

Incertitudes

Les demi-étendues sur L et C sont respectivement égales à :

$$\Delta_L = 47 \times \frac{1}{100} = 0,47 \text{ mH} \quad \text{et} \quad \Delta_C = 100 \times \frac{2}{100} = 2 \text{ nF}$$

On en déduit les incertitudes-types :

$$u(L) = \frac{\Delta_L}{\sqrt{3}} = 0,27 \text{ mH} \quad \text{et} \quad u(C) = \frac{\Delta_C}{\sqrt{3}} = 1,2 \text{ nF}$$

On en déduit :

$$\frac{u(f_0)}{E(f_0)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{u(L)}{E(L)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{u(C)}{E(C)} \right)^2} = 6,65 \cdot 10^{-3}$$

Or :

$$E(f_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{E(L) E(C)}} = 2321,5 \text{ Hz}$$

Il vient :

$$u(f_0) = 15,44 < 20 \text{ Hz}$$

et donc :

$$f_0 = (2321 \pm 20) \text{ Hz}$$

Problème de thermodynamique (CCINP MP)

A. Échangeur thermique

I. Bilan d'enthalpie

- 1) d_k (resp. $d_{k'}$) est le débit massique à l'entrée k (resp. à la sortie k'). h_k (resp. $h_{k'}$) est l'enthalpie massique à l'entrée k (resp. à la sortie k'). On peut donc dire que $d_k h_k$ est l'enthalpie entrante par unité de temps à l'entrée k tandis que $d_{k'} h_{k'}$ est l'enthalpie sortante par unité de temps à la sortie k' .

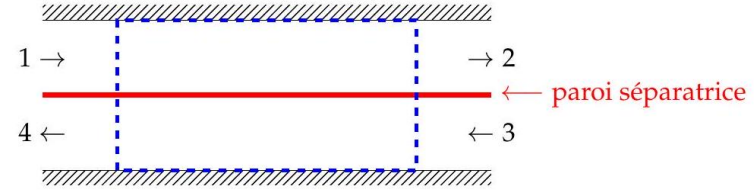


FIGURE 1 – Échangeur

- 2) On applique le premier principe industriel précédent à l'échangeur thermique en considérant deux entrées et deux sorties. Il n'y a ni puissance mécanique utile (pas de pièces mécaniques mobiles) ni puissance thermique (canalisations calorifugées). On en déduit :

$$(d_4 h_4 + d_2 h_2) - (d_1 h_1 + d_3 h_3) = 0$$

Les écoulements sont stationnaires donc $d_1 = d_2 = d_g$ et $d_3 = d_4 = d_e$.

De plus pour une phase condensée idéale : $h = u + Pv$ avec $v = \text{Cste}$, ce qui implique :

$$dh = du + v dP = c dT + v dP = c dT \quad \text{si} \quad dP = 0$$

Il vient : $h_2 - h_1 = c_g (T_2 - T_1)$ et $h_4 - h_3 = c_e (T_4 - T_3)$. On en déduit :

$$d_e c_e (T_4 - T_3) + d_g c_g (T_2 - T_1) = 0$$

- 3) $d_e = 13,1 \text{ kg.s}^{-1}$.

II. Bilan d'entropie

- 4) En régime stationnaire d'écoulements,

$$\sum_{k' \in \text{sortie}} d_{k'} s_{k'} - \sum_{k \in \text{entrée}} d_k s_k = \tau_{\text{éch}} + \tau_c$$

où $d_k s_k$ est l'entropie entrante par unité de temps à l'entrée k et $d_{k'} s_{k'}$ est l'entropie sortante par unité de temps à la sortie k' , $\tau_{\text{éch}}$ est l'entropie échangée par unité de temps lors des échanges thermiques et τ_c est l'entropie créée par unité de temps pour le même système.

- 5) En appliquant le second principe industriel à l'échangeur on obtient, avec $\tau_{\text{éch}} = 0$ (aucun transfert thermique) :

$$d_e (s_4 - s_3) + d_g (s_2 - s_1) = 0 + \tau_c$$

Or pour une phase condensée idéale, la première identité thermodynamique donne (avec $v = \text{Cste}$) :

$$du = T ds - P dv = T ds \quad \text{avec} \quad du = c dT \quad \text{donc} \quad ds = c \frac{dT}{T}$$

On en déduit :

$$s_4 - s_3 = c_e \int_{T_3}^{T_4} \frac{dT}{T} = c_e \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) \quad \text{et} \quad s_2 - s_1 = c_g \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_g \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

d'où :

$$\tau_c = d_e c_e \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) + d_g c_g \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

AN : $\tau_c = 2,81 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ On trouve bien une entropie créée positive qui traduit l'irréversibilité des transferts thermiques entre les deux fluides, l'un étant plus chaud que l'autre.

B. Isolation thermique d'une canalisation d'eau

- 6) $\mathcal{P}_{\text{th}} = \varphi 2\pi r_i L = h (T_i - T_0) 2\pi r_i L$ est la puissance transférée au niveau de la surface latérale (pour le moment on ne discute pas

du signe puisqu'il ne s'agit pas d'appliquer le premier principe à un système).

- 7) La puissance échangée entre l'isolant et le fluide extérieur par conducto-convection est :

$$\mathcal{P}_{\text{th,isolant}} = h (T_e - T_0) 2\pi r_e L$$

(On ne discute pas du signe non plus).

- 8) a) En appliquant le premier principe à la couche cylindrique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$, entre t et $t + dt$ on obtient :

$$d\delta U = \Phi(r) dt - \Phi(r + dr) dt$$

En régime stationnaire, $d\delta U = 0$; on en déduit que $\Phi(r)$ est indépendante de r .

- b) Par continuité de la puissance thermique, la puissance thermique conductive en r_e^- , c'est-à-dire $\Phi(r_e)$, est égale à la puissance thermique conducto-convective en r_e^+ , c'est-à-dire $\mathcal{P}_{\text{th,isolant}}$:

$$\Phi(r) = \Phi(r_e) = \mathcal{P}_{\text{th,isolant}}$$

- c) Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ puisqu'ici $\vec{\text{grad}} T = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$.

On en déduit :

$$\Phi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

- d)

$$\Phi(r) = \mathcal{P}_{\text{th,isolant}} \Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L = h (T_e - T_0) 2\pi r_e L$$

donc :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e}{\lambda r} (T_0 - T_e)$$

e) Par intégration entre $r = r_i$ où $T = T_i$ et r_e où $T = T_e$:

$$T_e = T_i + \frac{hr_e}{\lambda} (T_0 - T_e) \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)$$

on isole T_e pour trouver le résultat :

$$T_e = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}$$

9) $\frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{th,isolant}} = \frac{T_i - T_0}{T_e - T_0} \frac{r_i}{r_e}$. Or $\frac{T_i - T_0}{T_e - T_0} = 1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)$.

En posant $x = r_e/r_i$ et $\alpha = hr_i/\lambda$, il vient alors

$$\frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$$

10) L'isolant présente un intérêt si $\frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{th,isolant}} > 1$ pour $r_e > r_i$ (ou $x > 1$).

a) La figure 4 de l'énoncé montre que pour $x > 1$, $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ est une fonction croissante de x à partir de la valeur $x = 1$. On a donc toujours $\mathcal{P}_{th,isolant} < \mathcal{P}_{th}$ quelle que soit l'épaisseur d'isolant. Le polyuréthane isole quelle que soit son épaisseur.

b) la figure 5 montre un comportement différent. Pour $x \in [1; 60]$, $\frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{th,isolant}} \leq 1$ donc ajouter du plâtre augmente la puissance cédée par l'eau à l'air ambiant : l'eau se refroidit alors plus vite qu'en l'absence de plâtre.

C'est seulement pour $x > 60$, soit $r_e > 60r_i$ que $\mathcal{P}_{th,isolant} < \mathcal{P}_{th}$. Il faut donc une valeur minimale de r_e égale à $r_{e,min} = 120$ cm! Peu réaliste!

C'est la résistance conducto-convective qui diminue avec r_e qui est responsable de ce cas de figure.

c) Soit $f(x) = \frac{1}{x} + \alpha \ln x$.

$$f'(x) = \frac{\alpha x - 1}{x^2}$$

$$f'(x_m) = 0 \Leftrightarrow x_m = \frac{1}{\alpha}$$

d) La figure 5 montre que $x_m \approx 4$. On en déduit $\frac{hr_i}{\lambda_2} = \frac{1}{4}$ donc :

$$\lambda_2 = 4hr_i = 0,24 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$