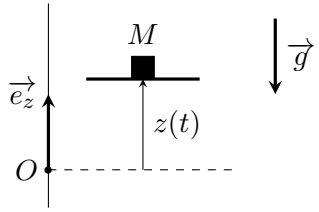
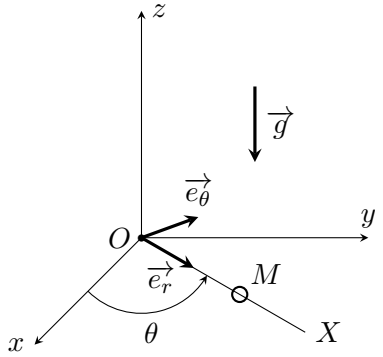
1 Oscillations d'une masse sur un support

Un point matériel M de masse m est placé sur un plateau horizontal animé d'un mouvement oscillatoire de la forme : $z(t) = a\cos(\omega t)$. Chercher la condition sur ω pour que le point matériel ne quitte jamais le plateau.



2 Mouvement d'un anneau sur une tige

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.



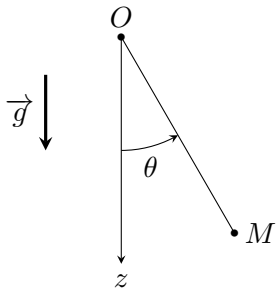
À un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire $\theta(t)$ et la position de l'anneau sur la tige par $r(t)$. À l'instant initial $t = 0$, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige, à partir du point M_0, repéré par les coordonnées polaires : $\theta(t = 0) = 0$ et $r(t = 0) = r_0$.

1) Établir l'équation différentielle satisfaite par $r(t)$. Quelle en est la solution compte tenu des conditions initiales ?

2) Déterminer la réaction $\overrightarrow{N}(t)$ exercée par la tige sur l'anneau en fonction du temps t.

3 Pendule simple

Un petit objet M de masse m est attaché au bout d'un fil de longueur L, dont l'autre extrémité est fixée en O. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{e_z}$ et la position de M est repérée par l'angle θ.



1) a) Énoncer le théorème du moment cinétique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) Retrouver cette équation différentielle par une méthode énergétique.

2) À $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et on communique à M une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$. Quelle est alors l'expression de $\theta(t)$ dans l'hypothèse des petits mouvements ? Quelle est la période T_0 de ce mouvement ?

3*) On ne fait plus l'hypothèse des petits mouvements. La masse m est maintenant abandonnée sans vitesse initiale à partir d'une position repérée par l'angle $\theta_0 \in]0, \pi/2[$.

a) Montrer que la période T du mouvement est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}$$

b) On réalise le changement de variable $\sin\phi = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sin\left(\theta_0/2\right)}$. En déduire que T se met sous la forme :

$$T = T_0\, f\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\phi}}$$

$f(x)$ est appelée *intégrale elliptique* de première espèce.

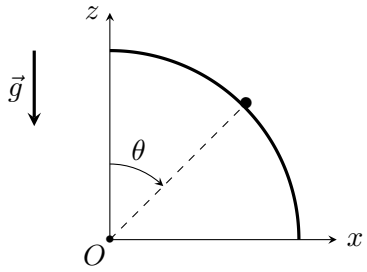
c) Montrer que, pour de petites oscillations, l'expression précédente conduit à la formule approchée :

$$T \simeq T_0\left(1 + \frac{\sin^2(\theta_0/2)}{4}\right)$$

d) Dans quel intervalle doit être situé θ_0 pour que la différence entre T et T_0 soit inférieure à 1% ?

4 Glissement d'un objet sur une sphère

Un petit palet assimilé à un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur une sphère de centre O et de rayon R. Il est repéré par l'angle θ. À l'instant $t = 0$, on l'abandonne sans vitesse initale en $\theta(0) = \theta_0$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.



1) Déduire du principe fondamental de la dynamique projeté dans la base polaire deux équations vérifiées reliant θ, $\dot\theta$ et $\ddot\theta$.

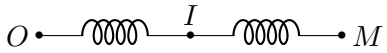
2) En déduire, par exemple en utilisant un théorème énergétique, que la composante normale N de la réaction du support vérifie :

$$N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

3) À partir de quel angle la palet quitte-t-il le support ? On considérera que θ_0 est suffisamment petit pour que $\cos\theta_0 \approx 1$.

5 Associations de ressorts

Deux ressorts caractérisés par (k_1, ℓ_{01}) et (k_2, ℓ_{02}) sont mis bout à bout en étant accrochés en un point I de masse nulle.

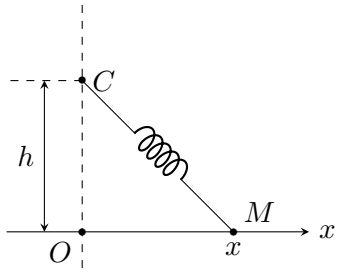


Montrer que cette association est équivalente à un seul ressort dont on déterminera la raideur k et la longueur à vide ℓ_0.

6 Positions d'équilibre stables ou pas ?

On dispose d'un ressort de raideur k, de longueur naturelle L_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités

de ce ressort est reliée à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottement sur un axe Ox horizontal. On note h la distance OC.



1) Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de M en fonction de son abscisse x.

2) Étudier les positions d'équilibre de M et discuter leur stabilité en fonction du rapport $\frac{L_0}{h}$.

7 Lois de Kepler

Une planète P de masse m est soumise à l'attraction du Soleil de masse M_S. On se place dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen.

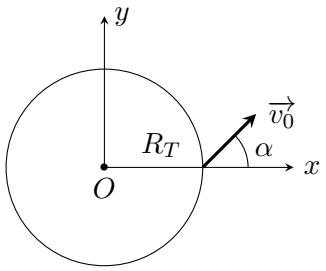
1) Énoncer les trois lois de Kepler. À quelle époque furent-elles formulées ?

2) Démontrer la troisième loi de Kepler dans le cas où le mouvement de P est circulaire. Quelle est alors la vitesse v_c en fonction de G (constante universelle de la gravitation), M_S et R (rayon de la trajectoire) ?

3) Toujours dans le cas du mouvement circulaire, quelles sont les expressions des énergies cinétique E_c, potentielle E_p et mécanique E_m ?

8 Force centrale

On étudie le mouvement d'un petit objet M, supposé ponctuel de masse m, dans le référentiel géocentrique (R_G) supposé galiléen. La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de masse M_T et de rayon R_T. L'objet est uniquement soumis à la force de gravitation exercée par la Terre : on notera G la constante de gravitation. On néglige tous les frottements éventuellement dûs à l'atmosphère.



L'objet est lancé depuis un point M_0 de la surface terrestre, situé sur Ox, avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec la verticale locale. On pose :

$$v_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

1) Montrer que la trajectoire de M est plane.

2) Le plan de cette trajectoire est muni du repère (Oxy) et on introduit les coordonnées polaires (r, θ) de M, auxquelles on associe la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, en choisissant Ox comme axe polaire.

Montrer que : $r^2\dot{\theta} = C$ où C est une constante qu'on exprimera en fonction de R_T, v_0 et α.

3) Le mouvement est-il conservatif ? Donner l'énergie potentielle $E_p(r)$ de M.

4) On souhaite placer l'objet sur une trajectoire elliptique. Quelle inégalité doit vérifier le rapport $\frac{v_0}{v_C}$? La valeur de l'angle α est-elle déterminante ?

5) a) Soit E_m l'énergie mécanique. Montrer que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_m$ et donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$.

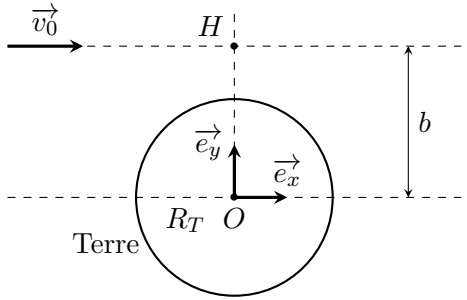
b) On se place dans le cas particulier où $v_0 = v_C$ et on pose $x = r/R_T$. Montrer que les distances minimale r_m et maximale r_M de la trajectoire sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x + \sin^2(\alpha) = 0$$

c) En déduire que l'objet retombera nécessairement en un point A de la surface terrestre pour toutes les valeurs de $0 < \alpha < \pi/2$. Quelle sera la norme v_A de la vitesse en ce point ?

9 Déviation d'un corps céleste

Le mouvement d'un météore est étudié dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Ce corps céleste, supposé ponctuel M de masse m arrive de l'infini avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$. On désigne par $b = OH$ son paramètre d'impact. Il entre dans le champ gravitationnel terrestre et sa trajectoire est déviée. La masse de la Terre est M_T.



1) Quelle est la nature de la trajectoire de M (ellipse, parabole ou hyperbole) ?

2) Soit S le point de la trajectoire le plus proche du centre de la Terre. On note $r_{\min}$ la distance entre M et le centre de la Terre en ce point et par v_S la norme de la vitesse en S.

a) Déterminer la constante des aires C en fonction de v_0 et b. En déduire v_S en fonction de $r_{\min}, b$ et v_0

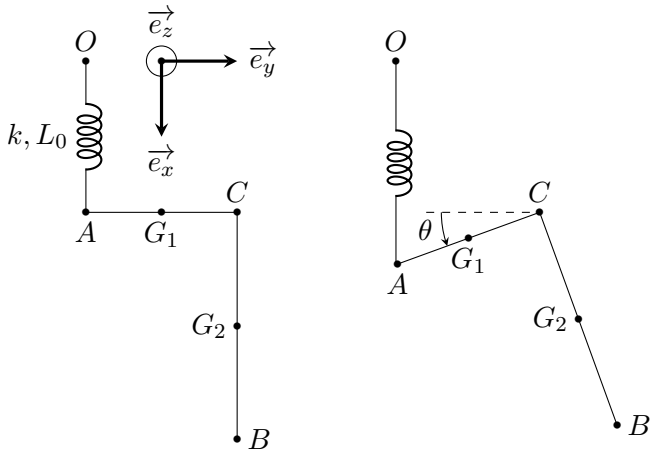
b) À l'aide de l'énergie, calculer la distance minimale d'approche $r_{\min}$ en fonction de M_T, G (constante de la gravitation), v_0 et b. En déduire la valeur minimale $b_{\min}$ pour que le météore contourne la Terre, de rayon R_T, sans la heurter.

10 Système tiges - ressort

Deux tiges CA et CB de masses m et $2m$, de longueurs L et $2L$, sont solidaires et perpendiculaires entre elles. Elles sont assujetties par une liaison parfaite à tourner dans le plan vertical (Cxy) autour de l'axe fixe Cz. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz du solide {ACB} est :

$$J = 3mL^2$$

En A est fixé un ressort de raideur k et dont la longueur à vide est L_0 : la position de son autre extrémité O (fixe dans le référentiel terrestre) est choisie de sorte que CA soit horizontal lorsque le système est en équilibre.



On étudie les petits mouvements de rotation de ce solide, repérés par l'angle θ, en supposant que θ est suffisamment petit pour considérer que le ressort reste toujours vertical.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

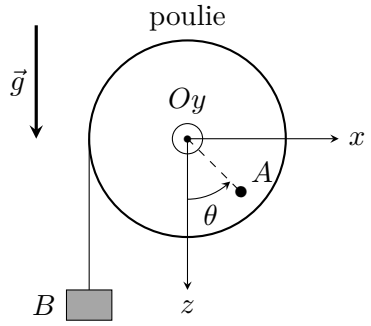
2) En déduire la période des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre.

11 Oscillations d'une poulie

Le système étudié est constitué d'une poulie, assimilée à un disque de masse m, de rayon R et de centre O, sur laquelle on a soudé en un point A une masse ponctuelle m_A. On note $OA = a$ ($a < R$) la distance entre O et A. La poulie peut tourner sans frottement autour de l'axe Oy grâce à une liaison pivot parfaite et son moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est noté J.

Un fil, sans masse et inextensible, est enroulé dans la gorge de la poulie. Son mouvement se fait sans aucun glissement par rapport à celle-ci. À l'autre extrémité de ce fil est attaché un objet B de masse m_B.

La rotation du solide { Poulie + A } est repérée par l'angle θ. À $t = 0$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale, avec un angle θ_0.



1) Quel est l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du solide { Poulie + A }, en fonction de J, m_A, a et de $\dot{\theta}$?

2) À l'aide du théorème du moment cinétique, établir une équation reliant $\ddot{\theta}$, m_A, g, a et la norme T de la tension exercée par le fil sur la poulie (Relation 1).

3) Le fil ne glissant pas sur la poulie et étant inextensible, exprimer la vitesse $\overrightarrow{v_B}$ de l'objet B en fonction de R et de $\dot{\theta}$ (Relation 2).

4) Appliquer le PFD à l'objet B (Relation 3).

5) Déduire des 3 relations trouvées aux questions précédentes l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.

6) a) Quelle sont les valeurs $\theta_{\text{éq}}$ de θ lorsque le système est en équilibre ? À quelle condition cet équilibre peut-il être réalisé ?

b) Dans le cas où l'équilibre est possible, en déduire la période T_0 des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

12 Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et il est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = mL^2/3$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\,(\cos(\theta_0 - \cos(\theta))}$$

3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}. On donne, pour $\theta_0 = 5°$:

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = 5{,}1$$