

Dynamique dans un référentiel non galiléen

On s'intéresse dans ce chapitre aux référentiels qui ne sont pas galiléens. On va voir qu'il est possible d'y appliquer les lois de la mécanique (principe fondamental, théorème du moment cinétique, théorèmes énergétiques) à condition d'ajouter deux forces supplémentaires appelées forces d'inertie (forces qui n'existent pas dans un référentiel galiléen).

Table des matières

I. Référentiels non galiléens **2**

1) Ensemble des référentiels galiléens 2

2) Les référentiels usuels de la mécanique 3

 a) Le référentiel de Kepler (\mathcal{R}_K) 3

 b) Le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_{Géo}$) 3

 c) Le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) 4

II. Dynamique dans un référentiel non galiléen **5**

1) Forces d'inertie 5

2) Théorème du moment cinétique 6

III. Théorèmes énergétiques **7**

1) Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique 7

2) Énergie potentielle 8

 a) Force conservative 8

 b) Énergie potentielle associée à une force conservative 9

 c) Exemples classiques 11

3) Énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement 13

 a) (\mathcal{R}_{ng}) est en translation rectiligne uniformément accélérée 13

 b) (\mathcal{R}_{ng}) est en rotation uniforme autour d'un axe fixe 13

4) Théorème de l'énergie mécanique 14

IV. Quelques notions sur la dynamique dans le référentiel terrestre **15**

I. Référentiels non galiléens

1) Ensemble des référentiels galiléens

Définition 1 (Référentiel galiléen)

Un référentiel galiléen (\mathcal{R}_g) est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié.

Considérons un premier référentiel qu'on appellera le référentiel absolu (\mathcal{R}_a) et supposons qu'il soit galiléen. À quelle condition un référentiel relatif (\mathcal{R}) est-il lui-aussi galiléen ?

Soit M un point matériel isolé ou pseudo-isolé et soit \vec{v}_0 sa vitesse constante dans R_a (un repère absolu lié à (\mathcal{R}_a)). Notons R un repère relatif attaché à (\mathcal{R})

Conclusion. Ensemble des référentiels galiléens.

Soit (\mathcal{R}_a) le référentiel choisi comme absolu, supposé galiléen. Alors un référentiel relatif (\mathcal{R}) est lui aussi galiléen si et seulement s'il est en *translation rectiligne uniforme* par rapport à (\mathcal{R}_a).

Il s'ensuit que si on connaît **un** référentiel galiléen, alors on en connaît une infinité : tous ceux qui sont en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci.

Connaît-on actuellement un référentiel dont on peut supposer avec une bonne dose de fiabilité qu'il est galiléen ?

Définition 2 (Référentiel non galiléen)

On appelle *référentiel non galiléen* tout référentiel qui n'est pas en translation rectiligne par rapport au référentiel de Copernic.

2) Les référentiels usuels de la mécanique**a) Le référentiel de Kepler (\mathcal{R}_K)**

Le référentiel de Kepler, noté (\mathcal{R}_K) est constitué d'un *solide fictif* dont le centre S du Soleil serait l'un des points et qui est en *translation* par rapport au référentiel de Copernic (\mathcal{R}_C). Étant en translation, tous les points de (\mathcal{R}_K) ont le même vecteur vitesse à chaque instant, par rapport au repère R_C .

On "matérialise" ce référentiel en le munissant d'un repère orthogonal R_K formé de trois droites D_x , D_y et D_z respectivement parallèles¹ à Δ_x , Δ_y et Δ_z , et qui se coupent en S (Figure 1).

Comme la masse du Soleil est très grande devant les masses de tous les autres corps du système solaire, S est pratiquement confondu avec G , ce qui fait qu'en pratique on peut confondre (\mathcal{R}_C) et (\mathcal{R}_K).

Ainsi, on peut considérer en première approximation que (\mathcal{R}_K) est aussi un référentiel galiléen (même s'il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à (\mathcal{R}_C)).

b) Le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_{Géo}$)

Le référentiel géocentrique, noté ($\mathcal{R}_{Géo}$) est lui aussi constitué d'un *solide fictif*, dont le centre O de la Terre serait l'un des points, et qui est en *translation* par rapport au référentiel de Kepler (héliocentrique) (\mathcal{R}_K). Tous les points de ($\mathcal{R}_{Géo}$) ont le même vecteur vitesse à chaque instant, par rapport au repère R_K .

1. Ceci n'est pas nécessaire et il suffit que les trois droites D_x , D_y et D_z gardent des directions fixes par rapport au repère R_C . Cependant, c'est souvent un choix commode de les rendre parallèles à Δ_x , Δ_y et Δ_z .

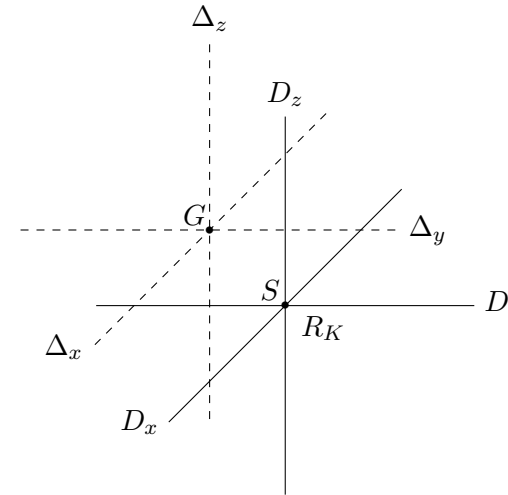


FIGURE 1 – Repère R_K attaché au référentiel de Kepler, avec origine en S , centre du Soleil.

Afin de le "matérialiser", on le munit d'un repère orthogonal $R_{Géo}$ formé de trois droites D'_x , D'_y et D'_z , orthogonales deux à deux et se coupant en O , et qui gardent des *directions fixes* par rapport au repère R_K : on peut prendre D'_x , D'_y et D'_z respectivement parallèles à D_x , D_y et D_z mais ce n'est pas une nécessité. $R_{Géo}$ est appelé *repère géocentrique* (Figure 2).

La trajectoire de O étant une ellipse quasi-circulaire autour de $S \approx G$, ($\mathcal{R}_{Géo}$) n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à (\mathcal{R}_C) et il n'est donc pas galiléen (en toute rigueur).

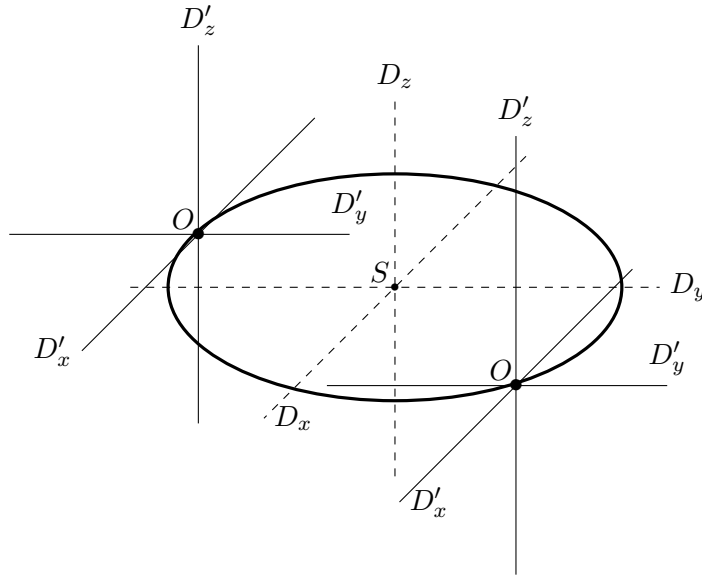


FIGURE 2 – Le repère géocentrique $R_{\text{Géo}}$ représenté à deux dates différentes de l'année. La trajectoire de O est une ellipse quasi circulaire autour de $S \approx G$. Le plan de la trajectoire est appelé plan de l'écliptique.

En notant T la période de révolution de O autour de S , on peut écrire :

$$\vec{a}(O/R_K) \approx - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \vec{SO}$$

Avec $T = 365,25$ jours $= 3,16 \times 10^7$ s et $\|\vec{SO}\| = 1,5 \times 10^{11}$ m, on obtient $\|\vec{a}(O/R_K)\| = 6,0 \times 10^{-3}$ m.s $^{-2}$.

c) Le référentiel terrestre (R_T)

C'est le référentiel de la Terre, considérée comme un solide. Celle-ci peut être considérée comme étant en **rotation uniforme** autour de l'axe de pôles Δ , qui est un axe fixe dans le référentiel géocentrique ($R_{\text{Géo}}$).

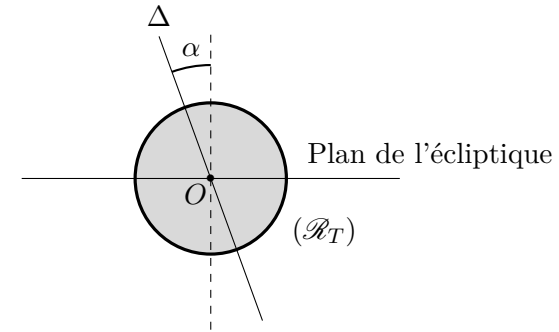


FIGURE 3 – Le référentiel terrestre et son axe de rotation Δ . L'axe de rotation est celui des pôles géographiques. Il fait un angle $\alpha \approx 23^\circ$ avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique.

La vitesse angulaire ω_T de rotation de la Terre autour de Δ est :

$$\omega_T = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Il n'est donc pas du tout en translation rectiligne uniforme par rapport à R_C et ne peut donc être considéré comme étant galiléen.

II. Dynamique dans un référentiel non galiléen

À partir de maintenant on suppose qu'on dispose d'un référentiel galiléen qu'on prend comme référentiel absolu : $(\mathcal{R}_a) = (\mathcal{R}_g)$ et qu'on munit d'un repère absolu (R_a) .

En pratique, dans les exercices et problèmes de concours, ce ne sera pas forcément le référentiel de Copernic. Il est courant qu'on choisisse le référentiel géocentrique ou bien le référentiel terrestre ... bien qu'en toute rigueur ces deux derniers ne soient pas galiléens : cependant l'écart est minime et on peut faire cette hypothèse en première approximation.

1) Forces d'inertie

Dans un référentiel galiléen, tout écart par rapport au mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel est interprété comme une interaction entre ce point et le reste de l'univers. Cette interaction est modélisée par un vecteur force \vec{F} .

Soit $\sum \vec{F}$ la somme de toutes les forces appliquées à un **point matériel** M de masse m (= résultante des forces). On a :

$$\boxed{m \left(\frac{d\vec{v}(M/R_a)}{dt} \right)_{R_a} = m \vec{a}(M/R_a) = \sum \vec{F}}$$

C'est le *principe fondamental de la dynamique* (PFD)

On peut généraliser cette loi à un système matériel (\mathcal{S}) **non ponctuel** (par exemple : un ensemble de points matériels, un solide, un ensemble de solides, etc...) en mouvement dans (\mathcal{R}_a) : c'est le *théorème du centre d'inertie* (TCI).

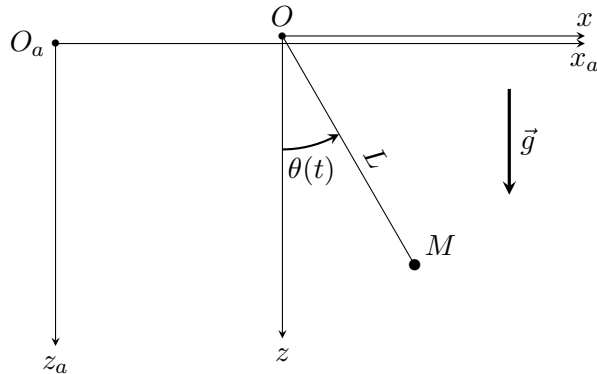
Soit alors un référentiel relatif (\mathcal{R}) dont le mouvement par rapport à (\mathcal{R}_a) n'est pas rectiligne uniforme. (\mathcal{R}) n'est donc pas galiléen et on le notera (\mathcal{R}_{ng}) . On le munit d'un repère (R_{ng}) et la loi de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}(M/R_a) = \vec{a}(M/R_{ng}) + \vec{a}_e^\rightarrow(M) + \vec{a}_c^\rightarrow(M)$$

2) Théorème du moment cinétique

Exercice

Le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) est supposé galiléen et on le munit du repère $(O_a x_a y_a z_a)$. Un fil est attaché en un point O mobile dans (\mathcal{R}_T) de sorte que $x_O(t) = X_m \cos(\omega t)$. À l'autre extrémité du fil on attache un petit objet M de masse m . Le fil reste tendu, de longueur L et le mouvement est plan. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ en raisonnant dans un référentiel en translation par rapport à (\mathcal{R}_T) , muni du repère $(Oxyz)$.



III. Théorèmes énergétiques

1) Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Dans le repère non galiléen (R_{ng}), l'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m est :

$$E_c(M/R_{ng}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} m \|\vec{v}(M/R_{ng})\|^2$$

et la puissance cinétique de M est :

$$\mathcal{P}_c(M/R_{ng}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{dE_c(M/R_{ng})}{dt} \right)_{R_{ng}}$$

Dans un référentiel non galiléen, les théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique sont encore valables mais il faut tenir compte de la puissance ou du travail des deux forces d'inertie.

Théorème de la puissance cinétique :

$$\mathcal{P}_c(M/R_{ng}) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}(M/R_{ng}) + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{v}(M/R_{ng}) + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M/R_{ng})$$

Théorème de l'énergie cinétique :

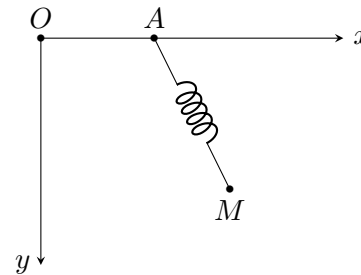
Entre deux instants t_a et t_b ou entre les deux points A et B atteints par le point M à ces deux instants, la variation d'énergie cinétique $\Delta E_c(M/R_{ng}) = E_c(M/R_{ng})(t_b) - E_c(M/R_{ng})(t_a)$ est donnée par :

$$\Delta E_c(M/R_{ng}) = \sum W(\vec{F}, A \rightarrow B) + W(\vec{F}_{ie}, A \rightarrow B) + W(\vec{F}_{ic}, A \rightarrow B)$$

Point important :

- Du temps t **explicitement** : le paramètre t figure explicitement dans l'expression de la force (ce qui n'est pas la même chose que de dépendre du temps par l'intermédiaire de la position ou de la vitesse).

Exemple : le ressort est attaché en A qui se déplace selon $x_A(t) = X_m \cos(\omega t)$. Déterminer la force élastique exercée sur le point M de coordonnées (x, y) dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .



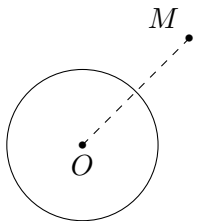
2) Énergie potentielle

a) Force conservative

Soit \vec{F} une force (d'interaction ou bien d'inertie) exercée sur un point matériel M . De façon générale, \vec{F} peut dépendre :

- de la position du point M . \vec{F} est alors une fonction des coordonnées de M ;

Exemple : force gravitationnelle

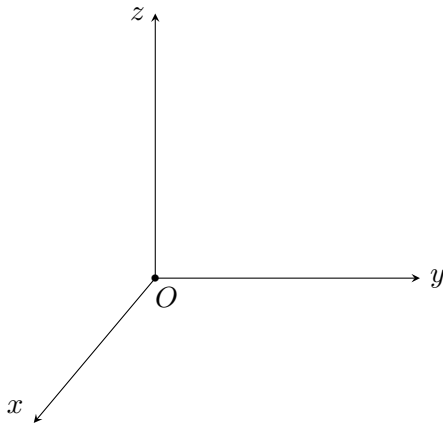


- de la vitesse de M : $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$

Exemple : force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

Considérons le travail d'une force \vec{F} entre deux points A et B , le long d'une courbe \mathcal{C} reliant A et B . Par définition :

$$W_{\mathcal{C}}(\vec{F}, A \rightarrow B) = \int_{A, \mathcal{C}}^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_M$$



Définition (Force conservative)

On dit qu'une force \vec{F} appliquée à un point M est *conservative* si et seulement si :

1. \vec{F} ne dépend que des coordonnées du point M (et pas de sa vitesse, ni explicitement du temps) : $\vec{F} = \vec{F}(M)$
2. Le travail de \vec{F} entre deux points quelconques A et B ne dépend pas de la courbe \mathcal{C} qui relie ces deux points :

$$\forall A, B, \forall \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, W_{\mathcal{C}_1}(\vec{F}, A \rightarrow B) = W_{\mathcal{C}_2}(\vec{F}, A \rightarrow B)$$

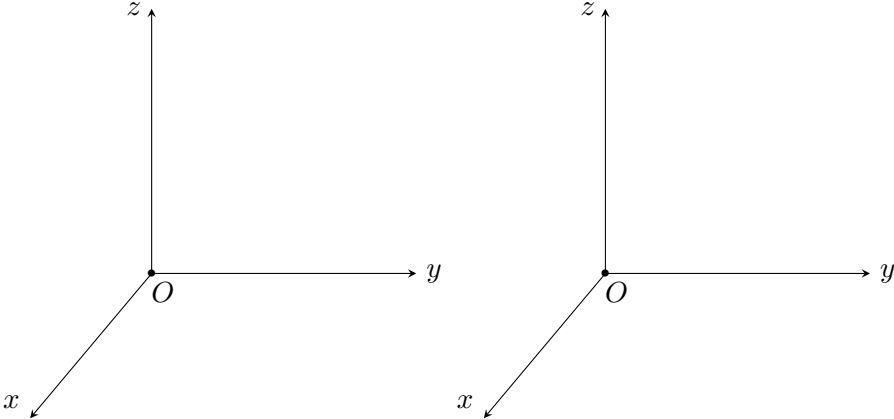
Remarques :

b) Énergie potentielle associée à une force conservative

Soit $\vec{F}(M)$ une force conservative. On va voir qu'il est possible de lui associer une fonction $E_p(M)$ qui ne dépend que des coordonnées du point M , appelée *énergie potentielle associée* à $\vec{F}(M)$ et que l'on définit de la manière suivante :

On choisit un point Ω **quelconque mais fixé** et on pose :

$$E_{p,\Omega}(M) \stackrel{\text{déf}}{=} -W_{\mathcal{C}}(\vec{F}, \Omega \rightarrow M)$$



Propriétés

Démo :

Réciproquement :

Si une force $\vec{F} = \vec{F}(M)$ appliquée à un point M ne dépend que de la position de ce point et qu'il existe une fonction $f(M)$ vérifiant :

$$\vec{F}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$$

alors \vec{F} est conservative et $f(M)$ est une énergie potentielle associée à \vec{F} .

c) Exemples classiques

- Poids dans \vec{g} uniforme :

.

- Force centrale conservative :

- Force élastique (ressort) :

b) (\mathbf{R}_{ng}) est en rotation uniforme autour d'un axe fixe

3) **Énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement**

- $\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\omega}(\mathbf{R}/\mathbf{R}_a) \wedge \vec{v}(M/\mathbf{R})$ n'est pas conservative car elle dépend de la vitesse de M . Cependant cette force **n'intervient jamais** dans les théorèmes énergétiques puisque :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic}) = \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M/\mathbf{R}) = 0$$

- En général, \vec{F}_{ie} n'est pas conservative (et sa puissance n'est pas nulle) **sauf** dans deux cas particuliers.
- a) (\mathbf{R}_{ng}) est en translation rectiligne uniformément accélérée

4) Théorème de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie mécanique est encore valable dans un référentiel non galiléen à condition de tenir compte de l'énergie potentielle associée à \vec{F}_{ie} dans le cas où elle existe (sinon on range \vec{F}_{ie} dans les forces non conservatives).

On rappelle que, si $E_m(M/R_{ng}) = E_c(M/R_{ng}) + E_p(M)$ est l'énergie mécanique du point matériel M dans le repère non galiléen, alors :

$$\left(\frac{dE_m(M/R_{ng})}{dt} \right)_{R_{ng}} = \sum \mathcal{P}_{nc}(t)$$

ou bien :

$$\Delta E_m(M/R_{ng}) = \sum W_{nc}$$

En particulier

$$\begin{aligned} \forall t, \sum \mathcal{P}_{nc}(t) = 0 &\iff \forall t, \left(\frac{dE_m(M/R_{ng})}{dt} \right)_{R_{ng}} = 0 \\ &\iff E_m(M/R_{ng}) = \text{Cste} \end{aligned}$$

Lorsque la somme des puissances des forces non conservatives est nulle, l'énergie mécanique est constante (conservation de l'énergie mécanique au cours du temps).

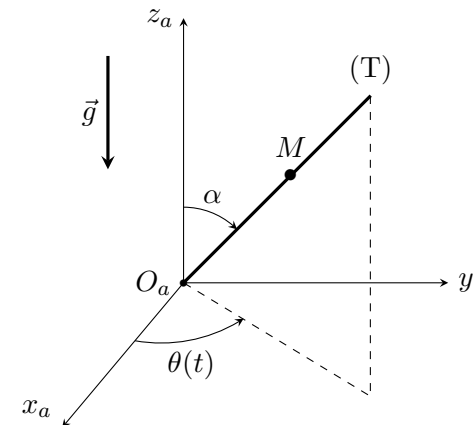
Exercice :

Le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) est supposé galiléen et on le munit du repère $R_a = (O_a x_a y_a z_a)$. L'accélération de la pesanteur est uniforme, verticale descendante : $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

Une tige (T) tourne autour de $O_a z_a$ en gardant un angle α constant avec l'axe $O_a z_a$. La rotation de la tige est uniforme et paramétrée par l'angle $\theta(t)$ tel que $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{Cste}$.

Un anneau M de masse m peut coulisser sans frottement le long de la tige et on pose $O_a M(t) = r(t)$, distance de M à O_a . En raisonnant dans le référentiel de la tige :

1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $r(t)$.
2. Étudier l'existence d'une position d'équilibre de M dans le référentiel de la tige, ainsi que sa stabilité.



IV. Quelques notions sur la dynamique dans le référentiel terrestre

On a vu que le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) était en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω_T (constante) autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_{Géo}$). En toute rigueur, ce n'est pas un référentiel galiléen.

Dans la suite le référentiel terrestre sera muni du repère d'espace $(R_T) = (Axyz)$ tandis que le référentiel géocentrique sera muni du repère $(R_G) = (Ox_0y_0z_0)$.

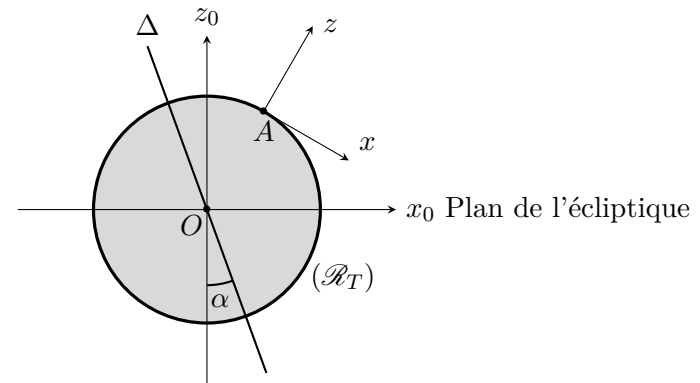


FIGURE 4 – Référentiel terrestre muni du repère $(Axyz)$ et référentiel géocentrique muni du repère $(Ox_0y_0z_0)$.

Prenons un objet ponctuel M proche de la surface terrestre. Pour établir le PFD dans (\mathcal{R}_T) il faut en passer par une succession de composition d'accéléérations.

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Définir un référentiel galiléen. Discuter de l'ensemble des référentiels galiléens.
- Cas d'un référentiel non galiléen : bien connaître l'expression des forces d'inertie. Cas particulier d'une rotation uniforme $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$.
- Énergie potentielle associée à \vec{F}_{ie} dans le cas d'une translation uniformément accélérée et dans celui d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe.
- Mécanique dans le référentiel terrestre. Connaître la définition du poids et le critère pour pouvoir négliger la force de Coriolis.

Exercices à travailler :

- En priorité : les exercices résolus dans le cours (exercice avec TMC et exercice avec anneau sur une tige en rotation) + exercices 1 et 2
- S'il y a le temps : 3 et 4.

Chapitre sur les frottements solides

- Définir la vitesse de glissement et savoir qu'elle ne dépend pas du référentiel.
- Énoncer précisément les lois de Coulomb du frottement solide en l'absence et en présence de glissement. Citer quelques propriétés des coefficients de frottements.

Exercices à travailler :

- tous : 1, 2, 3 et 4.