CONDUCTION THERMIQUE - LOI DE FOURIER

Nous considérons dans ce chapitre un milieu matériel macroscopiquement immobile (à l'échelle macroscopique) par rapport à un repère d'espace $R = (Oxyz)$. Pour des raisons de simplicité, ce milieu sera assimilé à une phase condensée idéale (liquide ou solide).

Nous allons étudier les lois qui régissent les transferts thermiques par conduction thermique au sein de ce milieu matériel. Sauf mention du contraire, nous négligerons tout transfert thermique d'énergie par rayonnement.

Table des matières

I. Flux thermique. Loi de fourier **1**
- **1)** Conduction thermique : définition qualitative 1
- **2)** Flux d'un champ vectoriel à travers une surface 2
  - **a)** Exemple introductif 2
  - **b)** Flux d'un champ vectoriel 2
  - **c)** Exemples 3
- **3)** Théorème d'Ostrogradski 4
- **4)** Définition : champ vectoriel à flux conservatif 4
- **5)** Vecteur densité de courant thermique 5
- **6)** Loi de Fourier 6

II. Bilans d'énergie **7**
- **1)** Coordonnées cartésiennes 7
- **2)** Coordonnées sphériques 7
- **3)** Coordonnées cylindriques 7
- **4)** Généralisation à trois dimensions 7
- **5)** Présence d'un terme source 7
- **6)** Relations de passage à une interface entre deux solides 9

III. Conducto-convection. Loi de Newton **10**
- **1)** Phénomènes à une interface solide-fluide 10
- **2)** Exemple : ailette de refroidissement 10
- **3)** Conditions aux limites avec conducto-convection . . . 12

IV. Résistance thermique **13**
- **1)** Propriétés du régime stationnaire 13
- **2)** Résistances thermiques de tiges 13
- **3)** Résistance thermique de conducto-convection 16
- **4)** Cas général 17

I. Flux thermique. Loi de fourier

1) Conduction thermique : définition qualitative

Définition

La ***conduction thermique***, aussi appelée ***diffusion thermique***, est un transfert d'énergie thermique (chaleur) dans un milieu matériel ***sans mouvement macroscopique*** dont les causes sont les différences de température entre les différents points du milieu matériel.

Ce transfert d'énergie résulte au niveau microscopique des chocs entre molécules (dans les fluides) ou de la propagation des vibrations des molécules dans un réseau cristallin (dans les solides).

La chaleur est alors transférée des ***régions chaudes*** vers les **régions froides**.

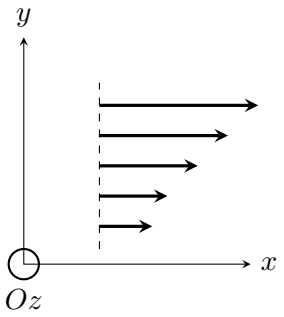
Lorsque de la chaleur est échangée par conduction thermique entre un système et son milieu extérieur (ME), il s'agit toujours d'une énergie qui traverse la surface de contrôle Σ_c qui définit le système. Pour modéliser mathématiquement cela, le bon concept est celui de ***flux****.*

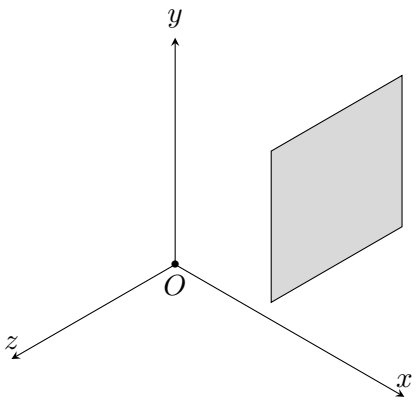
2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

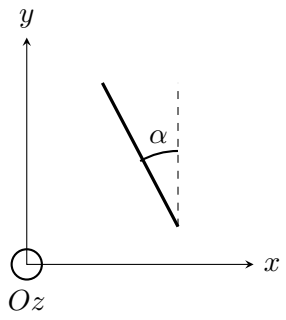
Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface à été introduit pour la première fois en mécanique des fluides au XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour formaliser la notion de débit massique à travers une surface : il s'agissait donc de donner une expression mathématique pour quantifier *la masse de fluide qui traverse une surface par unité de temps.*

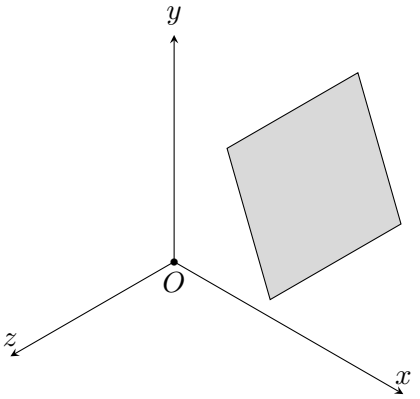
a) Exemple introductif

Imaginons un fluide de masse volumique ρ (constante) dont le champ des vitesses macroscopiques est de la forme $\vec{c}(M) = c(y)\,\overrightarrow{e_x}$. Soit(S) une surface rectangulaire fixe dans $r = (Oxyz)$. Quelle est l'expression de la masse de fluide qui traverse (S) par unité de temps dans les deux cas suivants :









b) Flux d'un champ vectoriel

Orientation d'une surface

Considérons une surface (S) fixe par rapport au repère d'espace $R = (Oxyz)$ et divisons-la en petits éléments de surface de taille mésoscopique juxtaposés les uns aux autre. On note $\mathrm{d}S_M$ l'élément de surface localisé en M.

.

Cas particulier d'une surface fermée (S_F)

Définition (Flux)

Étant donné une surface orientée (S), on appelle *flux* du champ vectoriel $\vec{a}$ à travers (S) la grandeur :

$$\Phi(\vec{a}/\mathrm{S}) = \iint_{(\mathrm{S})} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}_M$$

Remarque : l'intégrale se fait à t constant.

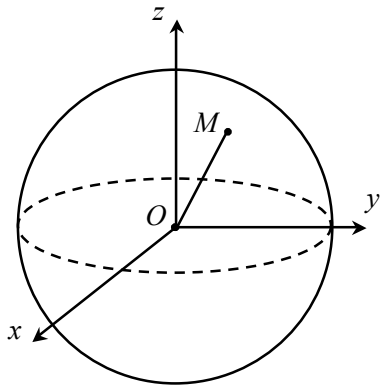
Dans le cas particulier d'une *surface fermée* (S_F), selon l'orientation de la surface on dispose de la notion de *flux sortant* ou bien de *flux entrant*, définis par :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{a}/\mathrm{S}_F) = \oiint_{(\mathrm{S}_F)} \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{entrant}}(\vec{a}/\mathrm{S}_F) = \oiint_{(\mathrm{S}_F)} \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{int}}$$

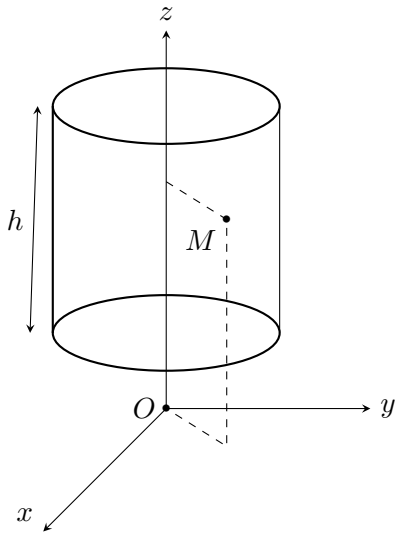
Remarques :

c) Exemples

1. Calculer le flux sortant d'un champ vect. à symétrie sphérique $\vec{a}(M,t) = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ à travers la sphère de centre O et de rayon r.



2. Calculer le flux sortant d'un champ vect. à symétrie cylindrique $\vec{a}(M,t) = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ à travers le cylindre d'axe Oz et de rayon r et de hauteur h.



3) Théorème d'Ostrogradski

Soit (S_F) une surface fermée, orientée vers l'extérieur et délimitant un volume fini V (S_F est la frontière de V). Alors le flux sortant de $\vec{a}$ vérifie :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{a}/S_F) \widehat{=} \oiint_{(S_F)} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{M,\text{ext}} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}(N,t)\,\mathrm{d}V_N$$

Divergence d'un champ vectoriel

4) Définition : champ vectoriel à flux conservatif

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ (qui peut dépendre du temps) est à *flux conservatif* si et seulement si, **pour toute surface fermée** S_F :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{a}/S_F) = \oiint_{(S_F)} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{M,\text{ext}} = 0$$

.

Définition - Lignes de champ

Étant donné un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$, on appelle *ligne de champ* toute courbe (Γ) dont la tangente (T) en chaque point M a pour vecteur directeur le champ $\vec{a}(M,t)$ en ce point.

Remarque :

Si le champ vectoriel $\vec{a}$ est stationnaire alors les lignes de champ de $\vec{a}$ sont immobiles dans le repère $R = (Oxyz)$. Dans le cas où $\vec{a}$ dépend du temps, les lignes de champ bougent au cours du temps.

5) Vecteur densité de courant thermique

Le transfert thermique par conduction possède une direction et un sens (des régions chaudes vers les régions froides). On le modélise par un champ vectoriel $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$, appelé *densité de courant thermique* ayant les propriétés suivantes :

6) Loi de Fourier

Dans un milieu matériel donné, lorsque les différences de températures ne sont pas trop importantes, une loi expérimentale indique que $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$ est proportionnel au gradient du champ des température au point M :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q}(M,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T(M,t)}$$

Il s'agit de la **loi de Fourier**. Le coefficient de proportionnalité $\lambda > 0$ est la *conductivité thermique* du milieu matériel.

Unité de λ :

Ordres de grandeur :

Type conducteur	Nature	λ (W.K^{-1}.m^{-1})
Bons conducteur thermiques (métaux)	Acier	20
	Fer	80
	Cuivre	390
	Argent	418
Conducteurs thermiques moyens	Bois	0,2
	Eau	0,6
Isolants thermiques	Carton	0,11
	Polystyrène	$3{,}5\times10^{-2}$
	Laine de verre	$3{,}0\times10^{-2}$
	air	$2{,}6\times10^{-2}$

Propriété de $\overrightarrow{j_Q}$:

II. Bilans d'énergie

Cette partie a été traitée sur feuille.

1) Coordonnées cartésiennes

2) Coordonnées sphériques

3) Coordonnées cylindriques

4) Généralisation à trois dimensions

5) Présence d'un terme source

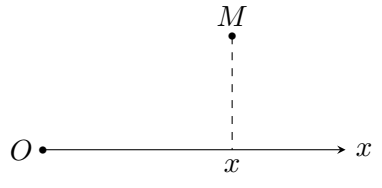
Certaines situations physiques nécessitent d'introduire dans les équations une production locale d'énergie interne en tout point du volume du milieu matériel. On parle d'une source locale d'énergie interne ou terme source.

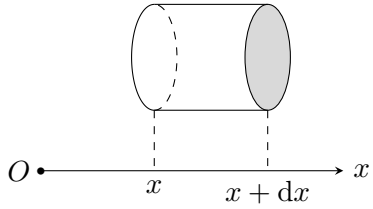
Exemples typiques :

- Le milieu est radioactif. Les désintégrations radioactives sont à l'origine d'un apport d'énergie en tout point du volume du milieu, qui augmente l'énergie interne ;
- Le milieu absorbe du rayonnement électromagnétique (par exemple de l'eau dans un four micro-onde). Cette absorption d'énergie électromagnétique augmente elle-aussi l'énergie interne du milieu.

Cet apport d'énergie interne est modélisé par une *densité volumique de puissance* $p_{\text{vol}}(M,t)$ en W.m^{-3} définie en tout point M du milieu et à chaque instant t.

Équation de diffusion thermique avec un terme source. Cas unidimensionnel avec $T(M,t) = T(x,t)$ et $p_{\text{vol}}(M,t) = p_{\text{vol}}(x,t)$.



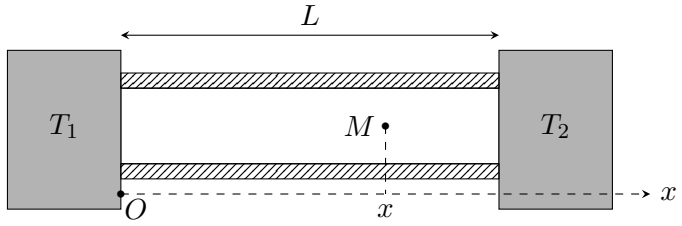


.

Exercice :

Considérons une tige (barre) cylindrique de section S, longueur L, taillée dans un matériau de conductivité thermique λ. On suppose que la surface latérale de la tige est isolée thermiquement (par un matériau isolant thermique) et qu'elle est en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures respectives T_1 et T_2.

On attend que le régime stationnaire soit atteint et on suppose que la température dans la tige ne dépend que de x (modèle unidimensionnel) : $T(M) = T(x)$



1. Déterminer l'expression de $T(x)$ en l'absence de terme source.
2. On suppose que la barre est radioactive, ce qui se traduit par l'existence d'une densité volumique de puissant p_{vol} qu'on prendra uniforme et stationnaire.

   Déterminer la nouvelle expression de $T(x)$.

6) Relations de passage à une interface entre deux solides

.

Relations de passage

En tout point M de l'interface entre deux solides et à chaque instant t il y a :

- Continuité de la température : $T(M^-,t) = T(M^+,t)$
- Continuité de la composante normale de $\overrightarrow{j_Q}$:

$$\overrightarrow{j_Q}(M^-,t).\vec{n}_{12}(M) = \overrightarrow{j_Q}(M^+,t).\vec{n}_{12}(M)$$

III. Conducto-convection. Loi de Newton

1) Phénomènes à une interface solide-fluide

Les transferts thermiques entre un corps solide et un fluide sont plus complexes que la simple conduction car deux phénomènes sont en jeu simultanément :

- la conduction thermique.
- Une micro-convection du fluide (mouvements microscopiques) au voisinage de la paroi sur une faible épaisseur e de l'ordre de quelques μm.

Ce mode de transfert thermique est décrit par la ***loi de Newton***.

Propriété (Loi de Newton)

La chaleur élémentaire qui traverse un élément de surface $\mathrm{d}S_M$ d'une interface solide-fluide, entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est donnée par :

$$\delta^2 Q = h\,[\,\mathrm{T}_s(M) - \mathrm{T}_f(M)\,]\,\mathrm{d}S_M\,\mathrm{d}t$$

où $T_s(M =$ est la température du solide et $T_f(M)$ celle du fluide au voisinage d'un point M de l'interface et où $h > 0$ est le ***coefficient de conducto - convection***. Cette chaleur est toujours transférée de la zone chaude vers la zone froide.

.

Unité :

2) Exemple : ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement est chargée d'évacuer la chaleur d'un appareil électrique de façon plus efficace.

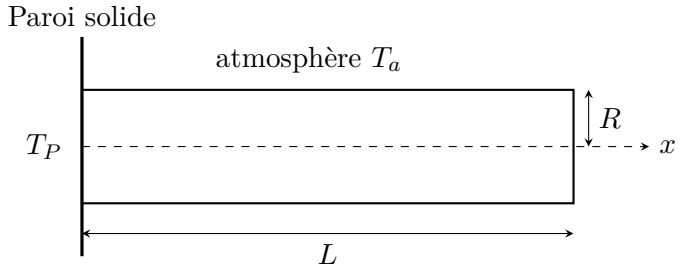


Exercice : ailette de refroidissement cylindrique.

On étudie une tige cylindrique d'axe Ox, de longueur L et de rayon $R = 2{,}0$ mm, de masse volumique ρ, capacité thermique massique c et de conductivité thermique $\lambda = 320\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ (figure page suivante).

On suppose que le rayon R de la tige est suffisamment faible pour que la température T ne dépende que de x et de t : $T(x,t)$ (modèle unidimensionnel). En $x = 0$ la tige est collée à une paroi solide de température constante T_P tandis que sur toutes les autres surfaces, elle est au contact de l'atmosphère de température T_a constante.

On modélise les échanges de chaleur entre la tige et l'atmosphère, de type conducto - convectif, par la loi de Newton, avec un coefficient $h = 150$ W.m^{-2}.K^{-1}.



1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x)$.
2. En donner la solution générale en régime stationnaire en fonction de deux constantes A et B qu'on ne cherche pas à calculer dans cette question. Montrer qu'on peut introduire une longueur caractéristique ℓ de ce phénomène, à exprimer en fonction de h, λ et R.
3. On suppose que l'ailette est infinie. En déduire $T(x)$ et calculer le coefficient d'efficacité C_e de l'ailette, défini par :

$$C_e = \frac{\text{chaleur évacuée avec l'ailette}}{\text{chaleur évacuée sans ailette}}$$

.

.

.

3) Conditions aux limites avec conducto-convection

Relations de passage

En tout point M de l'interface entre un solide et un fluide il y a **discontinuité** de la température $T_s(M,t) \neq T_f(M,t)$. En revanche on a l'égalité suivante, valable à chaque instant t :

$$\overrightarrow{j_Q}(M^-,t).\vec{n}_{s\to f}(M) = h\ (\,T_s(M,t) - T_f(M,t)\,)$$

Exercice (*) :

On reprend l'étude de l'ailette de refroidissement décrite à l'exercice précédent mais on ne suppose plus que sa longueur est infinie : sa longueur est donc L. Déterminer la nouvelle expression de la répartition de température $T(x)$ dans l'ailette.

.

IV. Résistance thermique

1) Propriétés du régime stationnaire

Dans cette partie on considère un milieu matériel assimilé à une phase condensée idéale de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ constantes.

On suppose qu'il n'y pas de sources volumiques d'énergie : $p_{vol} = 0$ en tout point du milieu et que le régime est stationnaire : $T = T(M)$ indépendante de t. La température et le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ vérifient donc les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \overrightarrow{j_Q} \implies \boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{j_Q} = \vec{0}}$$

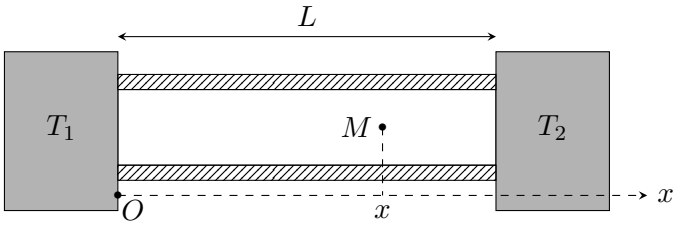
et

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \implies \boxed{\Delta T = 0}$$

2) Résistances thermiques de tiges

Considérons une tige (barre) cylindrique de section S, longueur L, taillée dans un matériau de conductivité thermique λ. On suppose que la surface latérale de la tige est isolée thermiquement (par un matériau isolant thermique) et qu'elle est en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures respectives T_1 et T_2.

On attend que le régime stationnaire soit atteint et on suppose que la température dans la tige ne dépend que de x (modèle unidimensionnel) : $T(M) = T(x)$



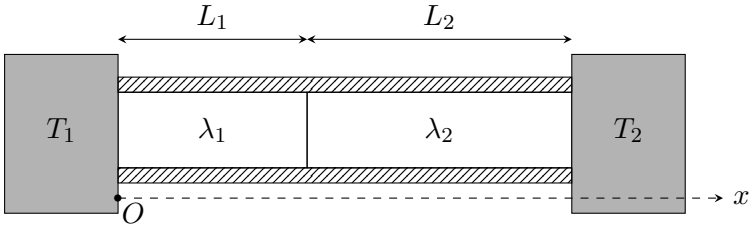
1. Déterminer l'expression de $T(x)$. En déduire $\overrightarrow{j_Q}$ dans la tige. Tracer quelques lignes de champ de $\overrightarrow{j_Q}$.
2. Soit $S(x)$ la section de la tige située à l'abscisse x, orientée selon $\overrightarrow{e_x}$. On note $\Phi(x)$ le flux thermique à travers $S(x)$. Montrer par deux méthodes différentes que $\Phi(x)$ ne dépend pas de x.

   Dans la suite on notera Φ ce flux thermique.
3. Montrer que la différence $T_1 - T_2$ est proportionnelle à Φ. Donner la constante de proportionnalité R_{th}.

Association en série

On considère maintenant deux tiges collées bout à bout, thermiquement isolées sur toute leur surface latérale selon la figure ci-dessous.

- La tige 1 a une longueur L_1, une section d'aire S et une conductivité thermique λ_1.
- La tige 2 a une longueur L_2, une section d'aire S et une conductivité thermique λ_2.



D'après l'étude précédente on sait déjà que :

- Si $x \in [0, L_1]$ le flux thermique $\Phi(x)$ ne dépend pas de x. On le note Φ_1 ;
- si $x \in [L_1, L_1 + L_2]$ alors le flux thermique $\Phi(x)$ ne dépend pas de x non plus et on le note Φ_2.

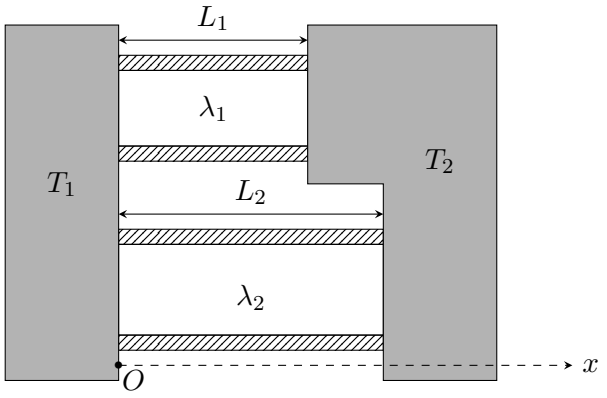
Montrons que $\Phi_1 = \Phi_2$

.

Association en parallèle

On considère maintenant deux tiges disposées comme cela est indiqué sur la figure ci-dessous.

- La tige 1 a une longueur L_1, une section d'aire S_1 et une conductivité thermique λ_1.
- La tige 2 a une longueur L_2, une section d'aire S_2 et une conductivité thermique λ_2.

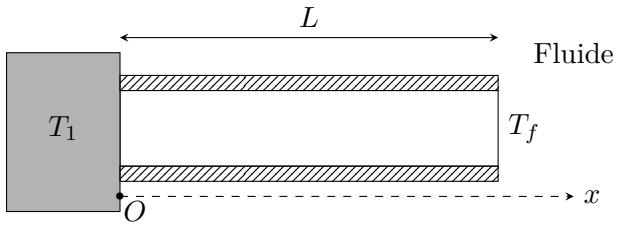


.

.

3) Résistance thermique de conducto-convection

On revient maintenant à l'étude d'une seule tige de longueur L, de section d'aire S et de conductivité thermique λ, mais on remplace la source de chaleur de température T_2 à l'extrémité droite par un fluide dont la température à l'interface en $x = L$ vaut $T(L^+) = T_f$. Le coefficient de conducto-convection est noté h.



Application : simple vitrage et double vitrage.

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe Ox et dont le verre a une conductivité thermique $\lambda = 1{,}2$ W.m^{-1}.K^{-1}. L'air de la pièce est à la température $\mathrm{T}_i = 295$ K et l'air à l'extérieur est à la température $\mathrm{T}_e = 278$ K.

On note $h = 12$ W.m^{-2}.K^{-1} le coefficient de conducto-convection entre le verre et l'air.

1. La paroi est une simple vitre d'épaisseur $2e = 8$ mm. Déterminer le flux thermique Φ_{th_1} sortant de la pièce par cette paroi en fonction de λ, h, S, e, T_i et T_e.
2. La paroi est une double-vitre, ensemble de deux vitres de même épaisseur $e = 4$ mm séparées par une épaisseur $e' = 4$ mm d'air, de conductivité thermique $\lambda_a = 2{,}5\times10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1}.

   Déterminer le flux thermique Φ_{th_2} sortant de la pièce
3. En déduire le rapport $\Phi_{\mathrm{th}_2}/\Phi_{\mathrm{th}_1}$. En donner la valeur numérique.

.

4) Cas général

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Définition et propriétés de $\overrightarrow{j_Q}$. Loi de Fourier. Donner quelques ordres de grandeur de conductivités thermiques. Discuter la présence du signe "$-$" dans la loi de Fourier.
- Établir l'équation de diffusion thermique dans un des trois systèmes de coordonnées (au choix du colleur) en appliquant le premier principe à des tranches ou des coquilles élémentaires.
- Connaître les relations de passage à une interface solide - solide : continuité de la température et continuité de la composante normale de $\overrightarrow{j_Q}$.
- Connaître la relation de passage à une interface solide - fluide.
- Établir l'équation vérifiée par $T(x,t)$ dans une ailette de refroidissement cylindrique de rayon R en raisonnant sur une tranche élémentaire comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$.
- Calculer la résistance thermique d'une tige isolée thermiquement sur sa surface latérale dans un modèle où $T = T(x)$.
- Énoncer les lois d'association série et parallèle des résistances thermiques. Les démontrer dans le cas d'une association série ou parallèle de barres (au choix du colleur).

Exercices à travailler :

- En priorité : 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12
- S'il y a du temps : 7 et 10

Points du cours à connaître pour les machines :

- Énoncer et démontrer clairement le premier principe industriel. En obtenir une formulation en termes de puissances et une autre formulation en termes de grandeurs massiques.
- Énoncer et démontrer clairement le deuxième principe industriel. En obtenir une formulation par unité de temps en utilisant des taux d'entropie échangé et créée et une autre formulation par unité de masse.
- Connaître les expressions du taux d'entropie échangée pour une machine adiabatique et pour une machine ayant un transfert thermique avec une source de chaleur de température T_S.
- Énoncer et démontrer le théorème des moments pour les grandeurs massiques h, s et v d'un corps pur diphasé liquide + gaz. En donner une visualisation sur les diagrammes de Clapeyron, des frigoriste et sur le diagramme entropique (s,T).
- Enoncer les théorème de Carnot pour les machines dithermes (point du cours de MPSI)

Exercices à travailler sur les machine :

- En priorité : 3, 4 et 5
- S'il y a du temps : 1 et 6