Systèmes linéaires analogiques

# I. Système linéaire analogique (SLA) - Définition

## 1) Signal analogique

Un signal analogique est une grandeur physique décrite par une fonction  $s:t\longmapsto s(t)$  continue par morceaux et qui peut prendre toute valeur dans  $\mathbb{R}$ .

- s(t) peut représenter :
- une tension, une intensité;
- la position x(t) d'un point à l'instant t;
- une intensité lumineuse I(t);
- etc ...

Exemple : décharge d'un condensateur dans une résistance

#### 2) Définition

Un système linéaire analogique (SLA) est un système physique qui transforme un signal analogique e(t) appelé excitation en un signal analogique s(t) appelé réponse, de sorte que e(t) et s(t) soient reliés par une équation différentielle linéaire, dite equation caractéristique du SLA, dont la forme générale est :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \dots + b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j e}{\mathrm{d}t^j}$$

où les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  sont réels et en convenant que  $\frac{\mathrm{d}^0 s}{\mathrm{d} t^0} = s$  et  $\frac{\mathrm{d}^0 e}{\mathrm{d} t^0} = e$ .

$$e(t)$$
 SLA  $s(t)$ 

#### Ordre du SLA:

L'ordre du SLA est l'ordre maximal des dérivées qui interviennent dans son équation caractéristique. En conséquence :

ordre SLA = 
$$\begin{cases} n & \text{si} \quad n \geqslant m \\ m & \text{si} \quad m \geqslant n \end{cases}$$

## ${\bf Exemples}:$

• Circuit RC:

• Oscillation d'une masse :

## 3) Propriété de la réponse

L'excitation e(t) est supposée **connue** et on cherche à déterminer la réponse s(t) en résolvant l'équation caractéristique du SLA avec conditions initiales données. La structure de cette solution est toujours de la forme :

$$s(t) = s_{\ell}(t) + s_{p}(t)$$

avec:

$$a_0 s_{\ell}(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s_{\ell}}{\mathrm{d}t} + \dots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s_{\ell}}{\mathrm{d}t^n} = 0$$
 (Equ. homogène)

## 4) SLA stable

Un SLA est dit stable si et seulement si :

$$\lim_{t \to +\infty} s_{\ell}(t) = 0 \qquad \text{(amortissement du régime libre)}$$

Un critère simple permettant de voir si un SLA est stable ou non est le suivant :

Un SLA d'ordre 1 est stable si et seulement si  $a_0$  et  $a_1$  sont de même signe. Un SLA d'ordre 2 est stable si et seulement si  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont de même signe.

## Exemples:

• Circuit RC précédent :

$$RC \frac{\mathrm{d}s_{\ell}}{\mathrm{d}t} + s_{\ell} = 0$$
 stable

• masse oscillante de l'exemple précédent :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s_\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{\mathrm{d}s_\ell}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} s_\ell = 0 \qquad \text{stable}$$

Démo :

• Ordre 1 :

• Ordre 2 :

Dans toute la suite on n'étudiera que des SLA stables.

#### En pratique:

Un SLA stable est caractérisé par un temps caractéristique d'amortissement  $\tau$  du régime libre tel que  $s_{\ell}(t)$  soit négligeable devant  $s_{p}(t)$  au bout de quelques  $\tau$ : en pratique on prend  $5\tau$ . De ce fait, lorsque  $t > 5\tau$  on peut écrire :

$$s(t) \approx s_p(t)$$

**Exemple**: circuit RC:  $\tau = RC$ .

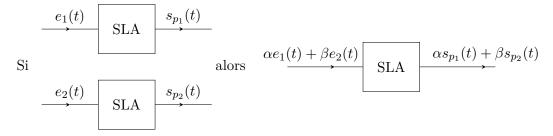
## 5) Propriété de la solution particulière $s_p(t)$ : théorème de superposition

C'est un théorème qui résulte directement de la linéarité de l'équation caractéristique du SLA.

#### Théorème

Si  $s_{p_1}(t)$  est une solution particulière associée à l'excitation  $e_1(t)$  et si  $s_{p_2}(t)$  est une solution particulière associée à l'excitation  $e_2(t)$ , alors  $\alpha s_{p_1}(t) + \beta s_{p_2}(t)$  est une solution particulière associée à l'excitation  $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$  ( $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes réelles).

#### Visualisation:



Ce théorème est très utilisé en pratique.

# II. Régime sinusoïdal forcé d'un SLA

#### 1) Le contexte

On s'intéresse maintenant au cas très important en pratique d'une excitation e(t) sinusoïdale de pulsation  $\omega$  (fréquence  $f = \omega/2\pi$ ):

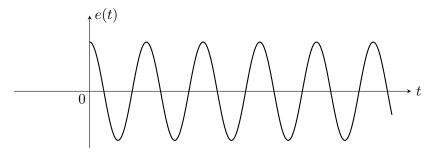
$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \qquad E_m > 0$$

On cherche  $s_p(t)$  sous la forme :

$$s_p(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s) \qquad S_m > 0$$

de **même pulsation**  $\omega$  que e(t).

## ${\bf Visualisation}:$





## 2) Fonction de transfert

Pour trouver  $s_p(t)$  on utilise la méthode des nombres complexes. À  $s_p(t)$  et e(t) on associe les grandeurs complexes :

$$\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t + \varphi_e)} = E_m e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi_s)} = S_m e^{j\varphi_s} e^{j\omega t}$$

de sorte que  $s_p(t)=\operatorname{Re}\left(\underline{s}_p(t)\right)$  et  $e(t)=\operatorname{Re}\left(\underline{e}(t)\right)$ .

## 3) Propriétés de <u>H</u>

On a:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}_p(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S_m}{E_m} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

ce qui conduit à poser :

• Gain du SLA :  $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m}$  donc  $S_m = G(\omega)E_m$ 

Le gain de la fonction de transfert est le rapport des amplitudes réelles.

• Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation :

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) = \varphi_s - \varphi_e$$

L'argument de la fonction de transfert est le déphasage de  $s_p(t)$  par rapport à e(t).

Finalement la donnée de  $\underline{H}$  permet de déterminer la solution particulière en régime sinusoïdal sous la forme :

$$s_p(t) = G(\omega)E_m\cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$$

## 4) Interprétation physique du déphasage : décalage temporel

Le SLA étants supposé stable, on se place à des instants  $t > 5\tau$ , de sorte que le régime libre  $s_{\ell}(t)$  soit négligeable devant la solution particulière :  $s(t) \approx s_p(t)$  : c'est le régime sinusoïdal forcé (RSF). On a donc :

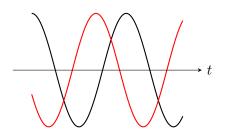
$$s(t) \approx G(\omega) E_m \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$$

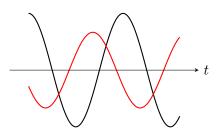
Comme  $\varphi(\omega)$  n'est défini que modulo  $2\pi$  près, on peut toujours se ramener au cas où :

$$\varphi(\omega) \in ]-\pi,\pi]$$

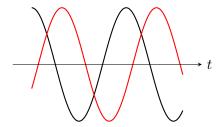
Deux cas se présentent :

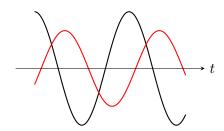
1.  $\varphi(\omega) > 0$ :





**2.**  $\varphi(\omega) < 0$  :

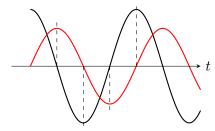




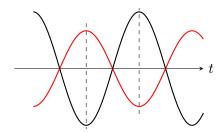
$$\varphi(\omega) = \pm \omega \tau(\omega) = \pm 2\pi f \tau(\omega)$$

Cas particuliers:

• Quadrature de phase :  $\varphi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \tau(\omega) = \frac{T}{4}$ Exemple de la quadrature retard :



• Opposition de phase :  $\varphi(\omega) = \pi \Longleftrightarrow \tau(\omega) = \frac{T}{2}$ 



# III. Application aux filtres: révision MPSI

## 1) Définition

Un filtre est un SLA particulier pour lequel le gain  $G(\omega)$  obéit à un format particulier. On distingue 4 types de filtres :

- 1. Filtre passe-bas:
- 2. Filtre passe-haut:
- 3. Filtre passe-bande:
- 4. Filtre coupe-bande:

Quelques exemples caractéristiques à connaître :

- 2) Filtre passe-bas du premier ordre
- 3) Filtre passe-haut du premier ordre
- 4) Filtre passe-bas du second ordre ordre
- 5) Filtre passe-bande du second ordre

## IV. Cas d'un signal analogique périodique

Un cas particulier très important en pratique est celui d'un signal analogique  $s:t\longmapsto s(t)$  périodique, de période temporelle T (pas forcément sinusoïdal). On peut alors introduire la fréquence f=1/T et la pulsation  $\omega=2\pi/T=2\pi f$  de ce signal.

### 1) Valeur moyenne et valeur efficace

#### Déf 1

On appelle  $valeur\ moyenne$  d'un signal  $s:t\longmapsto s(t)$  périodique de période T la grandeur définie par :

$$\langle s \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} s(t) dt$$

où  $t_0$  est un instant quelconque (le résultat ne dépend pas de  $t_0$ ).

#### Exemples:

• 
$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

• 
$$s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

#### Déf 2

On appelle valeur efficace  $S_{\rm eff}>0$  d'un signal  $s:t\longmapsto s(t)$  périodique de période T la grandeur positive vérifiant :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle_T} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} s^2(t) dt}$$

 $t_0$  étant un instant quelconque.

#### Exemples:

• 
$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

• Signal créneau symétrique :  $s(t) = S_m$  si  $t \in [nT, nT + T/2[$  et  $s(t) = -S_m$  si  $t \in [nT + T/2, (n+1)T[$ .

### 2) Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

### a) Somme de Fourier

Soit  $s:t\longmapsto s(t)$  un signal périodique de période T et de pulsation  $\omega=2\pi/T$ , supposé de classe  $C^1$  par morceaux. Soit  $n\in\mathbb{N}^*$  un entier strictement positif. À s(t) on associe une nouvelle fonction  $F_n$  définie pour tout  $t\in\mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right]$$

appelée somme de Fourier de rang n et où les coefficients  $A_k$  et  $B_k$  sont définis par :

$$\forall k \in [0, n], \ A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} s(t) \cos(k\omega t) dt$$

et

$$\forall k \in [1, n], B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} s(t) \sin(k\omega t) dt$$

 $t_0$  étant un instant quelconque.

#### b) Série de Fourier

À tout instant t fixé  $(F_n(t))_{n\geqslant 1}$  est une suite réelle. Dans le cas où elle converge on note F(t) sa limite qu'on écrit aussi sous la forme :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right]$$

F(t) est la série de Fourier associée à s, à l'instant t.

#### Théorème de Fourier

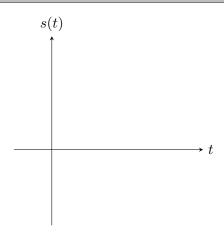
Soit  $s: t \mapsto s(t)$  un signal périodique de période T et de pulsation  $\omega = 2\pi/T$ ,  $C^1$  par morceaux et soit  $F_n(t)$  sa somme de Fourier à t.

1. À toute date t où  $t \mapsto s(t)$  est continue,  $(F_n(t))_{n\geqslant 1}$  est convergente et a pour limite :

$$F(t) = s(t)$$

2. À une date  $t_0$  où s présente une discontinuité finie,  $(F_n(t_0))_{n\geqslant 1}$  est aussi convergente et a pour limite :

$$F(t_0) = \frac{s(t_0^+) + s(t_0^-)}{2}$$



#### Remarques:

- Les signaux périodiques utilisés en physique comme le créneau, le triangle, la rampe, ... sont tous  $C^1$  par morceaux. Ils sont donc tous développables en série de Fourier.
- Les réponses s des SLA d'ordre  $\geqslant 1$  sont toutes  $C^1$  par morceaux en tant que solutions d'équations différentielles d'ordre au moins 1. Il n'y aura donc aucun problème pour leur développement en série de Fourier dans le cas où elles sont périodiques.
- Si on restreint l'étude à un intervalle de temps I sur lequel s est continue, alors on pourra écrire :

$$\forall t \in I, \ s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right]$$

Ainsi un signal  $t \mapsto s(t)$  périodique peut être regardé comme la somme :

• d'un signal constant :

$$s_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

On remarque donc que:

Le signal constant  $s_0$  (encore appelé composante continue ) est la valeur moyenne de s(t), soit  $s_0 = \langle s \rangle_T$ .

• d'un nombre infini de signaux sinusoïdaux :

$$s_k(t) = A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)$$

respectivement de pulsation  $\omega$ ,  $2\omega$ , ...,  $k\omega$  appelés harmoniques. L'harmonique de rang k est le signal  $s_k(t) = A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)$ . L'harmonique de rang 1, de même période de s(t) est le fondamental.

## 3) Propriété des coefficients $A_k$ et $B_k$

- Si la fonction périodique  $t \longmapsto s(t)$  est paire, alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ B_k = 0$
- Si la fonction périodique  $t \longmapsto s(t)$  est impaire, alors  $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = 0$

## 4) Autre forme de la série de Fourier

L'harmonique de rang k,  $s_k(t) = A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)$  peut aussi s'écrire :

$$s_k(t) = C_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

En effet :

#### Par conséquent :

La série de Fourier d'un signal périodique  $t \longmapsto s(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$F(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

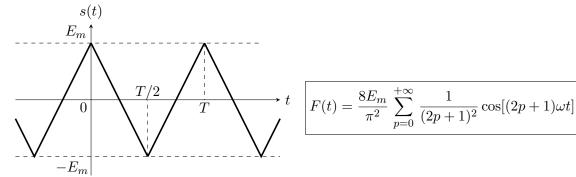
avec:

- $C_0 = \frac{A_0}{2}$ : composante continue (ou valeur moyenne)
- $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \ (k \geqslant 1)$  amplitude de l'harmonique de rang k.
- $\varphi_k$ : phase à l'origine des temps telle que  $\tan(\varphi_k) = -B_k/A_k$ .

## 5) Exemples

Signal créneau:

## Signal triangle:



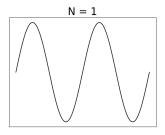
### 6) Synthèse de Fourier

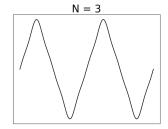
L'infini étant "trop loin" on peut se demander quel est le rang n à partir duquel une somme de Fourier  $F_n(t)$  représente "convenablement" le signal périodique s(t). La réponse dépend de la continuité ou non de s.

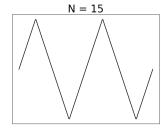
### Signal s continu

La convergence de  $F_n(t)$  est très rapide et un nombre fini de termes reproduit s(t) de façon très convenable.

**Exemple** : reconstitution d'un signal triangulaire. N est le nombre de termes de la série qu'on prend en compte.



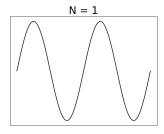


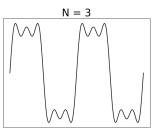


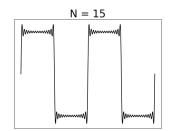
#### Signal s discontinu

Si s est discontinu en  $t_0$  alors il existe un écart important entre s(t) et  $F_n(t)$  au voisinage de  $t_0$ , même pour n grand. Il y a un phénomène d'oscillations de  $F_n$  appelé **phénomène de Gibbs**. La convergence de  $F_n(t)$  est lente.

Exemple: reconstitution d'un signal créneau.



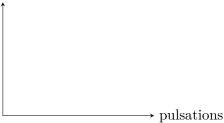




## 7) Spectre d'un signal analogique

• Cas d'un signal sinusoïdal :  $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 

Amplitudes



• Cas d'une somme de deux signaux sinusoïdaux de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ) :

$$s(t) = S_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + S_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Amplitudes



• Cas d'un signal périodique quelconque

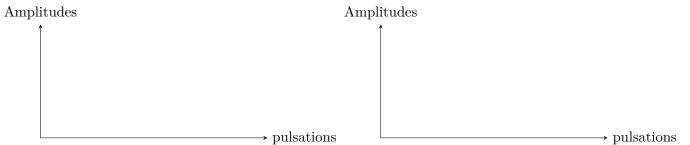
Considérons un signal périodique  $t \longmapsto s(t)$  développable série de Fourier, donnée par :

$$F(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

L'ensemble des amplitudes  $\{C_k, k \in \mathbb{N}\}$  forme le spectre en amplitude du signal s. Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes  $C_k$  en fonction de  $k\omega$ .

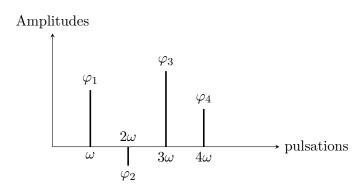
Amplitudes

### Exemples:



## ${\bf Remarques}:$

- On peut aussi graduer l'axe des abscisses en fréquences :  $f_k = k \omega/2\pi$
- Il existe aussi un spectre en phases où on représente les  $\varphi_k$  en fonction de  $k\omega$ .



# V. Action d'un filtre sur un signal périodique

## 1) Forme de la réponse

On considère un filtre **stable** de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ . On lui applique différents types d'excitation e(t) à partir de t=0 et on souhaite déterminer l'expression de la réponse s(t) lorsque le régime libre est amorti  $t>5\tau$ .

1. e(t) sinusoïdal :  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ 

**2. Excitation constante** :  $\forall t > 0, e(t) = E_0$  constante

3. Cas d'une somme de deux signaux sinusoïdaux :  $e(t)=E_{m1}\cos(\omega_1t+\varphi_1)+E_{m2}\cos(\omega_2t+\varphi_2)$ 

4. e(t) périodique (période  $T_e$ ) quelconque mais développable en série de Fourier :

2) Quelques applications

Action d'un filtre passe-bande sélectif :  $Q\gg 1$ 

## Action d'un filtre passe-haut d'ordre 1

On désigne par  $\omega_e$  la pulsation de l'exicitation e(t) et par  $\omega_c$  la pulsation de coupure du filtre passe-haut dont la fonction de transfert est donc :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad H_0 > 0$$

## 3) Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

### a) Dérivateur parfait

#### Déf 1

Un dérivateur parfait est un SLA dont l'équation caractéristique est :

$$s(t) = K \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$
  $K$  constante

Dans le cas particulier du régime sinusoïdal forcé (RSF) pour lequel  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$  et  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ , en introduisant les grandeur complexes :

$$\underline{e}(t) = E_m e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}$$
 et  $\underline{s}(t) = S_m e^{j\varphi_s} e^{j\omega t}$ 

on obtient:

$$\underline{s}(t) = K \frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t} = K j\omega \,\underline{e}$$

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{\underline{H}(j\omega) = \underline{\underline{s}(t)}} = K j\omega$$

### b) Intégrateur parfait

#### Déf 2

Un intégrateur parfait est un SLA dont l'équation caractéristique est :

$$s(t) = s(0) + K \int_0^t e(t') dt' \iff \frac{ds}{dt} = Ke(t)$$
 K constante

Dans le cas particulier du régime sinusoïdal forcé (RSF) on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = K\underline{e}(t) = j\omega\underline{s}$$

d'où la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{j\omega}}$$

### c) Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre

On dit qu'un filtre possède un caractère dérivateur dans un domaine de fréquences si et seulement si sa fonction de transfert peut s'écrire de façon approchée  $\underline{H}(j\omega) \approx K j\omega$  dans ce domaine de fréquences.

On dit qu'un filtre possède un caractère intégrateur dans un domaine de fréquences si et seulement si sa fonction de transfert peut s'écrire de façon approchée  $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega}$  dans ce domaine de fréquences.

## Exemples: