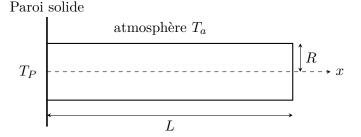


Exercice: ailette de refroidissement cylindrique.

On étudie une tige cylindrique d'axe Ox, de longueur L et de rayon R=2,0 mm, de masse volumique ρ , capacité thermique massique c et de conductivité thermique $\lambda=320~\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ (figure page suivante).

On suppose que le rayon R de la tige est suffisamment faible pour que la température T ne dépende que de x et de t: T(x,t) (modèle unidimensionnel). En x=0 la tige est collée à une paroi solide de température constante T_P tandis que sur toutes les autres surfaces, elle est au contact de l'atmosphère de température T_a constante.

On modélise les échanges de chaleur entre la tige et l'atmosphère, de type conducto - convectif, par la loi de Newton, avec un coefficient $h = 150 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.$



- 1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température T(x).
- 2. En donner la solution générale en régime stationnaire en fonction de deux constantes A et B qu'on ne cherche pas à calculer dans cette question. Montrer qu'on peut introduire une longueur caractéristique ℓ de ce phénomène, à exprimer en fonction de h, λ et R.
- 3. On suppose que l'ailette est infinie. En déduire T(x) et calculer le coefficient d'efficacité C_e de l'ailette, défini par :

$$C_e = \frac{\text{chaleur évacuée avec l'ailette}}{\text{chaleur évacuée sans ailette}}$$

3) Conditions aux limites avec conducto-convection

Relations de passage

En tout point M de l'interface entre un solide et un fluide il y a **discontinuité** de la température $T_s(M,t) \neq T_f(M,t)$. En revanche on a l'égalité suivante, valable à chaque instant t:

$$\overrightarrow{j_Q}(M^-,t).\overrightarrow{n}_{s\to f}(M) = h \left(T_s(M,t) - T_f(M,t) \right)$$

Exercice (*):

On reprend l'étude de l'ailette de refroidissement décrite à l'exercice précédent mais on ne suppose plus que sa longueur est infinie : sa longueur est donc L. Déterminer la nouvelle expression de la répartition de température T(x) dans l'ailette.

IV. Résistance thermique

Dans cette partie on considère un milieu matériel assimilé à une phase condensée idéale de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ constantes.

On suppose qu'il n'y pas de sources volumiques d'énergie : $p_{vol}=0$ en tout point du milieu et que le régime est stationnaire : T=T(M) indépendante de t. La température et le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}=-\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}} \, T$ vérifient donc les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \overrightarrow{j_Q} \implies \left[\overrightarrow{\operatorname{div}} \overrightarrow{j_Q} = \overrightarrow{0} \right]$$

et

$$\rho c \, \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \, \Delta T \implies \boxed{\Delta T = 0}$$

1) Propriétés du régime stationnaire

Définition (Champ vectoriel à flux conservatif)

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ (qui peut dépendre du temps) est à flux conservatif si et seulement si :

$$\forall M, \ \forall t, \ \operatorname{div} \vec{a}(M,t) = 0$$

Remarque:

Le lien entre la nullité de la divergence et la conservation du flux est donné par le théorème d'Ostrogradski :

Théorème d'Ostrogradski

Soit (S_F) une surface fermée, orientée vers l'extérieur et délimitant un volume fini V $(S_F$ est la frontière de V). Alors le flux sortant de \vec{a} vérifie :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{a}/S_F) \widehat{=} \oiint_{(S_F)} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{dS}_{M,\text{ext}} = \iiint_V \text{div } \vec{a}(N,t) \, dV_N$$

Cas particulier d'un champ à flux conservatif :

Définition - Lignes de champ

Étant donné un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$, on appelle ligne de champ toute courbe (Γ) dont la tangente (Γ) en chaque point M a pour vecteur directeur le champ $\vec{a}(M,t)$ en ce point.

•

Remarque:

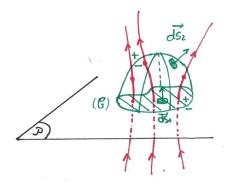
Si le champ vectoriel \vec{a} est stationnaire alors les lignes de champ de \vec{a} sont immobiles dans le repère R=(Oxyz). Dans le cas où \vec{a} dépend du temps, les lignes de champ bougent au cours du temps.

Quelques conséquences :

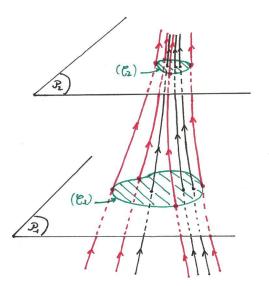
 \vec{a} étant un champ vectoriel à flux conservatif, on a :

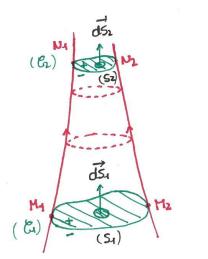
1. Soit (\mathscr{C}) une courbe plane fermée (contenue dans un plan \mathscr{P}) qui délimite une surface (S_1) . Soit (S_2) une seconde surface qui s'appuie sur (\mathscr{C}) comme sur la figure (orientation des deux surfaces définie sur la figure). Alors :

$$\Phi(\vec{a}/S_1) = \Phi(\vec{a}/S_2)$$



2. Propriété des tubes de champ

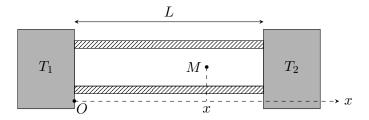




2) Résistances thermiques de tiges

Considérons une tige (barre) cylindrique de section S, longueur L, taillée dans un matériau de conductivité thermique λ . On suppose que la surface latérale de la tige est isolée thermiquement (par un matériau isolant thermique) et qu'elle est en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures respectives T_1 et T_2 .

On attend que le régime station naire soit atteint et on suppose que la température dans la tige ne dépend que de x (modèle unidimensionnel) : ${\cal T}(M)={\cal T}(x)$



- 1. Déterminer l'expression de T(x). En déduire $\overrightarrow{j_Q}$ dans la tige. Tracer quelques lignes de champ de $\overrightarrow{j_Q}$.
- 2. Soit S(x) la section de la tige située à l'abscisse x, orientée selon $\overrightarrow{e_x}$. On note $\Phi(x)$ le flux thermique à travers S(x). Montrer par deux méthodes différentes que $\Phi(x)$ ne dépend pas de x.

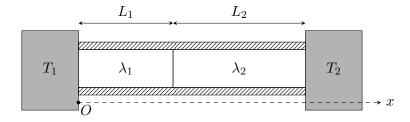
Dans la suite on notera Φ ce flux thermique.

3. Montrer que la différence T_1-T_2 est proportionnelle à Φ . Donner la constante de proportionnalité $R_{\rm th}$.

Association en série

On considère maintenant deux tiges collées bout à bout, thermiquement isolées sur toute leur surface latérale selon la figure ci-dessous.

- La tige 1 a une longueur L_1 , une section d'aire S et une conductivité thermique λ_1 .
- La tige 2 a une longueur L_2 , une section d'aire S et une conductivité thermique λ_2 .



D'après l'étude précédente on sait déjà que :

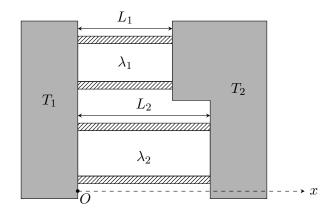
- Si $x \in [0, L_1]$ le flux thermique $\Phi(x)$ ne dépend pas de x. On le note Φ_1 ;
- si $x \in [L_1, L_1 + L_2]$ alors le flux thermique $\Phi(x)$ ne dépend pas de x non plus et on le note Φ_2 .

Montrons que $\Phi_1 = \Phi_2$

Association en parallèle

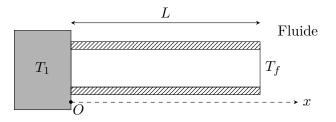
On considère maintenant deux tiges disposées comme cela est indiqué sur la figure ci-dessous.

- La tige 1 a une longueur L_1 , une section d'aire S_1 et une conductivité thermique λ_1 .
- La tige 2 a une longueur L_2 , une section d'aire S_2 et une conductivité thermique λ_2 .



3) Résistance thermique de conducto-convection

On revient maintenant à l'étude d'une seule tige de longueur L, de section d'aire S et de conductivité thermique λ , mais on remplace la source de chaleur de température T_2 à l'extrémité droite par un fluide dont la température à l'interface en x=L vaut $T(L^+)=T_f$. Le coefficient de conducto-convection est noté h.



Application: simple vitrage et double vitrage.

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe Ox et dont le verre a une conductivité thermique $\lambda = 1,2$ W.m⁻¹.K⁻¹. L'air de la pièce est à la température $T_i = 295$ K et l'air à l'extérieur est à la température $T_e = 278$ K.

On note $h=12~{\rm W.m^{-2}.K^{-1}}$ le coefficient de conducto-convection entre le verre et l'air.

- 1. La paroi est une simple vitre d'épaisseur 2e=8 mm. Déterminer le flux thermique $\Phi_{\rm th_1}$ sortant de la pièce par cette paroi en fonction de λ , h, S, e, T_i et T_e .
- 2. La paroi est une double-vitre, ensemble de deux vitres de même épaisseur e=4 mm séparées par une épaisseur e'=4 mm d'air, de conductivité thermique $\lambda_a=2.5\times 10^{-2}~\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

Déterminer le flux thermique Φ_{th_2} sortant de la pièce

3. En déduire le rapport $\Phi_{\rm th_2}/\Phi_{\rm th_1}$. En donner la valeur numérique.

. 4) Cas général