

Changement de référentiel.
Lois de composition des vitesses et des accélérations.

On s'intéresse dans ce chapitre au mouvement relatif de deux référentiels. On regarde ensuite quelles sont les lois qui relient les vecteurs vitesse et les vecteurs accélération d'un point M dans les deux référentiels.

Table des matières

I. Mouvement relatif de deux référentiels	1
1) Référentiel - Repère	1
2) Dérivation d'un vecteur dans un repère	2
3) Mouvement d'un solide indéformable	4
a) Mouvement de translation	4
b) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe	5
4) Mouvement relatif de deux référentiels	6
a) Référentiel absolu. Référentiel relatif	6
b) Universalité du temps	6
c) Description du mouvement de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}_a)	7
5) Loi de la dérivation vectorielle	9
II. Lois de composition des vitesses et des accélérations	9
1) Loi de composition des vitesses	9
a) Cas d'une translation	9
b) Cas d'une rotation	9
2) Point coïncident. Vitesse d'entraînement	10
3) Loi de composition des accélérations	10
a) Cas d'une translation	11
b) Cas d'une rotation autour d'un axe fixe	11
c) Accélération d'entraînement. Accélération de Coriolis	11

I. Mouvement relatif de deux référentiels

1) Référentiel - Repère

Le mouvement d'un corps matériel n'a de sens que par rapport à un autre corps matériel (imaginons un corps seul et infiniment éloigné de tout autre corps : se poser la question de son mouvement dans l'absolu apparaît comme dénué de sens).

Définition (Référentiel)

Un référentiel (\mathcal{R}) est un corps matériel que l'on privilégie et par rapport auquel on étudie les mouvements des autres corps matériels.

En pratique on a tout intérêt à prendre pour référentiel *un corps solide, dans l'idéal totalement indéformable* (c'est à dire parfaitement rigide) et c'est ce que nous ferons systématiquement par la suite.

On complète ensuite le référentiel (\mathcal{R}) avec une horloge (ou un chronomètre en langage plus moderne), immobile par rapport à (\mathcal{R}) et qui permet de mesurer des durées (intervalle de temps entre deux évènements).

Une fois le référentiel choisi, on lui attache *un repère* (R) en choisissant quatre points non coplanaires O, I, J et K , immobiles par rapport au référentiel (\mathcal{R}). Cela va permettre de définir trois droites orientées Δ_x, Δ_y et Δ_z concourantes en O .

- O est l'origine du repère (R).
- Les trois droites orientées Δ_x, Δ_y et Δ_z sont les trois axes cartésiens du repère : ils permettent de définir les trois coordonnées cartésiennes x, y et z de tout point M . Par la suite on les notera Ox, Oy et Oz .
- On note \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires directeurs de Δ_x, Δ_y et Δ_z :

$$\vec{e}_x = \frac{\vec{OI}}{OI} ; \vec{e}_y = \frac{\vec{OJ}}{OJ} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z = \frac{\vec{OK}}{OK}$$

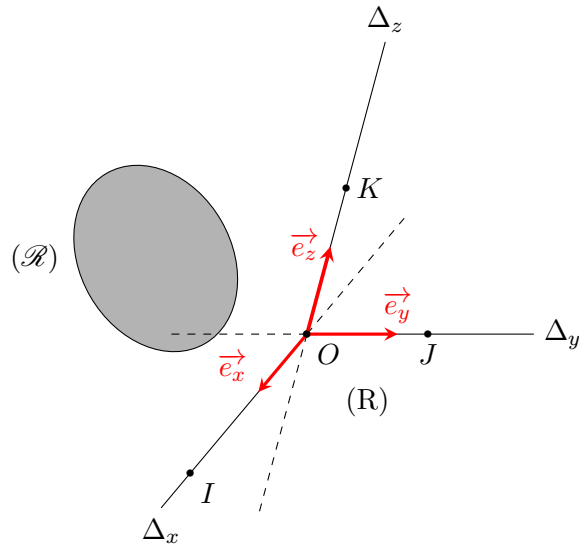
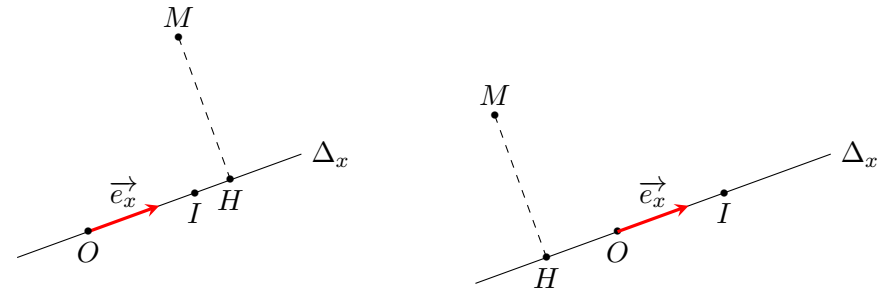


FIGURE 1 – Un référentiel (\mathcal{R}) muni d'un repère (R)

Remarques :

Exemple de construction des coordonnées cartésiennes



Vecteur position du point M dans (R) :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

2) Dérivation d'un vecteur dans un repère

Soit un référentiel (\mathcal{R}) muni d'un repère (R) et de sa base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ OND.

Si \vec{a} est un vecteur quelconque, on peut l'écrire de façon unique dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

On dira que \vec{a} est un *vecteur mobile* dans le repère (R) si et seulement si :

$$a_x = a_x(t) ; a_y = a_y(t) \text{ et } a_z = a_z(t)$$

Les composantes de \vec{a} sont donc des fonctions du temps qu'on suppose dérivables. On pose alors, **par définition** :

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \dot{a}_x(t) \vec{e}_x + \dot{a}_y(t) \vec{e}_y + \dot{a}_z(t) \vec{e}_z$$

Exemple :

Remarque :

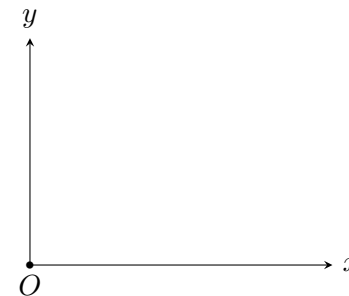
On dit que le vecteur \vec{a} est **constant dans le repère** (\mathbb{R}) si et seulement si ses 3 composantes a_x , a_y et a_z dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ne dépendent pas du temps. Dans ce cas on aura donc :

$$\vec{a} \text{ vecteur fixe dans } (\mathbb{R}) \iff \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{\mathbb{R}} = \vec{0}$$

Propriétés de la dérivation dans un repère

Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs et $f(t)$ une fonction du temps. On dispose des quatre propriétés de dérivation suivantes, dans le repère (\mathbb{R}) . Ce sont des propriétés classiques des dérivées.

Exemple : vitesse et accélération en coordonnées polaires



3) Mouvement d'un solide indéformable

Dans le but de décrire le mouvement relatif d'un référentiel par rapport à un autre référentiel, on commence par étudier deux mouvements particuliers d'un solide (S) indéformable.

Définition (Solide indéformable)

Un solide (S) est dit *indéformable* si et seulement si, pour tout couple de points (A, B) de (S), la distance AB ne varie pas au cours du temps.

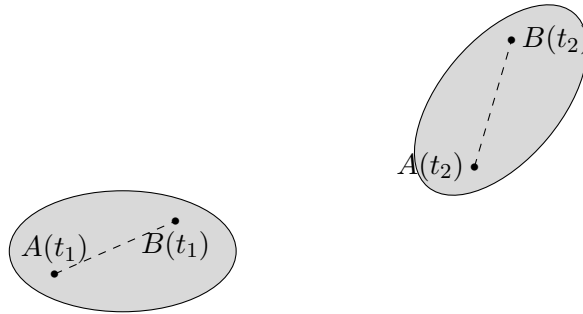


FIGURE 2 – Solide indéformable.

Conformément au programme de MP, on se contente d'étudier deux mouvements particuliers de (S) par rapport à un référentiel (\mathcal{R}) muni d'un repère (R).

a) Mouvement de translation

Définition (Solide en translation)

Un solide (S) est dit *en translation* par rapport au référentiel (\mathcal{R}) si et seulement si, pour tout couple de points (A, B) de (S), le vecteur \overrightarrow{AB} est constant dans le repère (R).

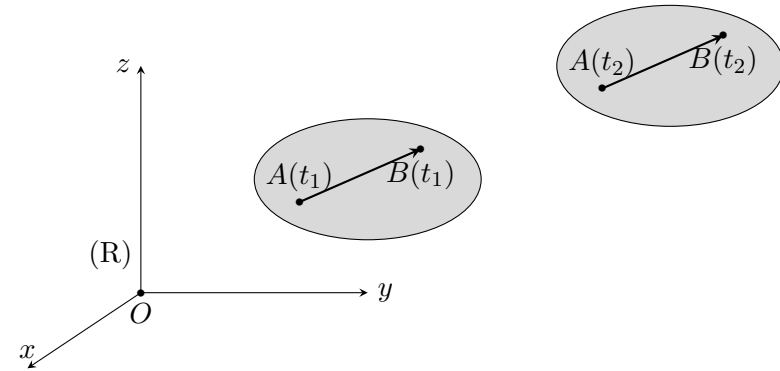


FIGURE 3 – Solide en translation dans le référentiel (\mathcal{R}).

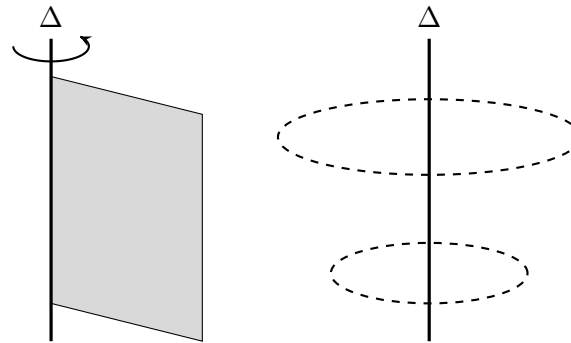
Conséquences :

b) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

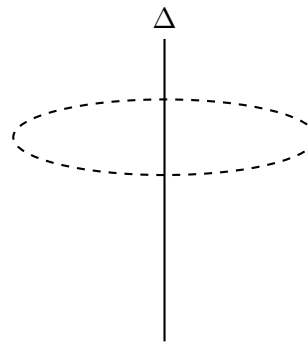
Définition (Solide en rotation autour d'un axe fixe)

Un solide (S) est dit *en rotation* autour d'un axe fixe Δ du référentiel (\mathcal{R}) si et seulement si **tous les points** M de (S) sont en mouvement circulaire autour de Δ avec la même vitesse angulaire $\omega(t)$ à chaque instant.

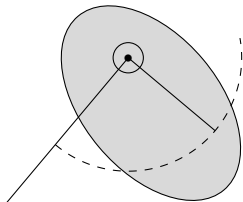
Exemple : une porte



Vecteur vitesse d'un point de (S)



Remarque : paramétrage angulaire de la rotation



4) Mouvement relatif de deux référentiels

a) Référentiel absolu. Référentiel relatif

On commence par choisir un premier référentiel (solide indéformable) qu'on va appeler **référentiel absolu**, noté (\mathcal{R}_a) . On munit ce référentiel d'un repère d'espace appelé **repère absolu**, noté $(R_a) = (O_a x_a y_a z_a)$ et de sa base cartésienne OND $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Considérons maintenant un autre référentiel (autre solide indéformable) en mouvement par rapport au référentiel absolu (\mathcal{R}_a) : il s'agit d'un référentiel qu'on appellera **relatif** et qu'on notera (\mathcal{R}) . On munit (\mathcal{R}) d'un repère d'espace $(R) = (Oxyz)$ appelé **repère relatif** et de sa base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

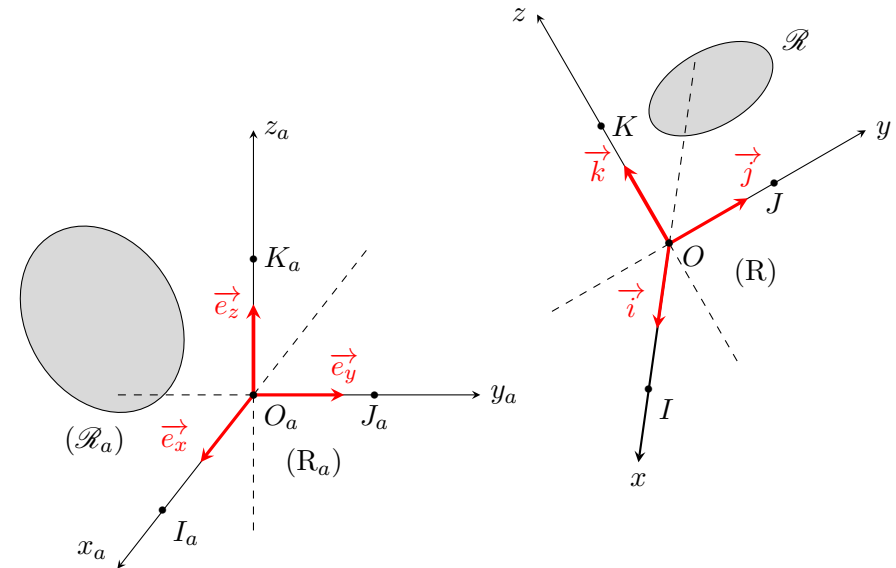


FIGURE 4 – Les référentiels absolu et relatif munis de leurs repères

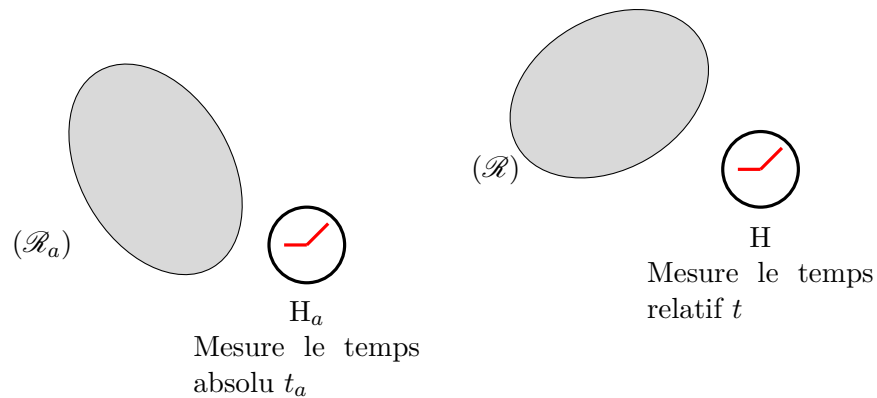
b) Universalité du temps

On dispose maintenant de deux référentiels (\mathcal{R}_a) et (\mathcal{R}) munis respectivement de leurs repères d'espace (R_a) et (R) . Prenons alors 2 horloges **identiques**, déclenchées simultanément à un même instant initial, et plaçons la première immobile dans (\mathcal{R}_a) et la seconde immobile dans (\mathcal{R}) .

À-t-on toujours $t_a = t$?

Postulat :

Les deux horloges mesurent le même temps, quel que soit le mouvement de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}_a) . On dit qu'en mécanique classique (celle de Newton), le temps est **universel**.



Cas d'une translation

FIGURE 5 – Deux horloges H_a et H respectivement immobiles par rapport à (\mathcal{R}_a) et (\mathcal{R})

Remarque :

Ceci n'est pas vérifié expérimentalement. Les 2 horloges finissent inmanquablement par indiquer des temps différents : $t_a \neq t$. Le temps ne s'écoule donc pas de la même façon dans les deux référentiels. Cependant, pour mesurer une différence notable, il faut que la vitesse de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}_a) ne soit pas petite devant c , célérité de la lumière dans le vide.

Par la suite on supposera que le temps est universel et on le notera t .

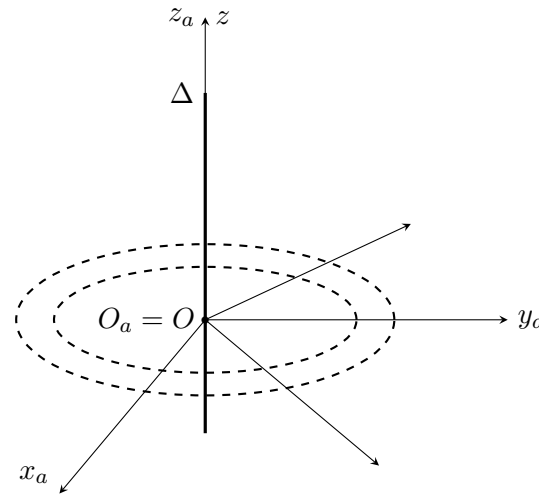
c) Description du mouvement de (\mathcal{R}) par rapport à (\mathcal{R}_a)

Conformément au programme de MP on se limite à un mouvement de translation ou à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à (\mathcal{R}_a) .

Cas d'une rotation

Remarque :

Bien que cela ne soit pas nécessaire, on a souvent intérêt dans le cas d'une rotation à prendre Δ comme *axe commun* des deux repères (R_a) et (R) et à prendre $O_a = O \in \Delta$.



5) Loi de la dérivation vectorielle

II. Lois de composition des vitesses et des accélérations**1) Loi de composition des vitesses**

Considérons un point mobile M . Les vecteurs vitesses de M dans le repère absolu (R_a) et dans le repère relatif (R) sont définies par :

$$\vec{v}(M/R_a) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{d\overline{O_aM}}{dt} \right)_{R_a} \quad \text{et} \quad \vec{v}(M/R) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_R$$

On cherche la relation entre ces deux vecteurs vitesse.

a) Cas d'une translation**b) Cas d'une rotation**

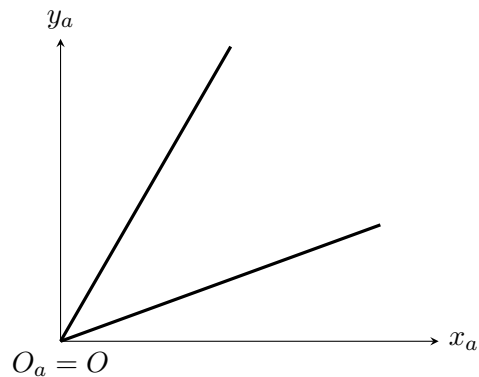
2) Point coïncident. Vitesse d'entraînement

Définition 1 (Point coïncident)

Le point coïncident $M_{\mathcal{R}}(t)$ du point M à l'instant t est le point fixe dans (\mathcal{R}) qui est confondu avec le point M à l'instant t .

Exemple 1 :

Exemple 2 :



Définition 2 (Vitesse d'entraînement)

La *vitesse d'entraînement* $\vec{v}_e(t)$ à l'instant t est celle du point coïncident $M_{\mathcal{R}}(t)$ du point M à cet instant, **par rapport au repère absolu** (R_a) :

$$\vec{v}_e(t) = \vec{v}(M_{\mathcal{R}}(t)/R_a)$$

Remarque :

Conclusion :

Dans tous les cas, la loi de composition des vitesses peut s'écrire :

$$\vec{v}(M/R_a) = \vec{v}(M/R) + \vec{v}_e(t)$$

3) Loi de composition des accélérations

On recommence avec les accélérations ! Toujours avec un point mobile M , les vecteurs accélérations de M dans le repère absolu (R_a) et dans le repère relatif (R) sont définies par :

$$\vec{a}(M/R_a) = \left(\frac{d\vec{v}(M/R_a)}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O_a M}}{dt^2} \right)_{R_a}$$

et

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} \right)_R = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_R$$

On cherche donc la relation entre $\vec{a}(M/R_a)$ et $\vec{a}(M/R)$

a) **Cas d'une translation**

b) **Cas d'une rotation autour d'un axe fixe**

c) **Accélération d'entraînement. Accélération de Coriolis**

Définition (Accélération d'entraînement)

*L'accélération d'entraînement $\vec{a}_e^\rightarrow(t)$ à l'instant t est celle du point coïncident $M_{\mathcal{R}}(t)$ du point M à cet instant, **par rapport au repère absolu** (R_a) :*

$$\vec{a}_e^\rightarrow(t) = \vec{a}(M_{\mathcal{R}}(t)/R_a)$$

Cas particulier d'un mouvement de rotation uniforme

Bilan de ce chapitre

*Cours MP***Points du cours à connaître :***Révisions de mécanique MPSI*

- Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires. Les simplifier dans le cas particulier du mouvement circulaire uniforme.
- Définir la puissance et le travail d'une force. Énoncer la loi (ou le théorème) de l'énergie cinétique et la loi (ou le théorème) de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.
- Connaître et retrouver rapidement les énergies potentielles des forces classiques : poids, force élastique, force centrale. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
- Définir le moment cinétique d'un point matériel. Énoncer le théorème du moment cinétique.
- Bien revoir le chapitre sur les forces centrales conservatives.
- Revoir chapitre sur la rotation d'un solide autour d'un axe fixe : théorème scalaire du moment cinétique, énergie cinétique et TPC.

Exercices à travailler :

- 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- S'il y a du temps : 3

Points du cours à connaître :

- Démontrer la loi de composition des vitesses en utilisant la loi de dérivation vectorielle dans le cas d'une translation puis d'une rotation. Définition du point coïncident et de la vitesse d'entraînement \vec{v}_e .
- Démontrer la loi de composition des accélérations (en utilisant la loi de dérivation vectorielle) dans le cas d'une translation puis d'une rotation. Accélération d'entraînement \vec{a}_e et accélération complémentaire (ou de Coriolis) \vec{a}_c .

Exercices à travailler :

- 1 et 3