1 Corrigé du problème 2 (Extrait Centrale MP 2018)

I. A - Une atmosphère très étendue

Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme g_s. La densité volumique de particules $n_1(z)$ à l'altitude z, mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression $n_1(z) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$ où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de pesanteur et n_0 la densité volumique de particules à l'altitude $z = 0$.

Q1 *Donner l'expression de $E_p(z)$ et en déduire que $n_1(z) = n_0 \exp(-z/H)$ où H est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de m, k_B, T et g_s.*

Dans un champ uniforme $\vec{g}_s = -g_s \vec{e}_z$ et $E_p = m g_s z$ donc :

$$n_1(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad \boxed{H = \frac{k_B T}{m g_s}}$$

Q2 *Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude $z_2 = R_s$, où R_s est le rayon du Soleil, environ 10^3 fois plus faible qu'à l'altitude $z_1 = 0$. En déduire la valeur numérique de H, puis évaluer la température de la couronne.*

$$\frac{n_1(R_s)}{n_1(0)} = 10^{-3} = \exp\left(-\frac{R_s}{H}\right)$$

donc $H = \frac{R_s}{3\ln(10)} = 1{,}01.10^8$ m donc $T = \frac{m g_s H}{k_B}$ avec $m = \frac{M_{\mathrm{H}}}{\mathcal{N}_A} = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg (masse d'un proton H^+, la masse de l'électron manquant étant négligeable). On en déduit :

$$\boxed{T = 3{,}33 \times 10^6 \text{ K}}$$

I.B - Présence de fer hautement ionisé

Le spectre de la lumière provenant de la couronne solaire inclut une raie d'émission assez intense de longueur d'onde λ_0 = 530,3 nm. Cette raie a été attribuée à l'ion Fe_{XIV}, c'est-à-dire au fer ayant perdu 14 électrons. L'énergie d'ionisation permettant de passer de Fe_{XIII} à Fe_{XIV} est E_1 = 355 eV.

Q3 *Quelle est la condition sur la longueur d'onde d'un photon incident pour qu'il puisse provoquer l'ionisation de Fe_{XIII} en Fe_{XIV} ? À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-il ?*

L'énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ du photon incident doit être supérieure à E_1 donc $\lambda < \lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = 3{,}5$ nm, longueur d'onde au delà du domaine de l'ultraviolet : ce sont des rayons X .

Le rayonnement provenant de la surface solaire est insuffisant dans ce domaine spectral. On explique l'ionisation par des chocs entre ions Fe_{XIII} et électrons libres du milieu. Chacune de ces particules est assimilée à un point matériel obéissant à la statistique classique de Maxwell-Boltzmann. En dehors des chocs, les différentes particules sont sans interaction : leur énergie mécanique se réduit donc à leur énergie cinétique.

Q4 *En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'un électron libre en fonction de la température T, ainsi que celle d'un ion Fe_{XIV}.*

Les électrons sont assimilés à des points matériels : ils se comportent donc comme un gaz monoatomique. Le théorème d'équipartition associé $\frac{1}{2} k_B T$ à chacun des trois degrés de liberté quadratiques de translation donc :

$$\boxed{\left\langle E_c(e^-) \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T}$$

Il en est de même pour les ions Fe_{XIV}, ce qui donne :

$$\boxed{\langle E_c(\mathrm{Fe})\rangle = \frac{3}{2}k_B T}$$

Q5 *En considérant que l'ionisation est probable si la somme des énergies cinétiques moyennes des deux particules est supérieure à E_1, estimer la température de la couronne.*

La somme des énergies moyennes (ion + électron) vaut $3k_BT$ et la condition d'ionisation s'écrit $3k_BT > E_1$ donc $T > T_1 = \frac{E_1}{3k_B} = 1{,}4.10^6$ K.

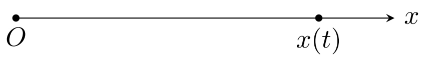
I.C - Des raies d'émission très larges

Un ion Fe_{XIV} excité émet un signal lumineux (onde électromagnétique) de fréquence ν_0 dans son référentiel propre (c'est à dire celui où il est au repos). Cependant, du fait de son mouvement par rapport à un observateur, ce dernier reçoit un signal de fréquence $\nu \neq \nu_0$.

Q6 *Nommer l'effet décrit ci-dessus.*

Il s'agit de l'effet Doppler-Fizeau (ou effet Doppler tout court).

Étudions une situation simplifiée dans laquelle l'observateur est fixe en un point O de l'espace. Un ion Fe_{XIV} excité se déplace à la vitesse algébrique v_x constante sur un axe (Ox) orienté de l'observateur vers l'ion. On note $x(t)$ l'abscisse de l'ion à l'instant t.



L'ion émet un signal lumineux de période T_0. Soient t_0 (respectivement t) et $t_0 + T_0$ (respectivement $t + T$) les instants correspondant à l'émission par l'ion (respectivement à la réception par l'observateur) du début et de la fin d'une période du signal.

Q7 *La célérité du signal dans le milieu qui sépare l'ion de l'observateur étant c (célérité de la lumière dans le vide), calculer t et $t + T$ en fonction de t_0, T_0, v_x et c.*

À t_0 l'ion est à la distance $x(t_0)$ de l'observateur. Le signal émis à cet instant met une durée $x(t_0)/c$ pour arriver jusqu'à l'observateur, qui le recevra donc au temps :

$$\boxed{t = t_0 + \frac{x(t_0)}{c}}$$

À l'instant $t_0 + T_0$ l'ion est à la distance $x(t_0 + T_0)$ de l'observateur. Le signal émis à cet instant arrivera donc jusqu'à l'observateur au temps :

$$\boxed{t + T = t_0 + T_0 + \frac{x(t_0 + T_0)}{c}}$$

Q8 *Exprimer T en fonction de T_0, v_x et c. Dans le cas où $v_x \ll c$, montrer que la fréquence ν mesurée par l'observateur s'écrit de façon approchée :*

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \qquad (1)$$

Par différence des deux relations précédentes et sachant que $x(t_0 + T_0) - x(t_0) = v_x T_0$ on obtient :

$$\boxed{T = T_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)}$$

De plus $\nu = 1/T$ et $\nu_0 = 1/T_0$ d'où :

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_x}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \text{ si } v_x \ll c$$

Le rayonnement observé provient en réalité d'un très grand nombre d'ions Fe_{XIV}. La probabilité pour qu'un de ces ions ait sa composante selon Ox de son vecteur vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ est donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$\delta P = C \exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right) \mathrm{d}v_x$$

avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où C est une constante.

On note $\langle X \rangle$ la valeur moyenne (espérance) d'une grandeur X associé à un ion Fe_{XIV} donné.

Q11 a) *Calculer C.*

Il faut normaliser la probabilité. La probabilité pour qu'un ion ait une vitesse quelconque comprise entre $-\infty$ et $+\infty$ vaut 1. On a donc :

$$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right) \mathrm{d}v_x = C \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}}$$

d'où :

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{m\beta}{2\pi}}}$$

b) *Établir la relation entre $(\Delta\nu)^2 = \left\langle (\nu - \nu_0)^2 \right\rangle$ et $\langle v_x^2 \rangle$.*

On a :

$$\nu - \nu_0 = -\,\nu_0 \frac{v_x}{c} \quad \text{donc} \quad (\nu - \nu_0)^2 = \nu_0^2 \frac{v_x^2}{c^2}$$

et donc :

$$\boxed{(\Delta\nu)^2 = \langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle = \nu_0^2 \frac{\langle v_x^2 \rangle}{c^2}}$$

c) *En déduire $\Delta\nu$ en fonction de m, T, c, k_B et ν_0, puis en fonction de m, T, c, k_B et λ_0 longueur d'onde de l'onde associée à la fréquence ν_0.*

On calcule :

$$\langle v_x^2 \rangle = \int v_x^2 \, \delta P = C \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{\beta m v_x^2}{2}\right) \mathrm{d}v_x = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{m^3\beta^3}} = \frac{k_B T}{m}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{k_B T}{m c^2}} = \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m c^2}} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

puisque $\nu_0 = c/\lambda_0$ et en convenant que $m = m_{\mathrm{Fe}}$.

Pour la raie verte de Fe_{XIV}, centrée sur la longueur d'onde λ_0 = 530,3 nm, on observe $\Delta\nu \approx$ 3,20×10^{10} Hz.

d) *En déduire la température T du milieu dans lequel cette raie se forme.*

$$\boxed{T = \frac{m}{k_B} (\lambda_0 \Delta\nu)^2 = 1{,}9.10^6 \text{ K}}$$

avec $m = \frac{M_{\mathrm{Fe}}}{\mathcal{N}_A} = 9{,}27 \times 10^{-26}$ kg.

Q12 *De façon plus générale la probabilité pour qu'un ion* Fe_{XIV} *ait les trois composantes de son vecteur vitesse respectivement comprises entre* v_x *et* $v_x + \mathrm{d}v_x$, v_y *et* $v_y + \mathrm{d}v_y$, v_z *et* $v_z + \mathrm{d}v_z$ *est donnée par :*

$$\delta\mathscr{P} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right) \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

où v *est la norme du vecteur vitesse.*

a) *Exprimer la probabilité* $\mathscr{P}(v \leqslant V)$ *pour que la norme de la vitesse de l'ion soit inférieure à* $V > 0$*. On donnera le résultat sous la forme :*

$$\mathscr{P}(v \leqslant V) = \int_0^V f(v)\,\mathrm{d}v$$

où $f(v)$ *est la densité de probabilité de la norme du vecteur vitesse. En déduire la probabilité pour que* v *soit comprise entre* V *et* $V + \mathrm{d}V$

On repère le vecteur vitesse par ses coordonnées sphériques (v, θ, φ). De cette façon $\mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = v^2 \sin\theta\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. La probabilité cherchée s'obtient en intégrant de la façon suivante :

$$\mathscr{P}(v \leqslant V) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^V \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right) v^2\,\mathrm{d}v \times \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{=4\pi}$$

d'où :

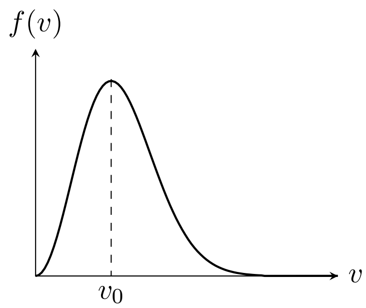
$$\boxed{f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right)}$$

La fonction de répartion est ici $F(V) = \mathscr{P}(v \leqslant V)$ et la probabilité pour que v soit comprise entre V et $V + \mathrm{d}V$ est donc $\delta\mathscr{P} = F(V + \mathrm{d}V) - F(V) = F'(V)\,\mathrm{d}V = f(V)\,\mathrm{d}V$

b) *Représenter l'allure de* $f(v)$ *en fonction de* v *pour* v *variant de* 0 *à* $+\infty$*. Montrer en particulier que* $f(v)$ *admet un maximum pour une valeur particulière* v_0 *de* v *à déterminer en fonction de* m, k_B *et* T*.*

$$f'(v) = \text{Cste} \times (2v - v^3\,\beta m) \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right) = \text{Cste} \times v \times (2 - v^2\,\beta m) \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right)$$

f' s'annulle en $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\beta m}} = \sqrt{\dfrac{2k_B T}{m}}}$. Elle est croissante de 0 à v_0 puis décroissante de v_0 à $+\infty$.



c) *Calculer $\langle v \rangle$, valeur moyenne de la norme du vecteur vitesse d'un ion. Faire l'application numérique pour la température $T = 2{,}0 \times 10^6$ K.*

On doit calculer :

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f(v)\,\mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 \exp\left(-\frac{\beta m v^2}{2}\right) \mathrm{d}v$$

ce qui donne, avec la formule donnée par l'énoncé :

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, v_0}$$

A.N. $\langle v \rangle = 2{,}75 \times 10^4$ m.s^{-1}

2 Mouvement d'un palet

1. Le palet est soumis à deux forces : la réaction $\overrightarrow{N}$ exercée par le sol qui, en l'absence de frottements, est toujours perpendiculaire au support et son poids $\overrightarrow{P}$. $\overrightarrow{N}$ est une force non conservative qui ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement à chaque instant. $\overrightarrow{P}$ est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle :

$$E_P^P(z) = mgz + \text{Cste} = mgz$$

en choisissant la constante nulle (énergie potentielle de pesanteur nulle en $z = 0$). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au palet entre les points A et C :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to C}(\overrightarrow{N}) + W_{A\to C}(\overrightarrow{P}) = W_{A\to C}(\overrightarrow{P})$$

or

$$W_{A\to C}(\overrightarrow{P}) = -\left[E_P^P(C) - E_P^P(A)\right] = -\left(mgz_C - mgz_A\right) = -2mgR$$

d'où :

$$\boxed{v_C^2 = v_A^2 - 4gR}$$

2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au palet entre B et C (mouvement circulaire). En utilisant la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, nous obtenons :

Bilan des forces :

$$\overrightarrow{N} = -N\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Avec une accélération $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -mR\dot{\theta}^2 & = & -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} & = & -mg\sin\theta \end{array}\right.$$

Or $v = R\dot{\theta}$. La première équation fournit donc la relation cherchée :

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$$

Lors du passage du point B au point C, la norme v de la vitesse diminue et $\cos\theta$ passe de $+1$ à -1. N diminue entre B et C et elle est minimale en C (où $\theta = \pi$) :

$$N_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg$$

Pour que le palet ne quitte pas le support, il faut que $\forall\, t, N > 0 \Longrightarrow N_C > 0$, d'où :

$$v_C^2 > gR \iff v_A^2 - 4gR > gR$$

et donc :

$$\boxed{vA > \sqrt{5gR}}$$

3. On applique le principe fondamental de la dynamique au palet dans son mouvement de chute libre, la seule force appliquée étant le poids : $m\,\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$, d'où, en projection sur la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -v_C \\ \dot{z} & = & -gt \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -v_C t + d \\ z & = & -\frac{gt^2}{2} + 2R \end{array}\right.$$

4. Pour que le palet retombe en A, il faut qu'il existe une date t_A telle que $x(t_A) = z(t_A) = 0$, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_A) & = & -v_C t_A + 3R = 0 \\ z(t_A) & = & -\frac{gt_A^2}{2} + 2R = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t_A & = & \frac{3R}{v_C} \\ -\frac{g}{2}\,\frac{9R^2}{v_C^2} + 2R & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où :

$$\boxed{v_C^2 = \frac{9}{4} gR \iff v_C = \frac{3}{2}\sqrt{gR}}$$

Comme $v_A^2 = v_C^2 + 4gR$, nous obtenons :

$$\boxed{v_A^2 = \frac{25}{4} gR \iff v_A = \frac{5}{2}\sqrt{gR}}$$

5. Le palet devant toujours retomber en A, la vitesse au point C doit être identique à celle calculée à la question 4. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les points A et C ; la seule force non-conservative qui travaille étant la réaction tangentielle $\overrightarrow{T}$ entre A et B, il vient :

$$E_m(C) - E_m(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{T}) = -\,fmgd$$

d'où :

$$\frac{1}{2}m \times \frac{9}{4}gR + mg \times 2R - \frac{1}{2}m \times (1,1)^2 \times \frac{25}{4}gR - 0 = -\,fmgd$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{f = \frac{25R}{8d}\left((1,1)^2 - 1\right) \overset{AN}{=} 0{,}22}$$

On trouve un ordre de grandeur tout à fait correct pour le coefficient de frottement dynamique, compris entre 0 et 1.