

Proposition de corrigé du sujet Centrale PC Physique 2 2024

Corrigé proposé par Mickaël Loire et Marc Legendre.

Ce corrigé peut-être distribué librement à vos étudiants mais nous nous opposons à toute réutilisation commerciale de ce corrigé. N'hésitez pas à nous signaler toute erreur.

Q1 Par définition, le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement (ici due à la rotation de la planète Mars sur elle-même). La force d'inertie d'entraînement est probablement ici négligeable (l'énoncé ne donne pas de données).

Q2 $\boxed{\vec{F}_{q1/q2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2}$

Q3 Analogies électrostatiques/gravitationnelles :

Électrostatique	Gravitation
q	m
$\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}$	$\frac{\rho}{-G}$

Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\text{div}(\vec{g}) = -4\pi G\rho \quad \Leftrightarrow \quad \oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Q4 La distribution de masses est :

- invariante par rotation d'angles θ et ϕ quelconques.
- Par les plans de symétries : $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$

Ainsi $\boxed{\vec{g}(r, \theta, \phi) = g_r(r) \vec{e}_r}$.

Surface de Gauss : sphère de rayon r .

Hyp : on néglige la contribution de l'atmosphère à $\vec{g}$.

L'application du théorème de Gauss gravitationnel conduit à

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 g_r(r) &= -4\pi G m_m \\ \text{dc} \quad g_r(r) &= -\frac{G m_m}{r^2} \\ \text{dc} \quad \boxed{\vec{g}(r) = -\frac{G m_m}{r^2} \vec{e}_r} \end{aligned}$$

Q5 Au niveau du sol, $r = R_m$, $\vec{g}_0 = -\frac{G m_m}{R_m^2} \vec{e}_r$ donc $\boxed{\vec{g}(r) = -\left(\frac{R_m}{r}\right)^2 \vec{g}_0}$. AN : $g_0 = 3.73 \text{ m.s}^{-2}$.

Q6 La force volumique de pression s'écrit : $\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)}$.

Pour le système {Particule de fluide de volume $d\tau$ }, dans le référentiel martien supposé galiléen, et à l'équilibre, le TRC nous donne : $\boxed{\vec{0} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)}$.

Q7 En assimilant l'atmosphère à un GP, on a $PV = nRT = \frac{mRT}{M_a}$ soit $\boxed{\mu = \frac{M_a P}{RT}}$.

D'après Q6, et après projection dans la base sphérique, on a :

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{M_a P g}{RT} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Les lignes (2) et (3) impliquent que $P(r, \theta, \phi) = P(r)$ soit $\frac{dP}{dr} + \frac{P}{H} = 0$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$.

La condition aux limites $P(r = R_m) = P_0$ nous donne l'expression demandée : $P(r, \theta, \phi) = C_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$

avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$ et $C_0 = P_0$.

Q8 D'après les données de l'introduction relative à la composition de l'atmosphère : $M_a = 96\% \times M_{\text{CO}_2} + 2\% \times M_{\text{Ar}} + 2\% \times M_{\text{N}_2}$. AN : $M_a = 44 \text{ g.mol}^{-1}$ et $H = 10.7 \text{ km}$.

Q9 D'après Q7, $\mu(r, \theta, \phi) = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$ et $\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$.

Q10 Déterminons m par intégration de μ . On supposera que l'hypothèse g uniforme est encore valable.

$$\begin{aligned} m_{\text{atm}} &= \iiint_{V_{\text{int}}} \mu \, d\tau \\ &= \int_{r=R_m}^{+\infty} \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}} 4\pi r^2 \, dr \\ &= 4\pi \mu_0 H^3 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{R_m}{H}\right)^2 e^{-u} \, du \\ &= 4\pi \mu_0 H^3 \times \left(2 + 2\frac{R_m}{H} + \left(\frac{R_m}{H}\right)^2\right) \end{aligned}$$

En utilisant les intégrales données en fin d'énoncé.

Avec $\mu_0 H = \frac{P_0}{g_0}$, on obtient le résultat demandé : $m_{\text{atm}} = 4\pi \frac{P_0}{g_0} (2H^2 + 2HR_m + R_m^2)$.

AN : $m_{\text{atm}} = 2.34 \cdot 10^{16} \text{ kg}$.

Q11 Interprétation du libre parcours moyen : il s'agit de la distance moyenne parcourue entre deux collisions.

En considérant qu'on a 1 seule particule dans le volume $a^2 l$, on a $l = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu}$. Or au niveau du sol

$\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$ donc $l_0 = \frac{RT_0}{a^2 N_a P_0}$. AN avec $a \approx 10^{-10} \text{ m}$, $l_0 \approx 0.5 \text{ mm}$. Cet ordre de grandeur est plus grand que dans les CNTP car à la surface martienne, $P_0 = 600 \text{ Pa}$ et non pas 1 bar.

Q12 Par définition de e , en $r = R_m + e$, on a $H = l(r = R_m + e) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu_0 e^{-e/H}} = l_0 e^{e/H}$. Ainsi

on trouve $e = H \ln\left(\frac{H}{l_0}\right)$. AN : $l_0 = 1.8 \cdot 10^5 \text{ m}$

Q13 Déterminons au préalable la vitesse de libération d'une particule de masse m .

La vitesse de libération v est solution de l'équation $0 = E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_m m}{R_m + e}$. On isole $v = \sqrt{\frac{2Gm_m}{R_m + e}}$.

Avec $Gm_m = R_m^2 g_0$, on a $v = \sqrt{\frac{2R_m^2 g_0}{R_m + e}} \approx \sqrt{2R_m g_0}$ pour $e \ll R_m$. AN : $v \approx 5.0 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

D'après la figure 2, les molécules de dihydrogène possèdent très majoritairement une vitesse supérieure à $V_{\text{libération}}$, ce qui expliquerait son absence dans l'atmosphère martienne. Par contre, les éléments les plus lourds seront conservés par l'atmosphère, c'est le cas ici du CO_2 , Ar (et non pas He et Ne plus légers), et de N_2 . Notons que pour les hautes couches, l'échauffement thermique dû au rayonnement solaire, peut provoquer une augmentation des vitesses et donc une « évaporation » supplémentaire.

Q14 En ordre de grandeur, en considérant une molécule par volume d^3 on a $n^* = \frac{1}{d^3}$. Ainsi

$$\mu = \frac{M_a}{N_a d^3}.$$

Q15 Modèle continu : $d \ll e$. Or $d = \left(\frac{N_a \mu}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d'après Q14 et $\mu = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme. Ainsi $d = \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{r-R_m}{3H}}$. Il faut donc choisir

$r - R_m \ll 3H \ln \left(e \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$. AN : $r - R_m \ll 1.0 \cdot 10^6$ m. Le modèle continu est notamment valable dans l'exosphère à 10% près.

Q16 En simplifiant l'équation de Navier-Stokes : $\begin{array}{ll} \text{RS} & \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{Parfait} & \Rightarrow \eta = 0 \\ \vec{v} = v_r(r) \vec{u}_r & \Rightarrow (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \end{array}$ on obtient l'équation $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q17 Pour un GP, $P = \frac{RT\mu}{M_a}$ ainsi l'équation Q15 se simplifie en $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{RT}{M_a} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q18 L'écoulement est stationnaire donc le débit massique se conserve. Sur la sphère de rayon r , où v est uniforme, on a $\text{cste} = 4\pi r^2 \mu v$ d'où $\boxed{\mu r v = \text{cste} = K}$.

Q19 En multipliant l'équation Q17 par r^2 et en réinjectant $\mu = \frac{K}{r^2 v}$, on a :

$$\begin{aligned} K \frac{dv}{dr} &= -\frac{RT}{M_a} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{K}{v r^2} \right) - G m_m \frac{K}{v r^2} \\ &= \frac{RTK}{M_a} \left(\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dr} + \frac{2}{v r} \right) - \frac{G m_m K}{v r^2} \end{aligned}$$

En simplifiant par K et factorisant les termes en $\frac{dv}{dr}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \times \left(1 - \frac{RT/M_a}{v^2} \right) &= \frac{1}{v} \left(\frac{2RT/M_a}{r} - \frac{G m_m}{r^2} \right) \\ \text{donc } \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{RT/M_a} - 1 \right) &= v \left(\frac{2}{r} - \frac{G m_m M_a / RT}{r^2} \right) \end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en divisant par v :

$$\boxed{\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{r^*}{r^2} \right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{RT}{M_a}}} \quad \text{et} \quad \boxed{r^* = \frac{G m_m M_a}{2RT}}$$

Q20 Homogénéité :

$\left[\frac{RT}{M_a} \right] = \left[\frac{kT}{m} \right] = [v^2]$ donc l'expression de c est homogène.

$\left[\frac{G m_m M_a}{2RT} \right] = \left[\frac{G m_m m}{2kT} \right] = \frac{\text{J.m}}{\text{J}} = \text{m}$ donc l'expression de r^* est homogène.

AN : $c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ et $r^* = 5.35 \cdot 10^8 \text{ m}$

Q21 En remplaçant r par r^* dans Q19, et en notant que d'après l'énoncé $\frac{1}{v} \frac{dv}{dr}(r = r^*) \neq 0$, on obtient $v(r^*) = \pm c$. En ne gardant que la solution positive (champ des vitesses traduisant un échappement de l'atmosphère), on a $\boxed{v(r^*) = c}$.

Q22 En intégrant l'équation Q19 avec la condition aux limites précédente on obtient :

$$\boxed{\frac{v^2}{2c^2} - \ln \left(\frac{v}{c} \right) = 2 \left(\ln \left(\frac{r}{r^*} \right) + \frac{r^*}{r} \right) - \frac{3}{2}}$$

Partie I Étude du circuit primaire

I.A - Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

Q1) La surface latérale d'un crayon vaut πdH , soit pour l'ensemble des crayons

$$S_{\text{tot}} = \pi dNH = \pi \times 9,5 \times 10^{-3} \times 41448 \times 3,66 = 4,53 \times 10^3 \text{ m}^2$$

Q2) On effectue un bilan thermique en régime stationnaire sur le volume de combustible compris entre les cylindres d'axe Oz , de rayons r et $r + dr$ de hauteur NH . En notant $\phi_{\text{cd}}(r)$ le flux conductif orienté selon les r croissants, ce volume :

- reçoit le flux $\phi_{\text{cd}}(r)$ et cède le flux $\phi_{\text{cd}}(r + dr)$ par conduction ;
- reçoit la puissance thermique $P_V dV$ générée par les désintégrations radioactives.

Le bilan s'écrit en régime stationnaire

$$0 = \frac{dU}{dt} = \phi_{\text{cd}}(r) - \phi_{\text{cd}}(r + dr) + P_V dV = -\frac{d\phi_{\text{cd}}}{dr} dr + P_V dV$$

Le volume élémentaire a pour expression

$$dV = 2\pi r dr NH$$

Les transferts sont supposés uniquement radiaux, donc la température ne dépend que de la variable r , et la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

ce qui conduit à l'expression du flux thermique à travers un cylindre d'axe Oz de rayon r

$$\phi_{\text{cd}}(r) = \iint \vec{j}_{\text{cd}} \cdot d\vec{S} = \iint -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \iint dS = -2\pi \lambda_2 NH r \frac{dT}{dr}$$

Le bilan s'écrit

$$0 = -\frac{d\phi_{\text{cd}}}{dr} dr + P_V dV = 2\pi \lambda_2 NH \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr + P_V 2\pi r dr NH$$

ce qui conduit après simplification (division par $2\pi \lambda_2 NH dr$) à l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{P_V}{\lambda_2} r &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar &= 0 ; A = \frac{P_V}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Q3) On intègre une première fois l'équation précédente

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{Ar^2}{2} + B ; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{Ar}{2} + \frac{B}{r} = -\frac{Ar}{2} = -\frac{P_V}{2\lambda_2} r$$

où $B = 0$ pour éviter la divergence de $\frac{dT}{dr}$, donc du flux conductif en $r = 0$.

Remarque : le bilan sur un cylindre de rayon $r < R_3$, possible car P_V est uniforme conduit directement à cette forme.

Puis en intégrant une seconde fois entre R_3^- et r

$$T(r) - T(R_3^-) = T(r) - T_2 = \int_{R_3}^r -\frac{P_V}{2\lambda_2} r dr = \frac{P_V}{4\lambda_2} (R_3^2 - r^2)$$

Remarque : on vérifie la cohérence du résultat en calculant $\phi_{cd}(R_3)$ égal à la puissance totale P_1 dégagée par le combustible

$$\phi_{cd}(R_3) = -\lambda_2 \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_3} 2\pi R_3 NH = P_V \pi R_3^2 NH = P_V \mathcal{V}_{\text{combustible}} = P_1$$

Q4) *Remarque* : la notion de transfert conducto-convectif entre deux solides (le combustible et la gaine) semble étonnant. On peut supposer qu'il s'agit de modéliser une résistance de contact pour un contact non parfait.

On utilise la continuité du flux en $r = R_3$ pour l'ensemble des N crayons, égal en régime stationnaire à la puissance totale P_1 dégagée par le combustible. En utilisant la loi de Newton pour la surface latérale totale du combustible, égale à $2\pi R_3 NH$:

$$P_1 = \pi R_3 NH h_2 (T_2 - T_3) : T_3 = T_2 - \frac{P_1}{2\pi R_3 NH h_2}$$

puis en exprimant $R_3 = d/2 - e$

$$T_3 = T_2 - \frac{P_1}{\pi(d - 2e)NH h_2}$$

Q5) La gaine ne contient pas de source : en régime stationnaire il y a conservation du flux, égal à P_1 . L'expression générale du flux est analogue à celle utilisé dans le combustible, en modifiant la valeur de la conductivité, ce qui conduit à l'équation

$$\phi_{cd}(R_3 < r < R_4) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr} 2\pi r NH = P_1 : \quad \frac{dT}{dr} = \frac{-P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \frac{1}{r}$$

On intègre cette relation entre R_4^- et $R_3 < r < R_4$:

$$T(r) - T(R_4^-) = T(r) - T_4 = \int_{R_4}^r \frac{-P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \frac{dr}{r} = \frac{P_1}{2\pi\lambda_3 NH} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

On fait apparaître dans cette relation $S_{\text{tot}} = \pi d NH$ pour obtenir

$$T(R_3 < r < R_4) = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

Q6) Il reste à exprimer la conservation du flux à l'interface gaine-eau ($r = R_4$). De manière analogue à l'interface combustible-gaine :

$$P_1 = 2\pi R_4 N H h_3 (T_4 - T_5) = S_{\text{tot}} h_4 (T_4 - T_5)$$

$$T_4 = T_5 + \frac{P_1}{S_{\text{tot}} h_4}$$

On calcule ensuite à partir de $T_5 = 303^\circ\text{C}$:

$$T_4 = 303 + \frac{2776 \times 10^6}{4,53 \times 10^3 \times 25 \times 10^3} = 328^\circ\text{C}$$

$$T_3 = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) = T_4 + \frac{P_1 d}{2\lambda_3 S_{\text{tot}}} \ln\left(\frac{d}{d - 2e}\right)$$

$$T_3 = 328 + \frac{2776 \times 10^6 \times 9,5 \times 10^{-3}}{2 \times 16 \times 4,53 \times 10^3} \times \ln\left(\frac{9,5}{9,5 - 2 \times 0,6}\right) = 352^\circ\text{C}$$

$$T_2 = T_3 + \frac{P_1}{\pi(d - 2e) N H h_2}$$

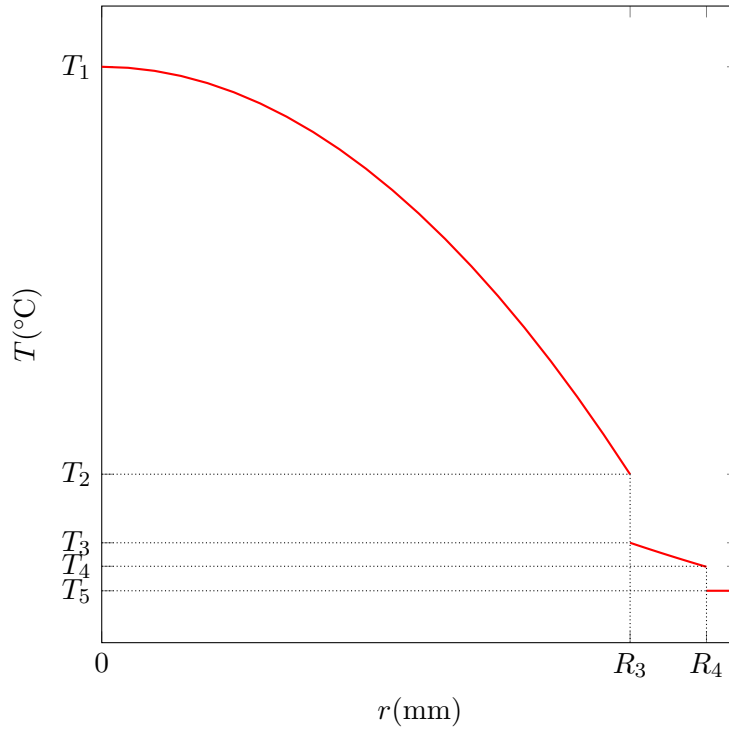
$$T_2 = 352 + \frac{2776 \times 10^6}{\pi \times (9,5 \times 10^{-3} - 2 \times 0,6 \times 10^{-3}) \times 41448 \times 3,66 \times 10 \times 10^3} = 422^\circ\text{C}$$

et finalement, au centre du combustible ($r = 0$), en utilisant $P_1 = P_V \pi R_3^2 N H$

$$T_1 = T_2 + \frac{P_V R_3^2}{4\lambda_2} = T_2 + \frac{P_1}{4\pi\lambda_2 N H}$$

$$T_1 = 422 + \frac{2776 \times 10^6}{\pi \times 4 \times 3,5 \times 41448 \times 3,66} = 838^\circ\text{C}$$

Q7) Le profil de température est le suivant



Q8) Une panne de pressurisateur entraîne une baisse de pression dans le circuit primaire, donc une baisse de température de vaporisation de l'eau, d'où un risque de vaporisation de l'eau, qui conduit à une mauvaise évacuation de la puissance dégagée par le combustible (diminution du coefficient d'échange, perturbation des pompes de circulation) et à un risque d'accident par fusion du combustible (accident de Three Miles Island).

I.B - Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Q9) On applique le premier principe pour l'écoulement stationnaire de l'eau entre z et $z + dz$, qui reçoit uniquement la puissance thermique générée par les réactions de fission :

$$D_m(h(z + dz) - h(z)) = D_m \frac{dh}{dz} dz = D_m c_5 \frac{dT}{dz} dz = \delta \mathcal{P}_{th}$$

Les transferts thermiques étant uniquement radiaux, la puissance reçue par l'eau entre z et $z + dz$ est la puissance dégagée entre les mêmes cotes par le combustible, égale à $P_V(z)dV = P_V(z)\pi R_4^2 dz$:

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} dz = P_V(z)\pi R_4^2 dz$$

soit après simplification par dz

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} = P_V(z)\pi R_4^2$$

Q10) On utilise la forme donnée de la puissance volumique $P_V(z)$ pour obtenir l'équation différentielle en $T(z)$:

$$D_m c_5 \frac{dT}{dz} = \pi R_4^2 P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) : \frac{dT}{dz} = \frac{\pi R_4^2 P_0}{D_m c_5} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

qui s'intègre entre les extrémités du crayon ($z = 0, T(0) = T_e$ et $z = H, T(H) = T_s$)

$$T_s - T_e = \frac{\pi R_4^2 P_0}{D_m c_5} \int_0^H \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz = \frac{R_4^2 H P_0}{D_m c_5} \left[\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]_H^0$$

$$T_s - T_e = \frac{2 R_4^2 H P_0}{D_m c_5}$$

De même en intégrant entre $z = 0$ et z

$$T(z) - T_e = \frac{R_4^2 H P_0}{D_m c_5} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right) = \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right)$$

$$T(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right)$$

Q11) La continuité du flux radial à l'interface $r = R_4$ entre z et $z + dz$ s'écrit

$$P_V(z)\pi R_4^2 dz = h_{cc}(T_p(z) - T(z)) 2\pi R_4 dz : T_p(z) = T(z) + \frac{P_0 R_4}{2 h_{cc}} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

soit, en exprimant $T(z)$ et P_0 à l'aide de la question précédente, et

$$T_p(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right) + \frac{D_m c_5 (T_s - T_e)}{4 h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

d'où

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

où

$$B = -1 ; C = \frac{D_m c_5}{2h_{cc} R_4 H}$$

Q12) La puissance volumique est indépendante de r et les transferts thermiques sont supposés radiaux comme dans la première partie : on peut adapter le profil de température établi à la question Q3 :

$$T(r, z) - T_p(z) = \frac{P_V(z)}{4\lambda_2} (R_4^2 - r^2) = \frac{P_V(z) R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) = \frac{P_0 R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

On exprime $T_p(z)$ grâce à la question précédente :

$$T(r, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{P_0 R_4^2}{4\lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

On utilise ici encore la relation de la question Q10 : $T_s - T_e = \frac{2R_4^2 H P_0}{D_m c_5}$ pour obtenir

$$T(r, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{D_m c_5 (T_s - T_e)}{8\lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

soit

$$\frac{T(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[\frac{C}{2} + \frac{D_m c_5}{8\lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

expression de la forme

$$\frac{T(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

avec

$$D = -1 ; E = \frac{C}{2} = \frac{D_m c_5}{4h_{cc} R_4 H} ; F = \frac{D_m c_5}{8\lambda_2 H}$$

Q13) Sur l'axe de la barre de combustible, $r = 0$ d'où

$$T_c(z) = T(0, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + 2(E + F) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

Puis en exprimant les constantes D , E et F :

$$T_c(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

Q14) On dérive l'expression précédente pour déterminer le maximum de température sur l'axe :

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_s - T_e}{2} \frac{H}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

La condition d'annulation de cette dérivée s'écrit

$$\tan\left(\frac{\pi z}{H}\right) = -\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)$$

Soit, comme $0 < z < H$

$$\frac{\pi z_{\max}}{H} = \pi - \arctan\left(\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)\right)$$

$$z_{\max} = H - \frac{H}{\pi} \arctan\left(\frac{D_m c_5}{2H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2\lambda_2} \right)\right)$$

$$z_{\max} = 3,66 \times \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left[\left(\frac{0,3 \times 5750}{2 \times 3,66}\right) \times \left(\frac{2}{33 \times 10^4 \times 9,5 \times 10^{-3}} + \frac{1}{2 \times 3,5}\right)\right] \right) = 1,86 \text{ m}$$

Dans l'expression de la température le terme en sinus est prédominant, donc le maximum est situé pratiquement en $H/2$.

On calcule ensuite

$$T_{c, \max} = 971 \text{ }^\circ\text{C}$$

Cette température est largement inférieure à la température de fusion du combustible, mais la circulation correcte d'eau de refroidissement est nécessaire.

Q15) L'eau de refroidissement s'échauffe au fur et à mesure de son écoulement le long du crayon, ce qui tend à élever la température de la paroi avec z , tandis que la puissance à évacuer est maximale au milieu de la longueur du crayon ($z = H/2$), d'où un écart entre température de la paroi et température de l'eau maximal pour $z = H/2$. La combinaison des deux effets conduit à un maximum de température de la paroi pour $z > H/2$. Aux extrémités du crayon, la puissance à évacuer est nulle, donc la température de paroi est égale à la température de l'écoulement ($T_p(0) = 284 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_p(H) = 322 \text{ }^\circ\text{C}$)

La valeur maximale de la température de paroi est inférieure à $345 \text{ }^\circ\text{C}$, température de vaporisation de l'eau sous 155 bar, ce qui respecte un critère de sécurité, puisqu'en conditions normales de fonctionnement (pression, débit d'écoulement, puissance libérée par le combustible), l'eau de risque pas de se vaporiser au contact du crayon.

Partie II Étude du circuit secondaire

II.A - Préliminaire

Q16) En l'absence de variation d'énergie mécanique, le premier principe pour un système fermé s'écrit $dU = \delta W + \delta Q$.

À un système ouvert comprenant délimité par une surface de contrôle Σ , et présentant une entrée et une sortie, on associe entre les instants t et $t + dt$ le système fermé Σ^* formé à l'instant t du fluide contenu dans Σ et de la masse de fluide entrant dans Σ entre t et $t + dt$. À l'instant $t + dt$ il est formé du fluide contenu dans Σ et du fluide qui est sorti de Σ pendant dt .