

DS n°7bis (Centrale-Mines)
(Samedi 8 mars 2025 – Durée 4 h)**PROBLEME 1 : L'atmosphère de Mars et son échappement**

Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Il y a quatre milliards d'années, Mars avait un environnement identique à celui de la Terre : une atmosphère dense était présente et permettait de conserver chaleur et humidité, ce qui participait à rendre cette planète habitable.

Aujourd'hui, Mars n'a quasiment plus d'atmosphère. Elle est devenue une planète froide et désertique. Son atmosphère actuelle est principalement composée (en pourcentages massiques) de dioxyde de carbone (96%), d'argon (environ 2%) et de diazote (2%). Elle comporte également des traces de dioxygène, d'eau et de méthane. La pression moyenne ambiante est environ 170 fois moins importante que sur Terre. À une altitude de référence, au niveau du sol martien, la pression moyenne et la température moyenne sont respectivement de 600 Pa et 210 K. La masse totale de l'atmosphère martienne est estimée à 25 teratonnes (25000 milliards de tonnes), soit environ 200 fois moins que l'atmosphère terrestre.

Un point M de l'atmosphère de Mars est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O , le centre de la planète, celle-ci étant modélisée par une boule de répartition de masse à symétrie sphérique. On note donc que $r \geq R_m$, R_m étant le rayon moyen de Mars.

I.A - Préliminaire : le champ de pesanteur martien

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution du champ de pesanteur martien avec l'altitude. Pour cela, on l'assimile au champ gravitationnel et on raisonne par analogie avec l'interaction électrostatique. Le champ de pesanteur martien est noté $\vec{g}(M)$ au point M .

- Q1.** Expliquer en quoi l'assimilation du champ de pesanteur au champ gravitationnel constitue une approximation.
- Q2.** Soit deux particules supposées ponctuelles positionnées aux points M_1 et M_2 , portant respectivement les charges q_1 et q_2 . On note d , la distance entre M_1 et M_2 . Rappeler l'expression de la force d'interaction électrostatique créée par q_1 et agissant sur q_2 . Proposer un schéma associé.
- Q3.** Par une analogie formelle soignée entre les champs électrostatique et gravitationnel, construire et énoncer le théorème de Gauss gravitationnel (analogue en gravitation du théorème de Gauss de l'électrostatique).
- Q4.** En déduire, dans l'espace autour de Mars, une expression de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ de cette planète.
- Q5.** Obtenir une expression de $\vec{g}(M)$ en fonction de R_m , r et $\vec{g}_0$, accélération de la pesanteur au niveau du sol. Déterminer et calculer l'intensité g_0 de cette dernière.

I.B - L'atmosphère martienne, hors tempêtes de poussières

I.B.1) Le modèle de l'atmosphère isotherme

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère martienne. On l'assimile à un gaz parfait de particules de masse molaire M_a . On note respectivement $P(M)$ et $\mu(M)$ la pression et la masse volumique au point M . La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée T_0 . La pression au sol est notée P_0 .

On suppose l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ radiale et d'intensité uniforme : $\|\vec{g}(M)\| = g_0$.

- Q6.** À l'aide de l'équation locale de la statique des fluides établir la relation entre $\frac{\partial P}{\partial r}$ et l'accélération de la pesanteur g_0 à la distance $r \geq R_m$ du centre de la planète Mars.
- Q7.** Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme $P(r) = C_0 \exp\left(-\frac{r}{H}\right)$ dans l'atmosphère martienne ($r \geq R_m$). Exprimer le facteur C_0 et la hauteur d'échelle H en fonction de P_0, M_a, g_0, R et T_0 .
- Q8.** Déterminer une valeur numérique pour M_a compte tenu de la composition de l'atmosphère martienne fournie dans l'introduction de cette partie, puis calculer H .

I.B.2) Dédution de la masse de l'atmosphère martienne

- Q9.** Expliciter grâce au modèle précédent $\mu(r)$ en fonction de r, R_m, H et $\mu_0 = \mu(R_m)$. On précisera l'expression de μ_0 en fonction de P_0, M_a, R et T_0 .
- Q10.** Montrer que l'expression de la masse totale de l'atmosphère martienne, d'extension infinie dans le modèle étudié, se met sous la forme suivante : $m_{\text{atm}} = \frac{4\pi P_0}{g_0} [2H^2 + 2HR_m + R_m^2]$. En déduire une expression approchée, puis effectuer l'application numérique.

I.B.3) Une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère

La couche la plus externe de l'atmosphère d'un corps céleste est appelée exosphère. L'altitude minimale de l'exosphère, appelée exobase, peut être choisie comme définition de l'épaisseur de l'atmosphère : on la note e .

L'exosphère se définit comme la région de l'atmosphère où la densité de particules est assez faible pour que l'effet des collisions entre particules soit négligeable en comparaison de l'effet de leur cinétique. En particulier, le libre parcours moyen des particules de l'atmosphère, c'est à dire la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions, y est supérieur à la longueur caractéristique de décroissance de la densité de l'atmosphère.

L'expression du libre parcours moyen d'une particule de l'atmosphère est donnée par $\ell(M) = \frac{M_a}{a^2 \mathcal{N}_a \mu(M)}$, où a est la taille typique des molécules formant le gaz et $\mathcal{N}_a$ la constante d'Avogadro.

- Q11.** Proposer une estimation du libre parcours moyen au niveau du sol martien, que l'on notera ℓ_0 . Commenter.
- Q12.** Exprimer e en fonction de ℓ_0 et H en utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme précédent. En déduire une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère martienne. Confronter le résultat à la valeur fournie dans les données en fin d'énoncé.

I. C - L'échappement de l'atmosphère martienne vers l'espace

En 2013, la NASA a envoyé la sonde MAVEN qui est toujours en activité autour de Mars. Sa principale mission est de mesurer quantitativement le taux de perte des composés atmosphériques qui s'échappent dans le milieu interplanétaire afin de pouvoir extrapoler les taux d'échappement tout au long de l'histoire de la planète. En novembre 2015, l'équipe scientifique de MAVEN a rendu publics des résultats montrant que les gaz atmosphériques s'évaporaient dans l'espace au rythme de 100 g.s^{-1} environ.

Les mécanismes ayant conduit l'atmosphère martienne à être ce qu'elle est aujourd'hui ne sont pas bien connus. L'une des hypothèses avancées est que la faible gravité a entraîné la dispersion progressive des gaz légers de la haute atmosphère vers l'espace.

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la perte de la majeure partie de l'atmosphère, il y a environ 4 milliards d'années. En particulier, Mars aurait perdu son bouclier magnétique permettant alors au vent solaire de balayer une grande partie de son atmosphère. De plus, d'importantes éruptions volcaniques ou des impacts de météorites auraient éjecté les gaz atmosphériques vers l'espace.

Aujourd'hui encore, d'autres processus continuent de faire évoluer la composition de l'atmosphère martienne. Le phénomène d'échappement atmosphérique décrit la perte des gaz constituant l'atmosphère vers l'espace. Plusieurs mécanismes peuvent contribuer à cet échappement, le principal paramètre d'influence étant la masse de la planète Mars.

I.C.1) Processus d'échappement de Jeans

L'un des mécanismes d'échappement est celui dit de Jeans. Certaines molécules en provenance des couches atmosphériques inférieures de Mars peuvent subir des réactions chimiques les transformant en atomes neutres (N, H, O, etc). Lorsque ces réactions se produisent près de l'exobase, certains des atomes sont expulsés vers l'exosphère. En effet, dans cette région, la densité est suffisante pour que des collisions se produisent, mais elle est suffisamment faible pour que l'énergie acquise par les particules ne soit pas dissipée dans de nouvelles collisions (thermalisation). Ainsi, ces atomes ont acquis suffisamment d'énergie pour s'échapper dans l'espace interplanétaire : ils ont alors une vitesse supérieure à la vitesse de libération de l'atmosphère.

Ce phénomène peut s'observer également dans une moindre mesure pour les molécules.

Q13. À l'aide des graphes fournis figure 2 et de données numériques dûment justifiées, indiquer quel est le principal élément chimique qui subit l'échappement de Jeans. Conclure. De la même manière, justifier la composition de l'atmosphère martienne actuelle.

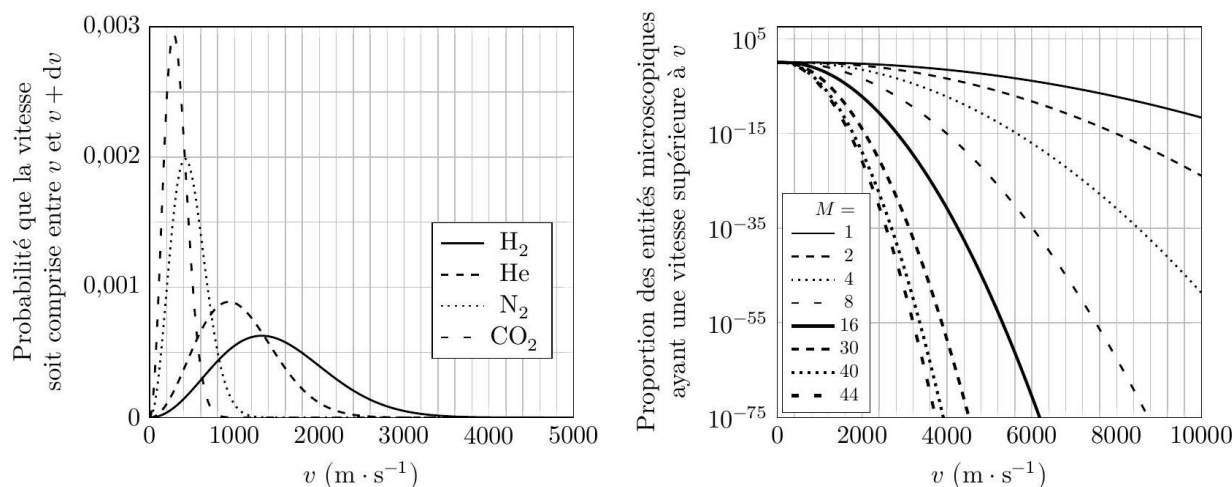


Figure 2 Gauche : distribution maxwellienne des vitesses, pour la température $T_0 = 210$ K. Droite : proportion des entités microscopiques de masse molaire M , exprimée en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ayant une vitesse supérieure à v .

Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil	r_m	$2,28 \times 10^8$ km
Rayon moyen de la planète Mars	R_m	$3,39 \times 10^3$ km
Masse de la planète Mars	m_m	$6,42 \times 10^{23}$ kg
Température à la surface de Mars	T_0	210 K
Pression à la surface de Mars	P_0	600 Pa
Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière)	e	$2,20 \times 10^2$ km

Autres données utiles :

Constante de gravitation universelle	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_a$	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du carbone	M_C	$12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	M_O	$16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'argon	M_{Ar}	$40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'azote	M_N	$14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}$$

Quelques intégrales :

$$\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$$

PROBLEME 2 : Étude d'une Centrale nucléaire

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à $p = 155$ bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.

I Étude du circuit primaire

Le cœur est constitué de $N = 41\,448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66$ m et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5$ mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut : $P_1 = 2776$ MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, $\text{UO}_{2(s)}$, dont la température de fusion vaut 2800 °C. La conductivité thermique de $\text{UO}_{2(s)}$ vaut $\lambda_2 = 3,5$ W.m⁻¹.K⁻¹.

La pression de vapeur saturante de l'eau à 345 °C vaut 155 bar .

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique (énergie cinétique macroscopique et énergie potentielle macroscopique).

I. A - Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible $\text{UO}_{2(s)}$ et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303$ °C.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $h dS (T_s - T_a)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60 \text{ mm}$ dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

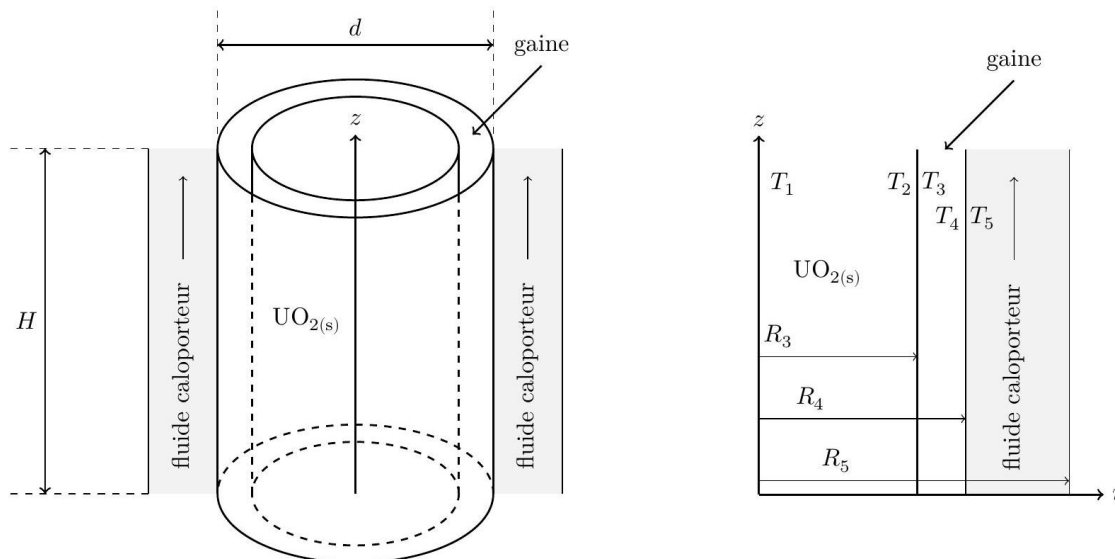


Figure 2

- Q1.** Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H .

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

- Q2.** Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

- Q3.** Exprimer la température $T(r)$ dans $\text{UO}_{2(s)}$ en fonction de P_V , T_2 , R_3 , λ_2 et r .
Q4. Exprimer la température T_3 en fonction de T_2 , P_1 , h_2 , d , e , H et N .
Q5. Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de T_4 , P_1 , R_4 , λ_3 , S_{tot} et r .
Q6. Calculer les températures T_4 , T_3 , T_2 et T_1 .
Q7. Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.
Q8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

I.B - Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Dans cette partie, on néglige l'influence de la gaine mais on tient compte du profil non uniforme, selon la coordonnée z , de la puissance thermique générée par les réactions de fission, ainsi que de la dépendance avec z du champ de température.

Chaque crayon combustible de rayon R_4 et de hauteur H est refroidi par une circulation d'eau liquide dans un espace annulaire de rayon extérieur R_5 entourant le crayon. On ne considère dans cette sous-partie qu'un seul crayon.

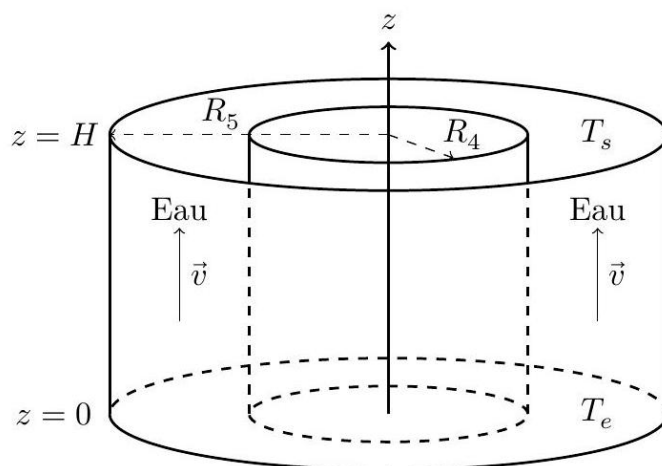


Figure 3

La puissance thermique $P_V(z)$ par unité de volume engendrée par les réactions de fission au sein de la barre du combustible est modélisée par : $P_V(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$. On suppose que les échanges thermiques se font toujours exclusivement dans la direction radiale de la barre de combustible. On appelle r la distance à l'axe du cylindre.

L'eau liquide circule à la vitesse $v = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$ avec un débit massique $D_m = 0,30 \text{ kg.s}^{-1}$; la température d'entrée (en $z = 0$) de l'eau liquide est $T_e = 284 \text{ °C}$ et sa température de sortie (en $z = H$) est $T_s = 322 \text{ °C}$. La capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante sur cette plage de température, est prise égale à $c_5 = 5750 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. On admet qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur pour $r = R_5$.

Dans la suite, on suppose que la température de l'eau liquide ne dépend que de z et on la note $T(z)$; la température dans la barre de combustible dépend de r et z et est notée $T_c(r, z)$.

- Q9.** En réalisant un bilan thermodynamique pendant dt pour l'eau liquide entre les cotes z et $z + dz$ (avec $dz \ll z$), en écoulement stationnaire dans l'espace annulaire, justifier que :

$$D_m c_5 [T(z + dz) - T(z)] = P_V(z) \pi R_4^2 dz$$

- Q10.** Exprimer $T_s - T_e$ en fonction de R_4 , H , D_m , c_5 et P_0 . Exprimer la température $T(z)$ de l'eau liquide en fonction de T_e , T_s , z et H .

On note h_{cc} le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de combustible et l'eau liquide dans ce modèle, et $T_p(z)$ la température de la paroi de la barre de combustible à l'altitude z .

Q11. Montrer que :

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right].$$

Exprimer B et C en fonction de h_{cc} , H , D_m , c_5 et R_4 .

Q12. Déterminer la température $T_c(r, z)$ dans la barre de combustible. Montrer que :

$$\frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

Exprimer D , E et F en fonction de D_m , c_5 , H , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

Q13. Exprimer la température $T_c(r = 0, z)$ sur l'axe de la barre de combustible à l'altitude z en fonction de T_e , T_s , D_m , z , H , c_5 , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

Q14. En déduire l'altitude pour laquelle la température sur l'axe de la barre de combustible est maximale. Calculer la valeur de la température maximale sur l'axe ; on prendra $h_{cc} = 33 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Préciser si un critère de sûreté en température est respecté.

Le graphe de la figure 4 représente l'évolution de la température de la paroi du crayon combustible avec la cote z .

Q15. Justifier qualitativement son allure.

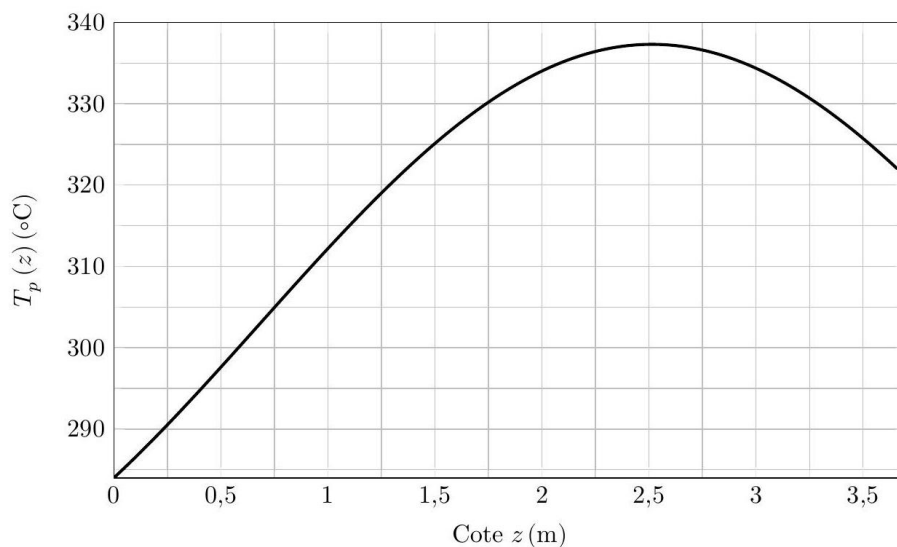


Figure 4 Évolution spatiale de la température T_p de la paroi du crayon combustible.

Formulaire et données

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Variation d'entropie d'une phase condensée incompressible de capacité thermique C entre un état 1 et un état 2 :

$$\Delta S = C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Coordonnées du point critique de l'eau : $T_C = 374 \text{ °C}$, $p_C = 221 \text{ bar}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$